



Mesterséges
Intelligencia

Csató Lehel

Mesterséges Intelligencia

Csató Lehel

Matematika-Informatika Tanszék
Babeş–Bolyai Tudományegyetem, Kolozsvár

2007/2008



Az Előadások Témái

Mesterséges
Intelligencia

6

Csató Lehel

Jatekelmelet

Kétszemélyes játékok

NIM

Tic-Tac-Toe

Nyero Strat.

Strat. keresés

Null-összegű játékok

Neumann minimax tétele

Minimax algoritmus

Negamax algoritmus

Alfabéta

Játékprogramok

Összefoglaló

Példa

- Bevezető: mi a *mesterséges* intelligencia ...
- „Tudás”-reprezentáció
- Gráfkeresési stratégiák
- Szemantikus hálók / Keretrendszerek
- **Játékok modellezése**
- Bizonytalanság kezelése
- Grafikus modellek
- Tanuló rendszerek
- Szimulált kifűtés, Genetikus algoritmusok
- Neurális hálók
- Gépi tanulás
- Nemparametrikus módszerek



Mesterséges
Intelligencia

6

Csató Lehel

Játékelmélet

Kétszemélyes játékok

NIM

Tic-Tac-Toe

Nyero Strat.

Strat. keresés

Null-összegű játékok

Neumann minimax tétele

Minimax algoritmus

Negamax algoritmus

Alfabeta

Játékprogramok

Összefoglaló

Példa

Előadások honlapja

<http://www.cs.ubbcluj.ro/~csatol/mestint>

Vizsga

Szóbeli (60%) + Gyakorlat (40%)
(v) Előadás (60%)

Laborgyakorlatok:

- 1 Clean vagy Prolog - dedukciós algoritmus **30%**
- 2 C / C++ / C# / ... - genetikus algoritmus **10% vagy**
- 3 Matlab - Neurális hálózatok vagy SVM **10%**



Mesterséges
Intelligencia

6

Csató Lehel

Játékelmélet

Kétszemélyes játékok

NIM

Tic-Tac-Toe

Nyero Strat.

Strat. keresés

Null-összegű játékok

Neumann minimax tétele

Minimax algoritmus

Negamax algoritmus

Alfabéta

Játékprogramok

Összefoglaló

Példa

... *problems arising when we try to plan ahead in presence of hostile agents ...*

Russell&Norvig, pp. 122

- Babbage (1846) - gépet tervez, mely Tic-tac-toe-t játszik,
- Leonardo Torres y Quevedo (1890) - sakk végjáték,
- von Neumann & Morgenstern (1944) - *Theory of games and Economic Behaviour*
- Shannon és Turing (1950) - sakkprogram, **mert**
 - 1 „intelligencia” szükséges a játékhoz,
 - 2 egyszerű szabályok,
 - 3 teljes informáltság,
- McCarthy (1956) - vágások.



Játékok és keresés

Mesterséges
Intelligencia

6

Csató Lehel

Játékelmélet

Kétszemélyes játékok

NIM

Tic-Tac-Toe

Nyero Strat.

Strat. keresés

Null-összegű játékok

Neumann minimax tétele

Minimax algoritmus

Negamax algoritmus

Alfabetá

Játékprogramok

Összefoglaló

Példa

„Ismeretlen” ellenfél:

- Nem ismerjük a lépéseit,
- Feltételezzük, hogy nyerni akar.

Válasz: egy **stratégia**, mely az ellenfél minden lehetséges lépését figyelembe veszi.

Sakk-program esetében: nincs lehetőség az **összes** lehetőség vizsgálatára \Rightarrow szükségesek a közelítések.

Mit közelítünk?



Játékok típusai

Mesterséges
Intelligencia

6

Csató Lehel

Játékelmélet

Kétszemélyes játékok

NIM

Tic-Tac-Toe

Nyero Strat.

Strat. keresés

Null-összegű játékok

Neumann minimax tétele

Minimax algoritmus

Negamax algoritmus

Alfabeta

Játékprogramok

Összefoglaló

Példa

	determinisztikus	valószínűségi
Teljes információs	sakk, go	Dáma, Monopoly
Részleges információs	battleship	bridge, póker

?? Kupaos játék - Maya.



Mesterséges
Intelligencia

6

Csató Lehel

Játékelmélet

Kétszemélyes játékok

NIM

Tic-Tac-Toe

Nyero Strat.

Strat. keresés

Null-összegű játékok

Neumann minimax tétele

Minimax algoritmus

Negamax algoritmus

Alfabéta

Játékprogramok

Összefoglaló

Példa

Kétszemélyes teljes információs játékok:

- két játékos lép felváltva, **adott** szabályok szerint;
- a játékosok minden információval rendelkeznek;
- minden állapotban véges számú lépés létezik;
- véges a játszma ideje;
- az egyik játékos mindig nyer (esetenként lehetséges döntetlen...)

Ezzel a játékoszályal foglalkozunk.



Mesterséges
Intelligencia

6

Csató Lehel

Játékelmélet

Kétszemélyes játékok

NIM

Tic-Tac-Toe

Nyero Strat.

Strat. keresés

Null-összegű játékok

Neumann minimax tétele

Minimax algoritmus

Negamax algoritmus

Alfabéta

Játékprogramok

Összefoglaló

Példa

Formális definíció:

- Két játékos, legyen *MAX* illetve *MIN*;
- *MAX* kezd;
- ismert kezdőállapot;
- műveletek, melyek leírják a lehetséges lépéseket;
- játék végének a tesztje;
- nyereség-függvény;

Stratégia: szabály az egyik – *MAX* – játékos optimális lépéseinek megadására.



Nim játék

Mesterséges
Intelligencia

6

Csató Lehel

Játékelmélet

Kétszemélyes játékok

NIM

Tic-Tac-Toe

Nyero Strat.

Strat. keresés

Null-összegű játékok

Neumann minimax tétele

Minimax algoritmus

Negamax algoritmus

Alfabetá

Játékprogramok

Összefoglaló

Példa

Nim = „nip” + „muster”

Játék:

- gyufaszálak több sorban; m
- adott gyufaszál minden sorban; $[n_1, \dots, n_m]$
- lépés = **egy** sorból i
valahány gyufaszál elvétele; $0 \leq n'_i < n_i$
- játék vége: elfogynak a gyufaszálak; $\forall i; n_i = 0$
- veszít az a játékos, mely már nem tud gyufaszálat felvenni.

Változatok: vesztes az utolsó gyufaszálat felvevő; nem lehet tetszőleges számú elemet felvenni, *etc.*



Nim játék

Mesterséges
Intelligencia

6

Csató Lehel

Játékelmélet

Kétszemélyes játékok

NIM

Tic-Tac-Toe

Nyero Strat.

Strat. keresés

Null-összegű játékok

Neumann minimax tétele

Minimax algoritmus

Negamax algoritmus

Alfabéta

Játékprogramok

Összefoglaló

Példa

A játék állásai:

- **Nyerő** – ha a játékos tud úgy lépni, hogy az ellenfél lépéseitől függetlenül nyer;
- **Vesztő** – ha **nincs nyerő lépés**.

Nyerő stratégia:

$$\begin{array}{cccccc} 0 & 0 & 1 & 1 & = & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & = & 5 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & = & 8 \\ \hline 1 & 1 & 1 & 0 & & (XOR) \end{array}$$



Állítás: azon állások vesztek, melyekre az **XOR** csupa nullát eredményez.



Nim játék tulajdonságai

Mesterséges
Intelligencia

6

Csató Lehel

Játékelmélet

Kétszemélyes játékok

NIM

Tic-Tac-Toe

Nyero Strat.

Strat. keresés

Null-összegű játékok

Neumann minimax tétele

Minimax algoritmus

Negamax algoritmus

Alfabetá

Játékprogramok

Összefoglaló

Példa

Állítás: azon állások vesztek, melyekre az **XOR** csupa nullát eredményez.

1. Lemma

Ha egy állásban az **XOR** nem csupa nullát eredményez, akkor van lépés, mely az **XOR** szerint nullát eredményez.

2. Lemma

Ha egy állapotban az **XOR** csupa nulla, akkor nincs lépés, mely eredményeként az **XOR** nulla lesz.

Nyerő stratégia

Ha **XOR** nem nulla, akkor le tudjuk nullázni és az ellenfél nem tud olyan lépni, hogy számunkra megint nulla legyen.

⇒ **nyerő stratégia.**



Nim játék tulajdonságai

Mesterséges
Intelligencia

6

Csató Lehel

Játékelmélet

Kétszemélyes játékok

NIM

Tic-Tac-Toe

Nyero Strat.

Strat. keresés

Null-összegű játékok

Neumann minimax tétele

Minimax algoritmus

Negamax algoritmus

Alfabeta

Játékprogramok

Összefoglaló

Példa

Állítás: azon állások vesztek, melyekre az **XOR** csupa nullát eredményez.

1. Lemma

Ha egy állásban az **XOR** nem csupa nullát eredményez, akkor van lépés, mely az **XOR** szerint nullát eredményez.

2. Lemma

Ha egy állapotban az **XOR** csupa nulla, akkor **nincs** lépés, mely eredményeként az **XOR** nulla lesz.

Nyerő stratégia

Ha **XOR** nem nulla, akkor le tudjuk nullázni **és** az ellenfél nem tud olyan lépni, hogy számunkra megint nulla legyen.

⇒ **nyerő stratégia.**



Nim játék tulajdonságai

Mesterséges
Intelligencia

6

Csató Lehel

Játékelmélet

Kétszemélyes játékok

NIM

Tic-Tac-Toe

Nyero Strat.

Strat. keresés

Null-összegű játékok

Neumann minimax tétele

Minimax algoritmus

Negamax algoritmus

Alfabetá

Játékprogramok

Összefoglaló

Példa

Állítás: azon állások vesztek, melyekre az **XOR** csupa nullát eredményez.

1. Lemma

Ha egy állásban az **XOR** nem csupa nullát eredményez, akkor van lépés, mely az **XOR** szerint nullát eredményez.

2. Lemma

Ha egy állapotban az **XOR** csupa nulla, akkor nincs lépés, mely eredményeként az **XOR** nulla lesz.

Nyerő stratégia

Ha **XOR** nem nulla, akkor le tudjuk nullázni **és** az ellenfél nem tud olyat lépni, hogy számunkra megint nulla legyen.

⇒ **nyerő stratégia.**



Nim játék példa

Mesterséges
Intelligencia

6

Csató Lehel

Játékelmélet

Kétszemélyes játékok

NIM

Tic-Tac-Toe

Nyero Strat.

Strat. keresés

Null-összegű játékok

Neumann minimax tétele

Minimax algoritmus

Negamax algoritmus

Alfabeta

Játékprogramok

Összefoglaló

Példa

Kezdeti állapot:

$$\begin{array}{rccccrcr} 0 & 0 & 1 & 1 & = & 3 & \\ 0 & 1 & 0 & 1 & = & 5 & \\ 1 & 0 & 0 & 0 & = & 8 & \\ \hline 1 & 1 & 1 & 0 & & (XOR) & \end{array}$$



Válasszuk az utolsó (8 elemes) sort.
Ahhoz, hogy mindenhol 0 legyen

$$0 \quad 1 \quad 1 \quad 0 = 6$$



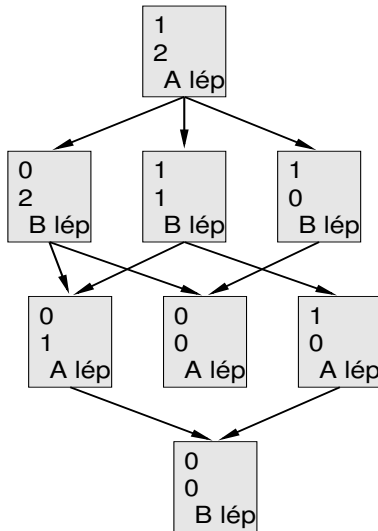
kell maradjon, tehát 2 elemet kell elvenni.

Az új pozíció **vesztes**.

- játék gráfja véges mélységű;

Nyerő stratégia:

- mindig van legalább egy olyan lépés, melyből győzni tud;
- függetlenül attól, hogy az ellenfél mit lép;





Tic-Tac-Toe – amőba

Mesterséges
Intelligencia

6

Csató Lehel

Játékelmélet

Kétszemélyes játékok

NIM

Tic-Tac-Toe

Nyero Strat.

Strat. keresés

Null-összegű játékok

Neumann minimax tétele

Minimax algoritmus

Negamax algoritmus

Alfabéta

Játékprogramok

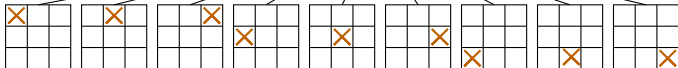
Összefoglaló

Példa

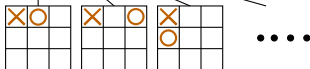
MAX(X)



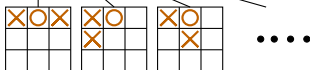
MIN(O)



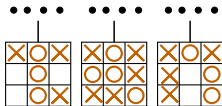
MAX(X)



MIN(O)



Vég



Jutalom: -1 0 1

A játék gráfja

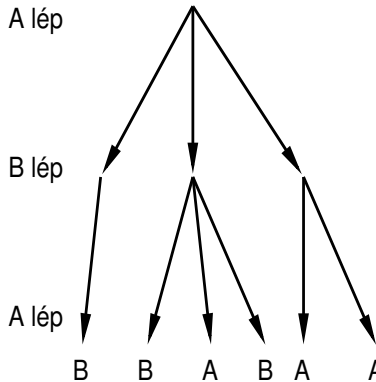
Tétel

Egy teljes információjú kétszemélyes játék esetén mindig létezik egy játékos számára nyerő stratégia (ha a játék nem végződik döntetlennel).

Bizonyítás:

Az élek címkézése letről felfele. Ha **B lép**,

- \exists ág, mely **B**-vel van címkézve, akkor **B**,
- ellenkező esetben **A**.





Stratégiák keresése

Mesterséges
Intelligencia

6

Csató Lehel

Jatekelmelet

Kétszemélyes játékok

NIM

Tic-Tac-Toe

Nyero Strat.

Strat. keresés

Null-összegű játékok

Neumann minimax tétele

Minimax algoritmus

Negamax algoritmus

Alfabéta

Játékprogramok

Összefoglaló

Példa

- Stratégia nem kereshető mert a teljes gráf nem fér el a memóriában;
- túl sok állapot.
- Sakk:
 - ≈ 45 lépés tehát 90 mélységű fa,
 - ≈ 35 lehetőség;
 - $35^{90} = 10^{139}$ levél. 10^{80} összes elektron
- Deep Blue – $32CPU \times 8$ dedikált sakk-processzor (13-30 mélységig; 30 milliárd lépés/perc)



Minimax algoritmus

Mesterséges
Intelligencia

6

Csató Lehel

Játékelmélet

Kétszemélyes játékok

NIM

Tic-Tac-Toe

Nyero Strat.

Strat. keresés

Null-összegű játékok

Neumann minimax tétele

Minimax algoritmus

Negamax algoritmus

Alfabéta

Játékprogramok

Összefoglaló

Példa

Minimax algoritmus:

- bonyolultabb játékok esetén használják;
- nem építhető meg a teljes játékfa;
- **nem talál biztosan nyerő** stratégiát;
- „erős” vagy „elég jó” lépés;

Neumann János **MINIMAX** tétele - **nulla-összegű játékokra.**



Stratégia nulla-összegű játékokban

Mesterséges
Intelligencia

6

Csató Lehel

Játékelmélet

Kétszemélyes játékok

NIM

Tic-Tac-Toe

Nyero Strat.

Strat. keresés

Null-összegű játékok

Neumann minimax tétele

Minimax algoritmus

Negamax algoritmus

Alfabeta

Játékprogramok

Összefoglaló

Példa

Stratégia: szabályrendszer, mely előírja, hogy egy játékos mit kell lépjen.

Két játékos, mindegyiknek van valahány stratégiája, melyek közül választhat ($A - 3$, illetve $B - 4$).

Nyereségmátrix az A számára; veszteség B-nek.

	B.1	B.2	B.3	B.4
A.1	-1	3	2	9
A.2	5	4	-2	6
A.3	8	-2	6	-2

? Ha A nem tudja, hogy B mit fog lépni, melyik a legjobb lépés?



Minimax tulajdonság

Mesterséges
Intelligencia

6

Csató Lehel

Játékelmélet

Kétszemélyes játékok

NIM

Tic-Tac-Toe

Nyero Strat.

Strat. keresés

Null-összegű játékok

Neumann minimax tétele

Minimax algoritmus

Negamax algoritmus

Alfabéta

Játékprogramok

Összefoglaló

Példa

Nyereségmátrix:

-1	3	2	9
5	4	-2	6
8	-2	6	-2

Azon stratégiát válassza, mely a **legkisebb nyereségek maximumát** adja.

Minimax játékos:

$$\max_i \left(\min_j M_{ij} \right) \leq \min_j \left(\max_i M_{ij} \right)$$

azaz: az **A** biztosan **legalább** annyit nyer.



Minimax tétel

Mesterséges
Intelligencia

6

Csató Lehel

Jatekelmelet

Kétszemélyes játékok

NIM

Tic-Tac-Toe

Nyero Strat.

Strat. keresés

Null-összegű játékok

Neumann minimax tétele

Minimax algoritmus

Negamax algoritmus

Alfabeta

Játékprogramok

Összefoglaló

Példa

$$\max_i \left(\min_j M_{ij} \right) \leq \min_j \left(\max_i M_{ij} \right)$$

Neumann minimax tétele

Minden nulla-összegű játék esetén létezik egy olyan keveréke a stratégiáknak, mely **minimax tulajdonsággal** rendelkezik.

Bizonyítás:

$$\mathbf{x} = [x_1, \dots, x_n] \in \Pi_n \quad \mathbf{y} \in \Pi_m$$

Átlagnyereség: $\mathbf{x}^T \mathbf{M} \mathbf{y}$

$$\max_{\mathbf{x} \in \Pi_n} \min_{\mathbf{m} \in \Pi_m} \mathbf{x}^T \mathbf{M} \mathbf{y} = \underbrace{V = \bar{V}} = \min_{\mathbf{m} \in \Pi_m} \max_{\mathbf{x} \in \Pi_n} \mathbf{x}^T \mathbf{M} \mathbf{y}$$

teljes biz. Finta - operációs kutatások



Minimax tétel

Mesterséges
Intelligencia

6

Csató Lehel

Játékelmélet

Kétszemélyes játékok

NIM

Tic-Tac-Toe

Nyero Strat.

Strat. keresés

Null-összegű játékok

Neumann minimax tétele

Minimax algoritmus

Negamax algoritmus

Alfabeta

Játékprogramok

Összefoglaló

Példa

$$\max_i \left(\min_j M_{ij} \right) \leq \min_j \left(\max_i M_{ij} \right)$$

Neumann minimax tétele

Minden nulla-összegű játék esetén létezik egy olyan keveréke a stratégiáknak, mely **minimax tulajdonsággal** rendelkezik.

Bizonyítás:

$$\mathbf{x} = [x_1, \dots, x_n] \in \Pi_n \quad \mathbf{y} \in \Pi_m$$

Átlagnyereség: $\mathbf{x}^T \mathbf{M} \mathbf{y}$

$$\max_{\mathbf{x} \in \Pi_n} \min_{\mathbf{m} \in \Pi_m} \mathbf{x}^T \mathbf{M} \mathbf{y} = \underbrace{V = \bar{V}} = \min_{\mathbf{m} \in \Pi_m} \max_{\mathbf{x} \in \Pi_n} \mathbf{x}^T \mathbf{M} \mathbf{y}$$

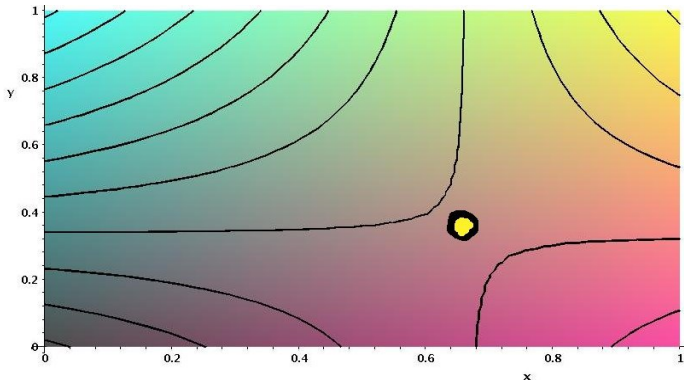
teljes biz. Finta - operációs kutatások

Példa:

0	1
2	0

 Arányokkal: $\begin{bmatrix} x \\ 1-x \end{bmatrix}^T M \begin{bmatrix} y \\ 1-y \end{bmatrix}$

XMAPLE KÓD



A nyeresége maximális, ha **2/3** valószínűséggel az első, **1/3**-dal a második stratégia szerint játszik.



Olló – papír – kő

Mesterséges
Intelligencia

6

Csató Lehel

Játékelmélet

Kétszemélyes játékok

NIM

Tic-Tac-Toe

Nyero Strat.

Strat. keresés

Null-összegű játékok

Neumann minimax tétele

Minimax algoritmus

Negamax algoritmus

Alfabéta

Játékprogramok

Összefoglaló

Példa

Szabályok:

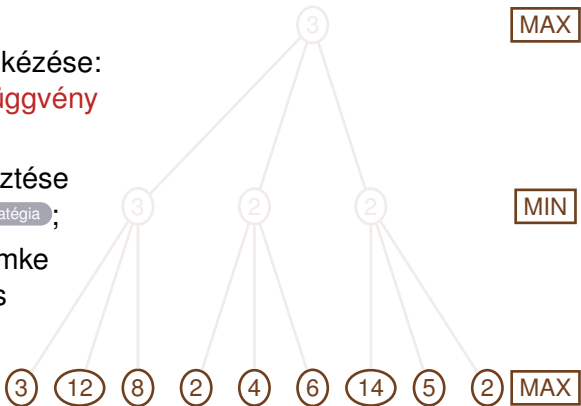
- két játékos játszik
- egyszerre mutatnak egy ...
 - papírt
 - követ
 - ollót
- **papír:** becsomagolja a követ;
- **kő:** kicsorbítja az ollót;
- **olló:** elvágja a papírt

0	1	-1
-1	0	1
1	-1	0

Teljes szimmetria \Rightarrow nincs optimális stratégia.

„Optimális” kevert stratégia: $[1/3, 1/3, 1/3]$.

- Játékfa építése adott mélységig;
- Levelek címkézése: **kiértékelő függvény**
- Értékek visszaterjesztése lásd [▶ Nyero stratégia](#) ;
- A gyökér-címke értékű lépés megtétele;





Minimax algoritmus játékfákon

Mesterséges
Intelligencia

6

Csató Lehel

Játékelmélet

Kétszemélyes játékok

NIM

Tic-Tac-Toe

Nyero Strat.

Strat. keresés

Null-összegű játékok

Neumann minimax tétele

Minimax algoritmus

Negamax algoritmus

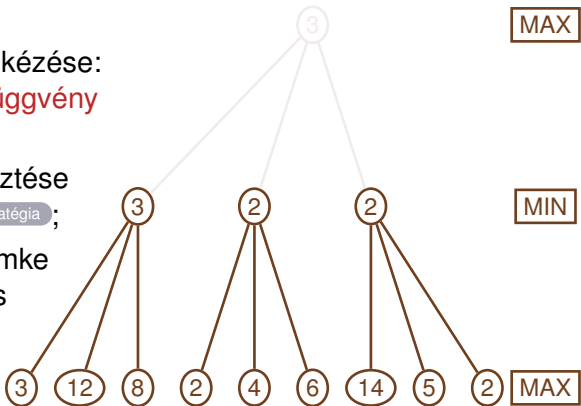
Alfabéta

Játékprogramok

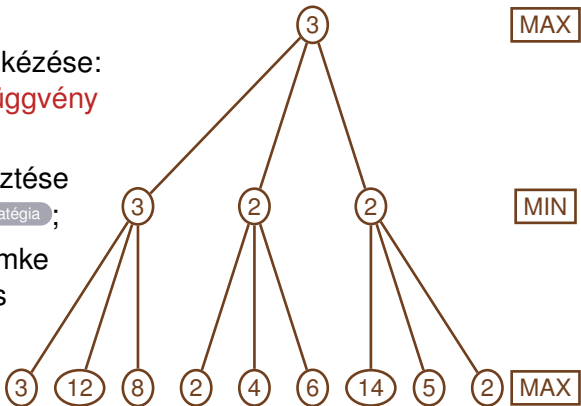
Összefoglaló

Példa

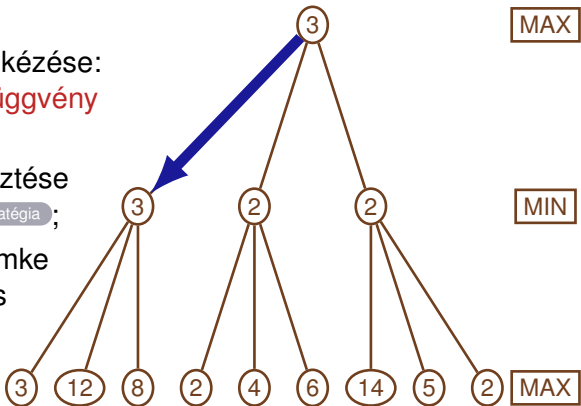
- Játékfa építése adott mélységig;
- Levelek címkézése: **kiértékelő függvény**
- Értékek visszaterjesztése lásd [▶ Nyero stratégia](#) ;
- A gyökér-címke értékű lépés megtétele;



- Játékfa építése adott mélységig;
- Levelek címkézése: **kiértékelő függvény**
- Értékek visszaterjesztése lásd [▶ Nyero stratégia](#) ;
- A gyökér-címke értékű lépés megtétele;



- Játékfa építése adott mélységig;
- Levelek címkézése: **kiértékelő függvény**
- Értékek visszaterjesztése lásd ▶ Nyero stratégia ;
- A gyökér-címke értékű lépés megtétele;





Negamax algoritmus

Mesterséges
Intelligencia

6

Csató Lehel

Játékelmélet

Kétszemélyes játékok

NIM

Tic-Tac-Toe

Nyero Strat.

Strat. keresés

Null-összegű játékok

Neumann minimax tétele

Minimax algoritmus

Negamax algoritmus

Alfabéta

Játékprogramok

Összefoglaló

Példa

- A **minimax** algoritmusnál a különböző játékosok lépéseinél minimumot vagy maximumot kerestünk;
- A **negamax** algoritmus egyesíti a kétfajta optimális lépést:
 - minden lépésben maximumot számol,
 - ellenben az előző szint **negált** értékei szerint.
 - a javasolt lépés a csúcs negált értékű utódjába történő lépés;



Negamax algoritmus működése

Mesterséges
Intelligencia

6

Csató Lehel

Játékelmélet

Kétszemélyes játékok

NIM

Tic-Tac-Toe

Nyero Strat.

Strat. keresés

Null-összegű játékok

Neumann minimax tétele

Minimax algoritmus

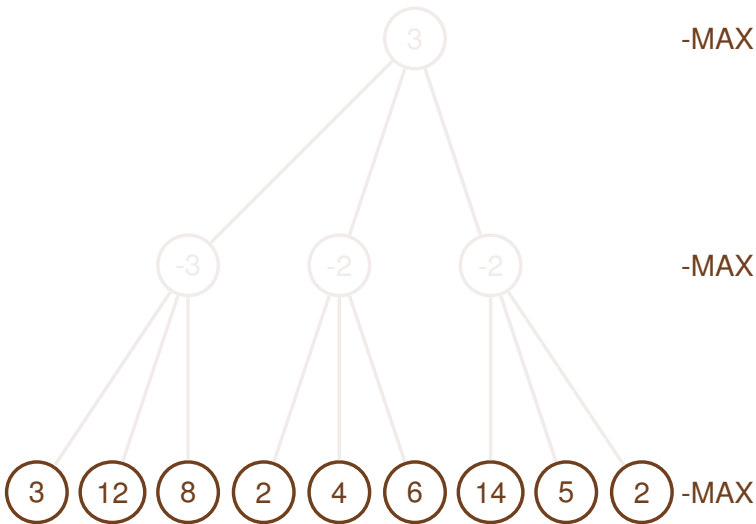
Negamax algoritmus

Alfabeta

Játékprogramok

Összefoglaló

Példa





Negamax algoritmus működése

Mesterséges
Intelligencia

6

Csató Lehel

Játékelmélet

Kétszemélyes játékok

NIM

Tic-Tac-Toe

Nyero Strat.

Strat. keresés

Null-összegű játékok

Neumann minimax tétele

Minimax algoritmus

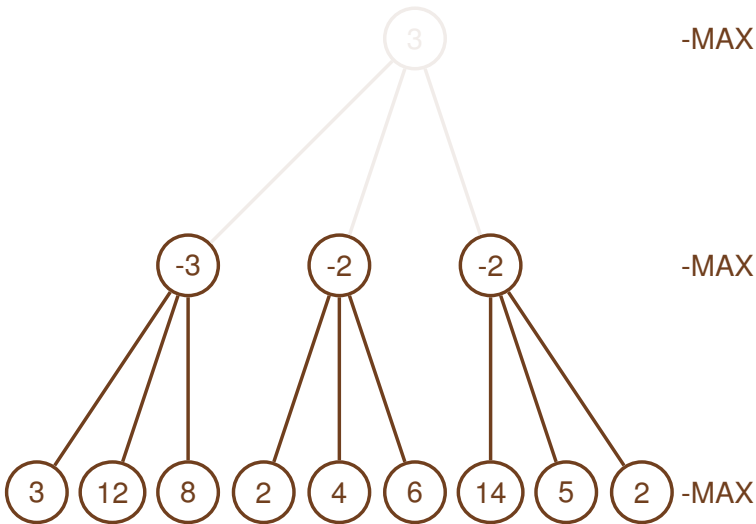
Negamax algoritmus

Alfabeta

Játékprogramok

Összefoglaló

Példa





Negamax algoritmus működése

Mesterséges
Intelligencia

6

Csató Lehel

Játékelmélet

Kétszemélyes játékok

NIM

Tic-Tac-Toe

Nyero Strat.

Strat. keresés

Null-összegű játékok

Neumann minimax tétele

Minimax algoritmus

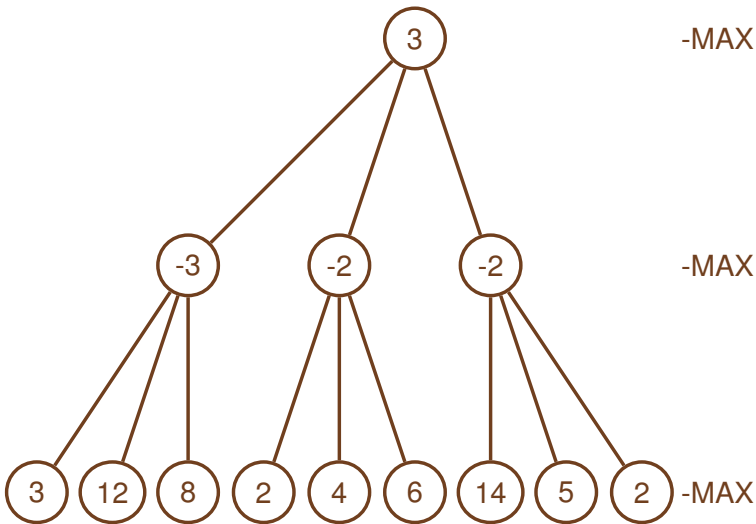
Negamax algoritmus

Alfabeta

Játékprogramok

Összefoglaló

Példa





Negamax algoritmus működése

Mesterséges
Intelligencia

6

Csató Lehel

Játékelmélet

Kétszemélyes játékok

NIM

Tic-Tac-Toe

Nyero Strat.

Strat. keresés

Null-összegű játékok

Neumann minimax tétele

Minimax algoritmus

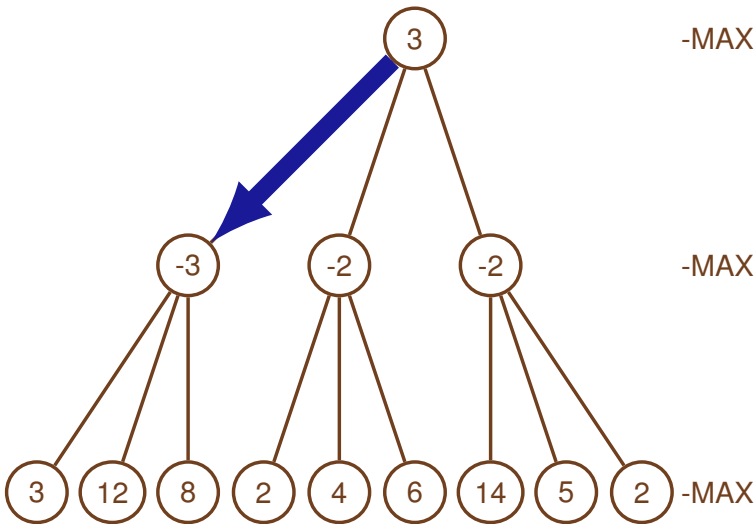
Negamax algoritmus

Alfabeta

Játékprogramok

Összefoglaló

Példa





Minimax/Negamax tulajdonságok

Mesterséges
Intelligencia

6

Csató Lehel

Jatekelmelet

Kétszemélyes játékok

NIM

Tic-Tac-Toe

Nyero Strat.

Strat. keresés

Null-összegű játékok

Neumann minimax tétele

Minimax algoritmus

Negamax algoritmus

Alfabeta

Játékprogramok

Összefoglaló

Példa

Tulajdonságok:

- Teljesség – megtalálja az optimális lépést, ha ilyen létezik?

Ha a játékfa véges.

igen

- Optimalitás – a legjobb lépést találja meg?

Igen, ha a játékfa véges.

- Bonyolultság: $\mathcal{O}(b^m)$ kimenő élek – b
kiértékelés mélysége – m

- Memóriaigény: $\mathcal{O}(bm)$

Sakk-program: $b \approx 35$, $m \approx 100, \Rightarrow 35^{90}$

$35^{90} = 10^{139}$ levél v.ö: 10^{80} összes elektron

Hatékonyság növelése: VÁGÁSOK



Minimax/Negamax tulajdonságok

Mesterséges
Intelligencia

6

Csató Lehel

Játékelmélet

Kétszemélyes játékok

NIM

Tic-Tac-Toe

Nyero Strat.

Strat. keresés

Null-összegű játékok

Neumann minimax tétele

Minimax algoritmus

Negamax algoritmus

Alfabeta

Játékprogramok

Összefoglaló

Példa

Tulajdonságok:

- Teljesség – megtalálja az optimális lépést, ha ilyen létezik?

Ha a játékfa véges.

igen

- Optimalitás – a legjobb lépést találja meg?

Ha az ellenfél is racionális.

igen

- Bonyolultság: $\mathcal{O}(b^m)$ kimenő élek – b
kiértékelés mélysége – m

- Memóriaigény: $\mathcal{O}(bm)$

Sakk-program: $b \approx 35$, $m \approx 100$, $\Rightarrow 35^{90}$

$35^{90} = 10^{139}$ levél v.ö: 10^{80} összes elektron

Hatékonyság növelése: VÁGÁSOK



Minimax/Negamax tulajdonságok

Mesterséges
Intelligencia

6

Csató Lehel

Jatekelmelet

Kétszemélyes játékok

NIM

Tic-Tac-Toe

Nyero Strat.

Strat. keresés

Null-összegű játékok

Neumann minimax tétele

Minimax algoritmus

Negamax algoritmus

Alfabéta

Játékprogramok

Összefoglaló

Példa

Tulajdonságok:

- Teljesség – megtalálja az optimális lépést, ha ilyen létezik?
Ha a játékfa véges. igen
- Optimalitás – a legjobb lépést találja meg?
Ha az ellenfél is racionális. igen
- Bonyolultság: $\mathcal{O}(b^m)$ kimenő élek – b
kiértékelés mélysége – m
- Memóriaigény: $\mathcal{O}(bm)$

Sakk-program: $b \approx 35$, $m \approx 100$, $\Rightarrow 35^{90}$

$35^{90} = 10^{139}$ levél v.ő: 10^{80} összes elektron

Hatékonyság növelése: VÁGÁSOK



Minimax/Negamax tulajdonságok

Mesterséges
Intelligencia

6

Csató Lehel

Jatekelmelet

Kétszemélyes játékok

NIM

Tic-Tac-Toe

Nyero Strat.

Strat. keresés

Null-összegű játékok

Neumann minimax tétele

Minimax algoritmus

Negamax algoritmus

Alfabéta

Játékprogramok

Összefoglaló

Példa

Tulajdonságok:

- Teljesség – megtalálja az optimális lépést, ha ilyen létezik?
Ha a játékfa véges. igen
- Optimalitás – a legjobb lépést találja meg?
Ha az ellenfél is racionális. igen
- Bonyolultság: $\mathcal{O}(b^m)$ kimenő élek – b
kiértékelés mélysége – m
- Memóriaigény: $\mathcal{O}(bm)$

Sakk-program: $b \approx 35$, $m \approx 100$, $\Rightarrow 35^{90}$
 $35^{90} = 10^{139}$ levél v.ö: 10^{80} összes elektron

Hatékonyság növelése: VÁGÁSOK



Minimax/Negamax tulajdonságok

Mesterséges
Intelligencia

6

Csató Lehel

Játékelmélet

Kétszemélyes játékok

NIM

Tic-Tac-Toe

Nyero Strat.

Strat. keresés

Null-összegű játékok

Neumann minimax tétele

Minimax algoritmus

Negamax algoritmus

Alfabeta

Játékprogramok

Összefoglaló

Példa

Tulajdonságok:

- Teljesség – megtalálja az optimális lépést, ha ilyen létezik?
Ha a játékfa véges. igen
- Optimalitás – a legjobb lépést találja meg?
Ha az ellenfél is racionális. igen
- Bonyolultság: $\mathcal{O}(b^m)$ kimenő élek – b
kiértékelés mélysége – m
- Memóriaigény: $\mathcal{O}(bm)$

Sakk-program: $b \approx 35$, $m \approx 100$, $\Rightarrow 35^{90}$

$35^{90} = 10^{139}$ levél v.ö: 10^{80} összes elektron

Hatékonyság növelése: VÁGÁSOK



Minimax/Negamax tulajdonságok

Mesterséges
Intelligencia

6

Csató Lehel

Játékelmélet

Kétszemélyes játékok

NIM

Tic-Tac-Toe

Nyero Strat.

Strat. keresés

Null-összegű játékok

Neumann minimax tétele

Minimax algoritmus

Negamax algoritmus

Alfabeta

Játékprogramok

Összefoglaló

Példa

Tulajdonságok:

- Teljesség – megtalálja az optimális lépést, ha ilyen létezik?
Ha a játékfa véges. igen
- Optimalitás – a legjobb lépést találja meg?
Ha az ellenfél is racionális. igen
- Bonyolultság: $\mathcal{O}(b^m)$ kimenő élek – b
kiértékelés mélysége – m
- Memóriaigény: $\mathcal{O}(bm)$

Sakk-program: $b \approx 35$, $m \approx 100$, $\Rightarrow 35^{90}$
 $35^{90} = 10^{139}$ levél v.ö: 10^{80} **összes elektron**

Hatékonyság növelése: VÁGÁSOK



- **Minimax/negamax algoritmus költséges** mert nagyon sok csúcsot kell generálni; azonban
- **Tudjuk**, hogy az értékelés a **minimax** szabály szerint történik;
- Az **alfa-béta** vágások módszere figyelembe veszi a már kiszámított csúcsok értékét (McCarthy 1956 – sakk)
- és **csak** olyan csúcsokat **nem** értékel ki, ahova racionális játék során eljutunk.

Kiértékelés során bevezetett változók:

α – **MAX** szint utódjainak maximuma;
csak növekedhet.

β – **MIN** szint utódjainak minimuma;
csak csökkenhet.



Vágás: művelet, melynek eredményeként **nem** értékeljük ki egy csúcshoz tartozó többi utódcsúcsot.

Vágási kritériumok:

- **MIN** csúcs alatt vágunk, ha az egyik őséhez rendelt α érték nagyobb, mint a csúcs β értéke. **alfa vágás**
- **MAX** csúcs alatt vágunk, ha az egyik őséhez rendelt β érték kisebb, mint a csúcs α értéke. **béta vágás**

Egy kiértékelést abba lehet hagyni, ha:

$$\alpha \geq \beta$$



Alfa-béta vágás – példa

Mesterséges
Intelligencia

6

Csató Lehel

Játékelmélet

Kétszemélyes játékok

NIM

Tic-Tac-Toe

Nyero Strat.

Strat. keresés

Null-összegű játékok

Neumann minimax tétele

Minimax algoritmus

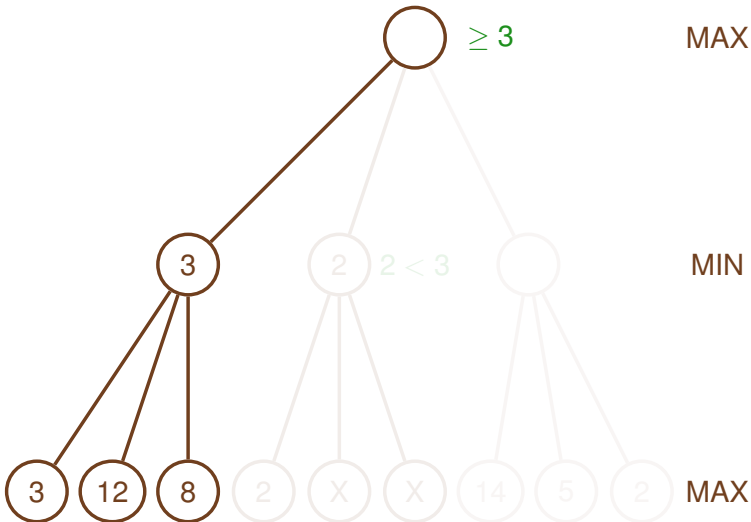
Negamax algoritmus

Alfabéta

Játékprogramok

Összefoglaló

Példa





Alfa-béta vágás – példa

Mesterséges
Intelligencia

6

Csató Lehel

Játékelmélet

Kétszemélyes játékok

NIM

Tic-Tac-Toe

Nyero Strat.

Strat. keresés

Null-összegű játékok

Neumann minimax tétele

Minimax algoritmus

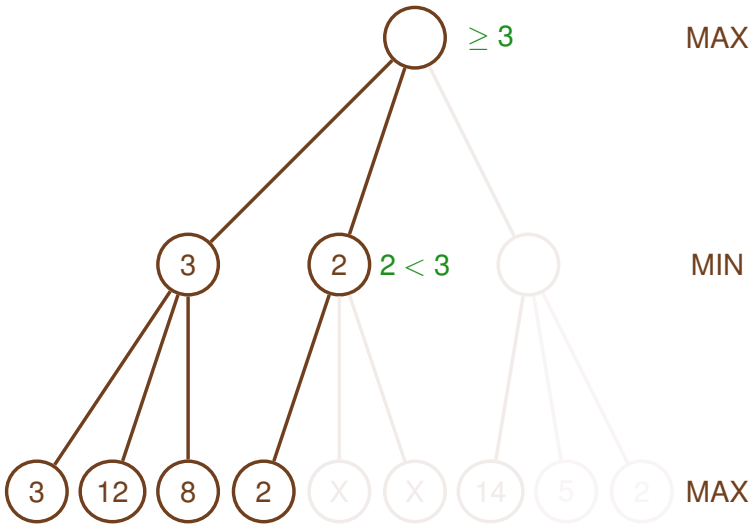
Negamax algoritmus

Alfabéta

Játékprogramok

Összefoglaló

Példa





Alfa-béta vágás – példa

Mesterséges
Intelligencia

6

Csató Lehel

Játékelmélet

Kétszemélyes játékok

NIM

Tic-Tac-Toe

Nyero Strat.

Strat. keresés

Null-összegű játékok

Neumann minimax tétele

Minimax algoritmus

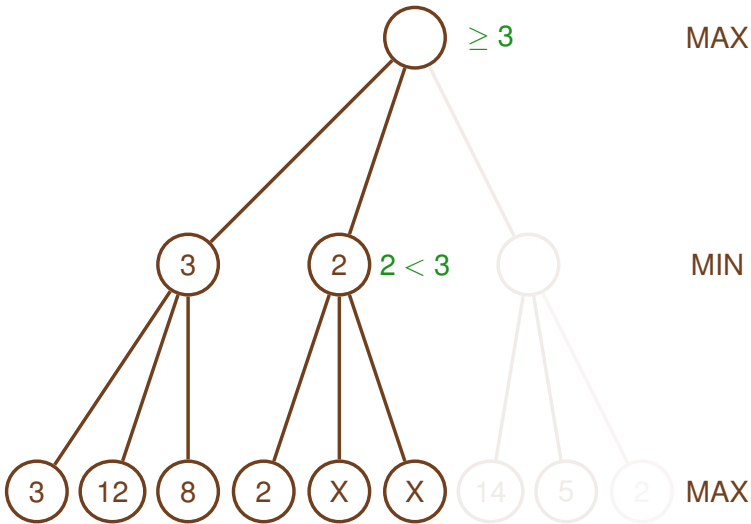
Negamax algoritmus

Alfabéta

Játékprogramok

Összefoglaló

Példa





Alfa-béta vágás – példa

Mesterséges
Intelligencia

6

Csató Lehel

Játékelmélet

Kétszemélyes játékok

NIM

Tic-Tac-Toe

Nyero Strat.

Strat. keresés

Null-összegű játékok

Neumann minimax tétele

Minimax algoritmus

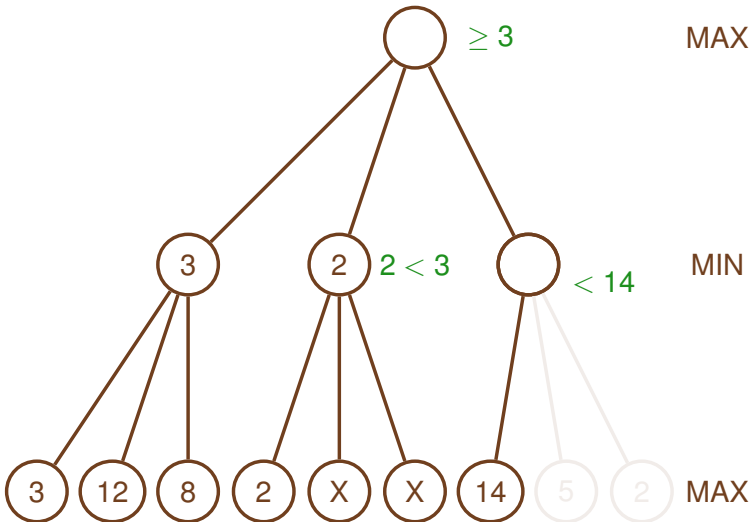
Negamax algoritmus

Alfabéta

Játékprogramok

Összefoglaló

Példa





Alfa-béta vágás – példa

Mesterséges
Intelligencia

6

Csató Lehel

Játékelmélet

Kétszemélyes játékok

NIM

Tic-Tac-Toe

Nyero Strat.

Strat. keresés

Null-összegű játékok

Neumann minimax tétele

Minimax algoritmus

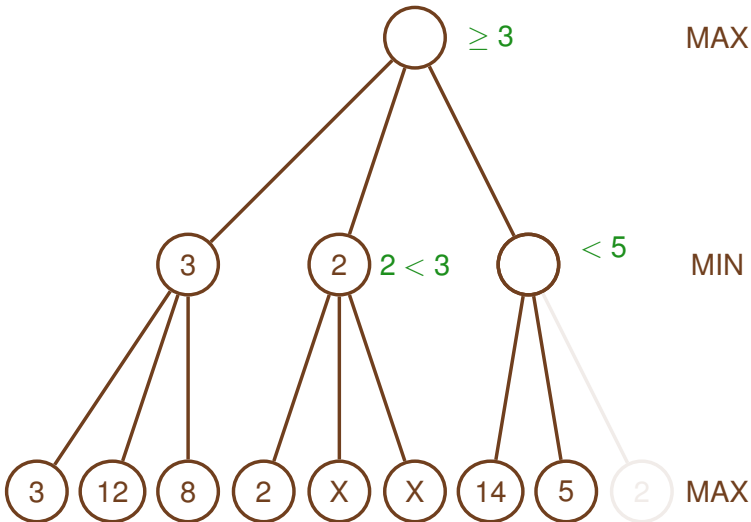
Negamax algoritmus

Alfabéta

Játékprogramok

Összefoglaló

Példa





Alfa-béta vágás – példa

Mesterséges
Intelligencia

6

Csató Lehel

Játékelmélet

Kétszemélyes játékok

NIM

Tic-Tac-Toe

Nyero Strat.

Strat. keresés

Null-összegű játékok

Neumann minimax tétele

Minimax algoritmus

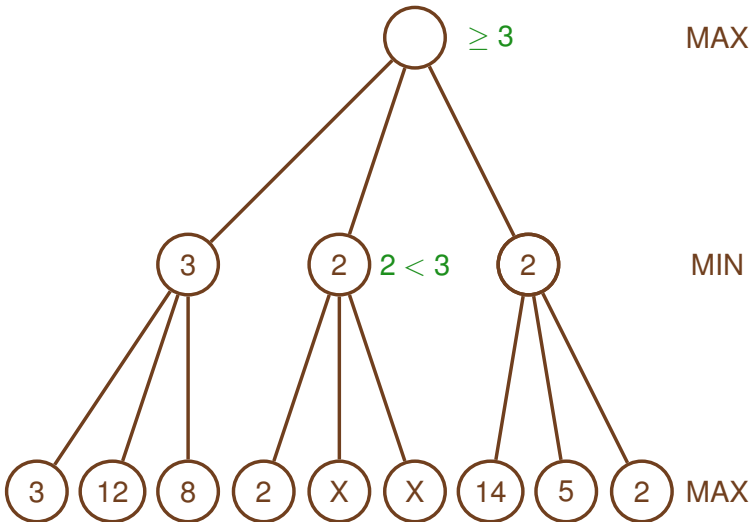
Negamax algoritmus

Alfabéta

Játékprogramok

Összefoglaló

Példa





Alfa-béta vágás – példa

Mesterséges
Intelligencia

6

Csató Lehel

Játékelmélet

Kétszemélyes játékok

NIM

Tic-Tac-Toe

Nyero Strat.

Strat. keresés

Null-összegű játékok

Neumann minimax tétele

Minimax algoritmus

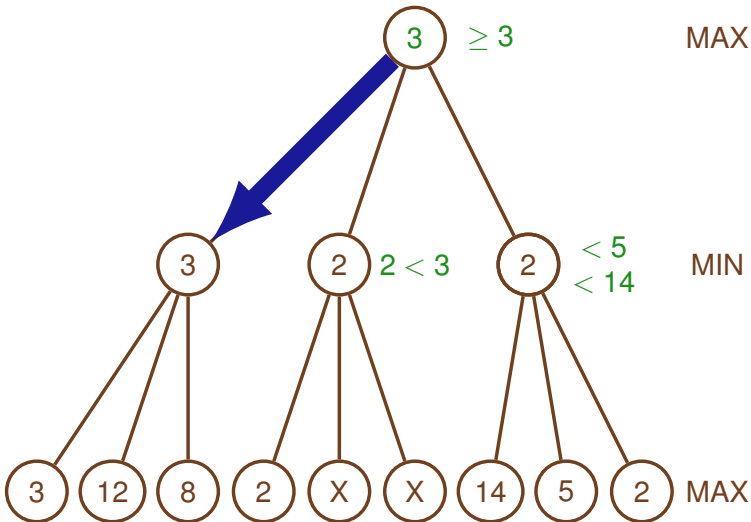
Negamax algoritmus

Alfabéta

Játékprogramok

Összefoglaló

Példa





Alfa-béta algoritmus tulajdonságai

Mesterséges
Intelligencia

6

Csató Lehel

Játékelmélet

Kétszemélyes játékok

NIM

Tic-Tac-Toe

Nyero Strat.

Strat. keresés

Null-összegű játékok

Neumann minimax tétele

Minimax algoritmus

Negamax algoritmus

Alfabéta

Játékprogramok

Összefoglaló

Példa

- a vágások **nem módosítják** a megoldások minőségét;
- hatékony vágások (első eset) megvalósítása a csúcsok rendezésével: idő-komplexitás: $O(b^{m/2})$
- Fontos a tudás – hol lehet „jó csúcsokat” találni – kódolása.

Létező játékprogramok:

Mesterséges
Intelligencia

6

Csató Lehel

Játékelmélet

Kétszemélyes játékok

NIM

Tic-Tac-Toe

Nyero Strat.

Strat. keresés

Null-összegű játékok

Neumann minimax tétele

Minimax algoritmus

Negamax algoritmus

Alfabetá

Játékprogramok

Összefoglaló

Példa

- **Dáma** – Chinook program 40 éves nyerési sorozatot szakított meg ...
- **Sakk** – Deep Blue 1997-ben megverte Kasparov-ot.
- **Reversi** – nem játszanak: gép ... mindig nyer.
- **Go** – nem játszanak: gép ... mindig veszít.

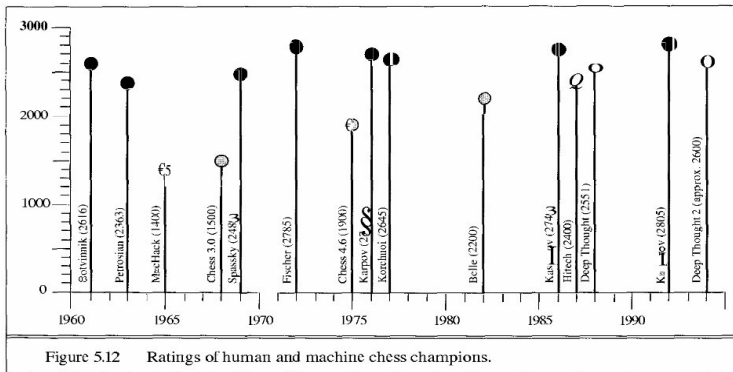


Figure 5.12 Ratings of human and machine chess champions.



Ketten játszanak: Q és R .

- Egy vagy két ujjat mutatnak fel;
- Páros ujj-szám esetén Q fizet R -nek, ellenkező esetben fordítva;
- annyit nyernek/veszítene, ahány ujjat felmutattak.

Ismételt játékok esetén mi a nyerő stratégia?

Nyereség/veszteség
mátrix:

	Q.1	Q.2
R.1	2	-3
R.2	-3	4

$$r^T M q = 2r_1q_1 - 3r_1q_2 - 3r_2q_1 + 4r_2q_2$$

Mindegyik játékos úgy játszik, hogy az eredmény **ne** függjön a másik játékosról (és tudva, hogy $p_2 = 1 - p_1$, $q_2 = 1 - q_1$):

$$(12r_1 - 7)q_1 + (4 - 7r_1).$$

R választása: $12r_1 - 7 = 0$.

A megoldás:

$$r_1 = 7/12, r_2 = 5/12, q_1 = 7/12, q_2 = 5/12$$

Átlegnyereség-veszteség: $-1/12$