

1.1. Alapfeladatok

1.1.1. Feladat. Tekintsük az $A\Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$ halmazműveletet. Igazold, hogy

$$(A\Delta B)\Delta C = A\Delta(B\Delta C), \quad \forall A, B, C$$

Adjál legalább három különböző bizonyítást!

1.1.2. Feladat. Igazold, hogy ha $A\Delta X\Delta B = C$, akkor $X = A\Delta C\Delta B$!

1.1.3. Feladat. Adott E halmaz részhalmazainak halmazán milyen struktúrát határoz meg a $\Delta : \mathcal{P}(E) \times \mathcal{P}(E) \rightarrow \mathcal{P}(E)$ művelet?

1.1.4. Feladat. Tekintsünk egy E halmazt és annak egy A részhalmazát valamint az A halmaz $f_A : E \rightarrow \{0, 1\}$ karakterisztikus függvényét, amelyet az

$$f_A(x) = \begin{cases} 1, & x \in A \\ 0, & x \notin A \end{cases}$$

egyenlőségekkel értelmezünk. Igazold, hogy

- $U = V \Leftrightarrow f_U = f_V$, ha $U, V \subset E$;
- $f_{A \cap B} = f_A \cdot f_B$;
- $f_{\bar{A}} = 1 - f_A$;
- $f_{A \setminus B} = f_A \cdot (1 - f_B)$;
- $f_{A \cup B} = f_A + f_B - f_A \cdot f_B$.

1.1.5. Feladat. Vezessél le összefüggést $f_{A\Delta B}$ -re!

1.2. Versenyfeladatok

1.2.1. Feladat. Vezessél le összefüggést $f_{A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n}$ -re, ahol $A_1, A_2, \dots, A_n \subset E$!

1.2.2. Feladat. Vezessél le összefüggést $f_{A_1 \Delta A_2 \Delta \dots \Delta A_n}$ -re, ahol $A_1, A_2, \dots, A_n \subset E$!

1.2.3. Feladat. Igazold, hogy az $A_1 \Delta A_2 \Delta \dots \Delta A_n$ halmaz pontosan azokat az elemeket tartalmazza, amelyek az A_1, A_2, \dots, A_n halmazok közül pontosan páratlan sokban vannak benne.

1.2.4. Feladat. A karakterisztikus függvény segítségével vezesd le a logikai szita formulát az $A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n$ halmaz számosságára vonatkozóan.

1.2.5. Feladat. A karakterisztikus függvény segítségével vezesd le a logikai szita formulát az $A_1 \Delta A_2 \Delta \dots \Delta A_n$ halmaz számosságára vonatkozóan.

1.2.6. Feladat. Adott n különböző levél és n különböző címre elcímezett boríték. A leveleket egy hanyag titkárnő véletlenszerűen borítékolja. Mennyi a valószínűsége, hogy egyetlen levél sem jut a címzetthez?

1.2.7. Feladat. Adott n különböző levél és n különböző címre elcímezett boríték. A leveleket egy hanyag titkárnő véletlenszerűen borítékolja. Mennyi a valószínűsége, hogy páratlan azoknak a leveleknek a száma, amelyek eljutnak a címzetthez?