

Vigyázat! A gondolataink fertőzhetnek!

Tuzson Zoltán, Székelyudvarhely

A problémák megoldása során, nagyon sokszor kerülünk olyan helyzetbe, hogy több esetben is a feltételek, körülmények hasonlóak, és ilyenkor hasonló módszereket alkalmazhatunk, hasonló konklúziókat vonhatunk le. Ez képezi az analógiás gondolkodás lényegét, ami nélkülözhetetlen a matematikában. Például a $3 \cdot 4^x - 5 \cdot 2^x \cdot 3^x + 2 \cdot 9^x = 0$ egyenletet és a $3 \cdot \cos^2 x - 5 \cdot \sin x \cdot \cos x + 2 \cdot \sin^2 x = 0$ egyenletet teljesen hasonlóan oldjuk meg, mert mindkettőre teljesül az, hogy másodfokú homogén, ezért végigosztunk a harmadik taggal és a $3y^2 - 5y + 2 = 0$ másodfokú egyenlethez jutunk. Az analógiás gondolkodás gyakran társul induktív gondolatmenettel is, amikor lépésről-lépésre alakítjuk ki a gondolkodási sémánkat. Nézzünk egy példát, ami erre a két műveletre támaszkodik.

1. példa: Az (1), (2, 3), (4, 5, 6), (7, 8, 9, 10), (11, 12, 13, 14, 15), ... számsorban milyen szám áll a 100. zárójelben az első helyen?

Vegyük jobban szemügyre a zárójelek első számait. Ezek a következők: 1, 2, 4, 7, 11, Próbáljunk valamilyen szabályszerűséget megállapítani ebben a számsorban. A felsorolt számok még így is írhatók: 1, 1+1+2, 1+1+2+3, 1+1+2+3+4, ... vagyis még így is írhatók: $1, 1 + \frac{1 \cdot 2}{2}, 1 + \frac{2 \cdot 3}{2}, 1 + \frac{3 \cdot 4}{2}, \dots$. Most már könnyen „leolvasható”, hogy a 100. zárójel első száma $1 + \frac{99 \cdot 100}{2} = 4951$ lesz.

2. példa: Az (1), (3, 5), (7, 9, 11), (13, 15, 17, 19), ... számsorban mennyi a 100. zárójelben levő számok összege?

Ha az előző példa gondolatmeneteit követjük, akkor a zárójelek első számai rendre 1, 3, 7, 13, 21, ... amit még így is írhatunk: 1, 1+1×2, 1+1×2+2×2, 1+1×2+2×2+3×2, 1+1×2+2×2+3×2+4×2, ... Ezek szerint a 100. zárójel első száma $1 + 1 \times 2 + 2 \times 2 + \dots + 99 \times 2 = 1 + 2 \times (1 + 2 + 3 + \dots + 99) = 1 + 2 \times \frac{99 \cdot 100}{2} = 9901$. Továbbá megfigyelhető, hogy minden zárójelben annyi szám van, ahányadik a sorban. Ezért a 100. zárójel elemeinek az összege $(9901+2) + (9901+4) + (9901+6) + \dots + (9901+200) = 1000000$.

Noha megoldottuk a problémát, mégis sajnálattal taksálhatjuk, hogy a 2. példa megoldásának a gondolatmenetét nagyon „megfertőzte” az 1. példa megoldásának a gondolatmenete. Mindamelllett, hogy a 2. példa esetén a számsor már más mint az 1. példa esetén, mégis ragaszkodtunk ahhoz, hogy most is szabályszerűség alapján megállapítsuk a 100. zárójel első számát, aztán ennek alapján kiszámítottuk a szóban forgó összeget.

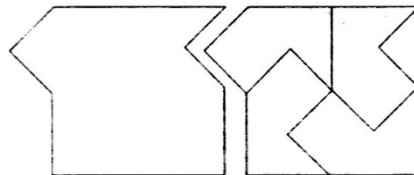
Ez a gondolkodásbeli „fertőzés” nem volt végzetes, mert így is eredményhez jutottunk, de mint látni fogjuk, sokkal bonyolultabban mintha egy nem fertőzött gondolatmenetet követtünk volna. Érdemes megfigyelni, hogy a 2. példa esetén nem a 100. zárójel első elemét kellett meghatározni, hanem a 100. zárójelben levő elemek összegét, tehát

a kérelmek már változtak. Mi ellenben mégis megpróbáltunk az 1. példa mintájára gondolkodni. Ellenben érdemes félretenni az előbbi gondolatmenetet, és az új helyzethez mérten új gondolatmenetet alkalmazni, amit már nem fertőzött az 1. példa megoldásának a gondolat menete.

Természetes, hogy mielőbb vegyük szemügyre a zárójelekben levő számok összegét. Ezek rendre: 1, 8, 27, 64, ... vagyis az $1^3, 2^3, 3^3, 4^3, \dots$ köbszámok sorozatát kapjuk, így nyilvánvaló, hogy a 100. zárójel számainak az összege $100^3 = 1000000$, és ez a megoldás sokkal rövidebb is mint a „fertőzött” megoldás.

Nézzünk egy másik példát, amikor a fertőzés nem két különálló probléma esetén áll elő, hanem egyugyanazon problémán belül.

3. példa: A baloldali ábrát Félix négy egyforma részre szeretne volna felosztani. Hosszas töprengés után ez sikerült is. A jobboldali ábrán látható egy megoldás:



Hogyan tudnád az első ábrát öt egyforma részre felosztani?

Ha azt tartjuk szem előtt, hogy Félix milyen megoldást adott, akkor joggal gondolhatunk arra, hogy az 5 egyforma részre való felosztás a bemutatottnál még bonyolultabb kell legyen. Így amennyiben erre gondolunk, úgy a Félix megoldása máris „megfertőzte” a további gondolkodásunkat.

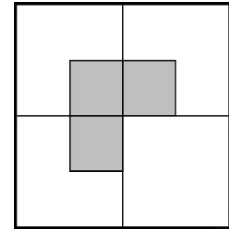
Ha ellenben kíváncsiskodók lettünk volna, akkor felülvizsgáltuk volna Félix megoldását, hogy vajon van-e más, esetleg egyszerűbb megoldása a feladatnak? És bizony van, íme egy természetesebb megoldás, ami a baloldali ábrán látható:



Nos ennek alapján már könnyen rájöhettünk arra, hogy ugyanilyen egyszerű megoldás létezik 5 egyforma részre való darabolás esetén, ahogy az előző jobb ábra mutatja:

Végezetül nézzünk egy másik példát, amelynél a különböző szituációkban végzett gondolatmenetek sorozata fertőző lehet.

4. példa: A mellékelt ábrán egy négyzetet 4 egyenlő részre osztottunk, utána pedig besatíroztunk részeket.



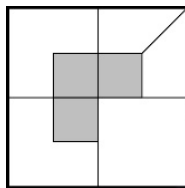
A) a jobb felső fehér részt osszuk fel 2 egyforma alakú részre!

B) a baloldali jobb felső fehér részt osszuk fel 3 egyforma alakú részre!

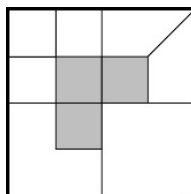
C) a baloldali alsó fehér részt osszuk fel 4 egyforma alakú részre!

D) a jobboldali alsó fehér részt osszuk fel 7 egyforma részre!

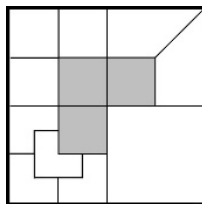
A) A szimmetria miatt nincs gond a két részre való osztással. egy megoldás a következő:



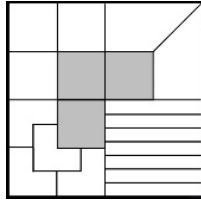
B) A három egyforma részre való felosztás is aránylag könnyen beugrik. Egy megoldás a következő:



C) A négy egyforma részre való felosztás már komplexebb. Egy megoldás a következő:



D) Marad tehát, hogy megválaszoljuk az utolsó kérdést. Az előző három megoldást követve, ezek alapján az lehet az érzésünk, hogy ezek a megoldások egyre komplexebbek, így az utolsó megoldás az előbbieknél még komplexebb kell legyen. Akinek nincs megoldási ötlete, vagy az előbbi véleményre hajlamos, annak a gondolkodását már "megfertőzte" az első három megoldás. Ezt azért állítjuk, mert a negyedik esetben a feltételek már megváltoztak, és így a megoldás komplexitása nem szükségszerű, hiszen a negyedik négyzetben már nincsen besatírozott négyzet mint az előző háromban, így nincs ami „bezavarjon” a felosztásokban. Emiatt nem kellene ugyanúgy gondolkodnunk, mint az előbbieken. Egy nagyon egyszerű és természetes megoldás a hét részre osztással a következő:



A végső konklúziókat levonva leszögezhetjük, hogy a gondolkodás „fertőzés” kiváltképpen az analógiás- indukciós gondolkodási műveletvégzéseknél áll fenn, amikor is hajlamosak lehetünk bizonyos, analógnak tűnő gondolatmeneteket alkalmazni olyan esetekben is amikor a feltételek, körülmények között már nem áll fenn hasonlóság. Ilyen esetekből származnak a hamis analógiák is.