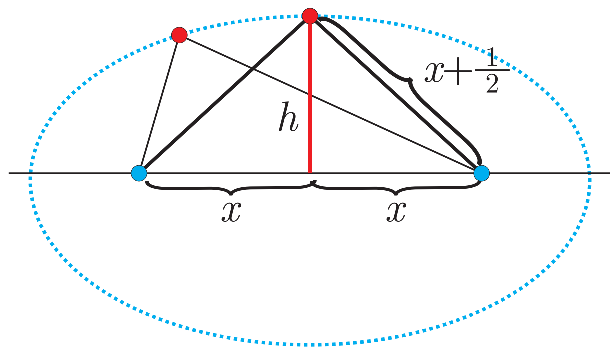
1.1. Alapfeladatok

1.1.1. Megoldás. *Először meg kell állapítsuk, hogy mit jelent az, hogy a legmagasabbra emeljük a zsinórt. Mivel a két végpont (A és B) rögzített és a zsinórt kifeszítjük, a harmadik pont mértani helye síkban egy ellipszis és térben ennek az ellipszisnek az AB körüli forgásából adódó forgásellipszoid. Mivel ez a test konvex és szimmetrikus az AB felezőmerőlegesére, a zsinór legmagasabb pontját úgy kapjuk, ha egyenlőszárú háromszöget alkotunk.*

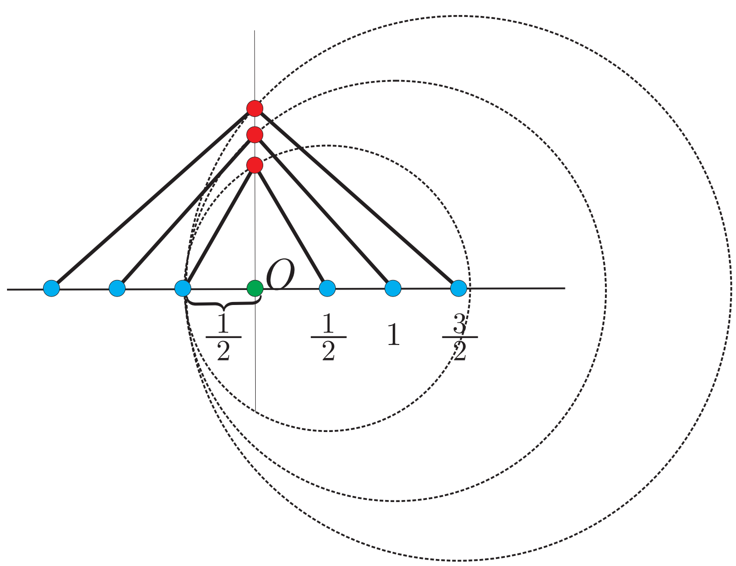


1.1. ábra. A zsinór és a szakasz

1. Megoldás. Számolást használunk. Legyen x az alap hosszának fele, vagyis a padlón levő pontok távolsága $2x$ és h a magasság. Ekkor az egyenlő oldalak hossza összesen $2x+1$, vagyis egy oldal hossza $x+\frac{1}{2}$. Pitagorasz tételéből a magasság:

$$h = \sqrt{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2 - x^2} = \sqrt{x+\frac{1}{2}}$$

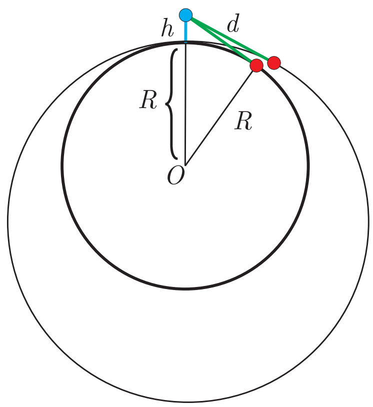
Vagyis ha x nő, h is nőni fog.



1.2. ábra. Szerkesztés

2. Megoldás. Szerkesztést használunk. Az egyenlőszárú háromszög csúcsát az AB felező-merőlegesének és egy körnek a metszéspontjaként szerkeszthetjük meg, ahol a kör sugara egyenlő az oldalhosszal és a középpontja az alap egyik végpontjában van. Ha O az alap felezőpontja, akkor az így szerkesztett körök áthaladnak az O-tól $1/2m$ távolságra levő ponton és az n növekedésével egyre nagyobbak lesznek, tehát a magasság is növekszik.

1.1.2. Megoldás. *A látótávolság a személy „fejétől” a körre (amit a gömbünk főmetszete ad) húzott érintő d hosszát értjük (a fejtől a körig). Ezt jelöljük x_n-nel. Tudjuk, hogy az érintőbe húzott sugár merőleges az érintőre. Így létrejön egy derékszögű háromszög a személy, a sugár és az érintő között, aminek mindhárom oldalát ismerjük. A Pitagorasz-tétel alapján:*



1.3. ábra. Látótávolság

$$(h+n)^2 = n^2 + (x_n)^2 \Leftrightarrow h^2 + 2hn + n^2 = n^2 + (x_n)^2 \Leftrightarrow x_n = \sqrt{h^2 + 2hn}$$

Tehát ha n növekszik, akkor a látótávolság is növekszik.

1.1.1. Megjegyzés. *Az 1.1.1 feladat esetén az inuiciónk csalhat. Nagyon sokan gondolják azt (természetesen mielőt kiszámolnák), hogy az alap és a zsinor hossza nagyon kicsi az alap hosszához képest, ezért a magasság nem növekedhet. A számolás megoldja a problémát, de nem világít rá arra, hogy hol hibázik az intuiciónk. A szerkesztéses módszer sokkal közelebb áll az intuitív gondolkodáshoz és matematikailag is helyes. Az 1.1.2 feladat a számolás (matematikai modell) szempontjából ugyanazt a tulajdonságot használja, mint az 1.1.1 feladat, de ebben az esetben az intuitív válasz általában helyes. A különbség lényegében abból adódik, hogy az első esetben a viszonyítási alap a hosszabb oldal, míg a második esetben a rövid oldal (amelynek a hossza állandó). Ehhez hasonló feladatpárok a tanítási gyakorlatban hasznosak lehetnek a bizonyítási igény fejlesztésében.*

1.1.3. Megoldás. *Elkülönítünk* 13 *korongot és felfordítjuk őket. Könnyen belátható, hogy ebben az esetben valóban két olyan csoportot hozunk létre, melyek azonos számú piros oldalávl felfele levő korongot tartalmaznak. Ha az elkülönítés pillanatában a csoportok szerkezete:*

I csoport:	II csoport:
k *db piros korong*	$13-k$ *db piros korong*
$13-k$ *db fekete korong*	$87-(13-k)$ *db fekete korong*

Akkor a korongok megforgatása után a csoportok szerkezete

I csoport:	*I csoport:*
k *db piros korong*	$13 - k$ *db piros korong*
$13 - k$ *db fekete korong*	k *db fekete korong*

Látható, hogy a 13 *korong elkülönítése egyrészt magával vonja a II csoport piros elemeinek számát* ($= 13 - k$)*, másrészt a felfordítás következményeként az I csoport piros elemeinek végső számát* ($= 13 - k$)*.*

1.1.4. Megoldás. *Elsőként talán arra gondolunk, hogy ha folyton felezzük az érmecsoportot, egy idő után találunk két azonos számú, különböző tömegű érmecsoportot. Viszont az a kérdés, hogy legalább hány lépésre van szükség. Így talán jobb ha az érmecsoportok háromba való osztását vizsgáljuk, mert így egyszerre mindhárom csoportról kapunk információt: azokról is, amiket felteszünk a mérlegre és arról is, ami lent marad. Egyértelmű, hogy legalább egy mérésre biztosan szükség van, különben nem tudjuk megoldani a feladatot. A továbbiakban belátjuk, hogy egy mérés elégséges.*

Az első felosztással kapunk egy 666*-os és két* 667*-es csoportot és feltesszük az utóbbi kettőt a mérleg két karjára.*

- *ha a két* 667*-es csoport különböző tömegű, akkor megtaláltuk a keresett csoportokat.*
- *ha azonos tömegűek, akkor mindkettőben van* k *db az egyik fajtából és* $667 - k$ *db a másik fajtából.*

A második esetben az egyik 667*-es csoportból átteszünk egy tetszőleges érmét a* 666*-osba. Tételezzük fel, hogy az így létrejött új,* 667 *érmét tartalmazó csoport azonos tömegű a másik, megmaradt* 667 *érmét tartalmazó csoporttal. Jelölje* k *az áttett érmetípushoz tartozó érmék számát az első mérésnél megmért csoportokban. Így összesen, a három csoportban* $k + k + (k - 1)$ *db ilyen érménk lenne és ez ellentmondás, mert*

$$1000 \neq 3k - 1.$$

Tehát a két 667*-es csoport nem azonos tömegű és így beláttuk, hogy elegendő egyetlen mérés, ami természetesen minimális.*

1.1.5. Megoldás. *A vándor az igazmondók városába akar eljutni. Ha azt kérdezné, hogy melyik az igazmondók városa, akkor ezzel az egy kérdéssel nem jutna közelebb céljához, hiszen egy igazmondó a jó utat, míg egy lókötő a rossz utat mutatná. Olyan kérdést kell feltegyen, amelyikre mindkét város lakója ugyanazt válaszolja. Ilyen kérdés például az, hogy „Merre laksz?”. Erre egy igazmondó megmutatja a helyes utat, ami az igazmondók városába vezet; egy lókötő szintén az igazmondók városa fele vezető útra fog mutatni, hiszen ő nem ott lakik.*

Ha csak igennel vagy nemmel megválaszolható kérdést szabad feltenni, akkor azt érdemes kérdezni, hogy „Igaz-e, hogy a másik város lakói azt mondanák, hogy a bal oldali út vezet az B városba?” Ha erre a kérdésre a válasz igen, akkor a bal oldali utat kell választania ellenkező esetben a jobb oldalit.

1.1.6. Megoldás. *A determinánst ekvivalens átalakításokkal egyszerűbb formára hozzuk.*

$$\begin{vmatrix} x & 3 & 3 & 3 \\ 3 & x & 3 & 3 \\ 3 & 3 & x & 3 \\ 3 & 3 & 3 & x \end{vmatrix} = 0 \iff \begin{vmatrix} x+9 & 3 & 3 & 3 \\ x+9 & x & 3 & 3 \\ x+9 & 3 & x & 3 \\ x+9 & 3 & 3 & x \end{vmatrix} = 0 \iff (x+9) \begin{vmatrix} 1 & 3 & 3 & 3 \\ 1 & x & 3 & 3 \\ 1 & 3 & x & 3 \\ 1 & 3 & 3 & x \end{vmatrix} = 0 \iff$$

$$\iff (x+9) \begin{vmatrix} 1 & 3 & 3 & 3 \\ 0 & x-3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x-3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x-3 \end{vmatrix} = 0 \iff (x+9) \begin{vmatrix} x-3 & 0 & 0 \\ 0 & x-3 & 0 \\ 0 & 0 & x-3 \end{vmatrix} = 0 \iff$$

$$\iff (x+9)(x-3)^3 = 0$$

Tehát az egyenlet megoldásai: $x_1 = -9$ *és* $x_2 = 3$. *Arra kell figyelni, hogy a feladat az egyenlet megoldásainak a szorzatát kéri, ami nem ugyanaz mint a polinom gyökeinek a szorzata. Az egyenlet megoldásainak a szorzata* -27, *míg a polinom gyökeinek a szorzata* $-9 \cdot 27 = -243$.

1.1.7. Megoldás. *A feladat megoldása során nem használjuk ki, hogy folytonosan deriválható függvényről van szó, elég számunkra a folytonosság. Tekintjük a*

$$Q_n = \frac{b-a}{n} \sum_{i=0}^{n} f(\xi_i) g(\xi_i),$$

összeget ami pontosan egy a $h = f \cdot g$ *függvényhez rendelt Riemann összeg. Ahhoz, hogy az* S_n *határérték is ugyanahoz a számhoz (integrálhoz) tartson, elég lenne belátnunk, hogy* $\forall \varepsilon > 0$ *esetén létezik,* $n(\varepsilon)$ *küszöbszám, úgy , hogy*

$$|Q_n - S_n| \leq \varepsilon \tag{1.1}$$

$$|Q_n - S_n| = \left| \frac{b-a}{n} \sum_i f(\xi_i)(g(\xi_i) - g(\xi_i')) \right| \leq \frac{b-a}{n} \sum_i f(\xi_i) \left| g(\xi_i) - g(\xi_i') \right|. \tag{1.2}$$

Mivel g *folytonos az* $[a, b]$ *zárt intervallumon ezért egyenletesen folytonos, tehát tetszőleges* $\varepsilon_1 > 0$ *esetén létezik* $\delta(\varepsilon_1) > 0$ *úgy, hogy*

$$|g(u) - g(v)| \leq \varepsilon_1, \text{ ha } |u - v| \leq \delta(\varepsilon_1).$$

Így ha a felosztás normája kisebb mint $\delta(\varepsilon_1)$, *ahol* $\varepsilon_1 = \frac{\varepsilon}{(b-a)\max|f|}$, *akkor az* (1.2) *egyenlőtlenségből következik az* (1.1).

1.1.2. Megjegyzés. *Ha* g *folytonosan deriválható, akkor a* $|g(\xi_i) - g(\xi_i'))|$*-re adhatunk becslést a Lagrange tétel segítségével is.*

1.1.8. Megoldás. *A négyzetgyök létezéséből az* $x \geq -m$ *feltétel és a gyök pozitivitásából az* $m \geq x$ *egyenlőtlenség adódik, tehát csak* $m \geq 0$ *esetén lehet megoldása az adott egyenletnek. Ebben az esetben* $\sqrt{x+m} = m-x$*, tehát* $x+m = m^2-2mx+x^2$*. Ennek az egyenletnek a diszkriminánsa* $\Delta = 8m+1 > 0$*, ha* $m \geq 0$ *és így a gyökök* $x_{1,2} = m + \frac{1}{2} \pm \sqrt{2m+\frac{1}{4}}$*. De* $x_1 = m+\frac{1}{2}+\sqrt{2m+\frac{1}{4}} > m$*, tehát csak a* $-m \leq x_2 \leq m$ *feltételeket kell megvizsgálni. Négyzetre emeléssel belátható, hogy az* x_2 *mindig megoldás, tehát* $m < 0$ *esetén nincs megoldás és* $m \geq 0$ *esetén az egyetlen megoldás* $x_2 = m + \frac{1}{2} - \sqrt{2m+\frac{1}{4}}$*.*

1.1.9. Megoldás. *A megadott egyenletekből kifejezzük a* c*-t illetve a* $|c|$*-t, tehát*

$$\begin{cases} c = 19 - |a+b| \\ |c| = 97 - ab. \end{cases}$$

Tehát $97 - ab = \pm(19 - |a+b|)$ *és így a következő egyenletekhez jutunk:*

- $(a-1)(b-1) = 79$, *ahol* $a+b \geq 0$ *és* $97 \geq ab$;
- $(a+1)(b+1) = 79$, *ahol* $a+b \leq 0$ *és* $97 \geq ab$;
- $(a+1)(b+1) = 117$, *ahol* $a+b \geq 0$ *és* $97 \geq ab$;
- $(a-1)(b-1) = 117$, *ahol* $a+b \leq 0$ *és* $97 \geq ab$.

Az első két egyenlet megoldásai nem teljesítik a feltételeket míg az utolsó két egyenletből a következő megoldások adódnak:

$$M = \{(0,116,-97),(0,-116,-97),(2,38,-21),(-2,-38,-21),(8,12,-1),(-8,-12,-1)\}.$$

1.1.3. Megjegyzés. *Ha az* $s = a+b$ *és* $p = ab$ *számokat fejezzük ki, a Viéte összegfüggések alapján* a *és* b *a*

$$t^2 \pm (19-c)t + 97 - |c| = 0$$

egyenlet egész gyökei, tehát a $c^2 - 34c - 27 = u^2$, $c \geq 0$ *és a* $c^2 - 42c - 27 = u^2$, $c \leq 0$ *egyenletek megoldásait kell meghatározni. Teljes négyzetek kialakításával az* $(c-17-u)(c-17_u) = 316$, $c \geq 0$ *illetve a* $(c-21-u)(c-21+u) = 468$ *egyenletekhez jutunk.*

1.1.10. Megoldás. *Jelöljük* R*-rel az alaphatszög oldalának hosszát. Az oldallapokon megjelenő trapézok alapjainak hosszát jelöljük* h*-val illetve* H*-val valamint* m*-mel a* V *csúcs távolságát az alap síkjától. Ahhoz, hogy a „tető" kongruens rombuszokból álljon teljesülnie kell az* $m = 2H-h$ *feltételnek. Ez azt jelenti, hogy a méhsejt térfogata megegyezik annak a* H *magasságú hasábnak a térfogatával, amelynek az alapja ugyanaz, mint a méhsejtnek. Így* $V = \frac{3R^2\sqrt{3}}{2}H$*. Az alap területe* $A_b = \frac{3r^2\sqrt{3}}{2}$*, az oldallapok területe* $A_s = 6\frac{h+H}{2}R = 3(h+H)R$ *és a tető felszíne* $A_r = 3\frac{VK \cdot MN}{2}$ *(lásd az 1.4 ábrát). Másrészt* $l^2 = R^2 + (H-h)^2$*,* $MN = R\sqrt{3}$ *és* $VK = \sqrt{4l^2 - MN^2} = \sqrt{R^2 + 4(H-h)^2}$*, tehát a teljes felszín*

$$A = 3(h+H)R + \frac{3R^2\sqrt{3}}{2} + \frac{3R\sqrt{3}}{2}\sqrt{R^2+4(H-h)^2}.$$

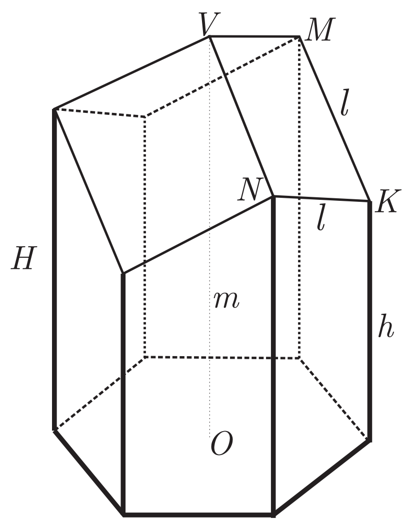
Ha azt szeretnénk, hogy adott térfogatra minimális felszíne legyen a méhsejtnek, akkor az

$$F(h,H,R) = 3(h+H)R + \frac{3R^2\sqrt{3}}{2} + \frac{3R\sqrt{3}}{2}\sqrt{R^2+4(H-h)^2}$$

függvény minimumát kell meghatároznunk a

$$\frac{3R^2\sqrt{3}}{2}H = V_0$$

feltétel mellett. A Lagrange-multiplikátorok módszerét használva az



1.4. ábra. A méhsejt alakja

$$L(h,H,R,\lambda) = 3(h+H)R + \frac{3R^2\sqrt{3}}{2} + \frac{3R\sqrt{3}}{2}\sqrt{R^2+4(H-h)^2} + \lambda\left(\frac{3R^2\sqrt{3}}{2}H - V_0\right)$$

függvény szélsőértékeit keressük. A $\frac{\partial L}{\partial h} = 0$ *egyenletből következik, hogy*

$$VK = \sqrt{R^2+4(H-h)^2} = 2\sqrt{3}(H-h) \tag{1.3}$$

és így a $\frac{\partial L}{\partial H} = 0$ *egyenletből*

$$\lambda = -\frac{4}{R\sqrt{3}}. \tag{1.4}$$

A $\frac{\partial L}{\partial R} = 0$ *egyenletből az 1.3 és az 1.4 alapján következik, hogy*

$$2h = R\sqrt{3} + \frac{R^2}{4(H-h)}. \tag{1.5}$$

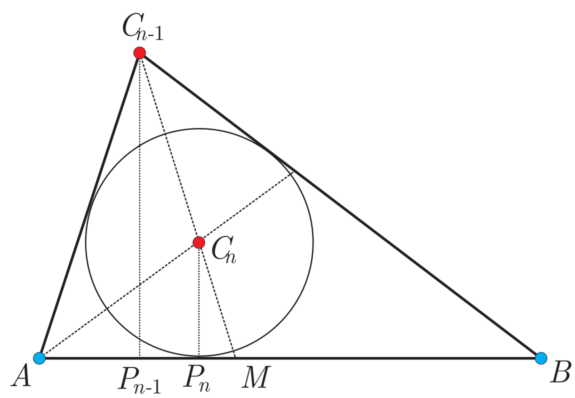
Az kapott egyenlőségek és a $\frac{3R^2\sqrt{3}}{2}H = V_0$ *feltétel alapján a következő egyenlőségekhez* *jutunk:*

$$h = \frac{2\sqrt{3}+\sqrt{2}}{4}R$$
$$H = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}}{2}R$$
$$l = \frac{3\sqrt{2}}{4}R$$
$$VK = \frac{\sqrt{6}}{2}R$$
$$R = \sqrt[3]{\frac{4V_0}{3\sqrt{3}(\sqrt{2}+\sqrt{3})}}.$$

Ezek alapján a rombuszok φ *tompaszögére* $\cos\varphi = -\frac{1}{3}$ *és az összes (derékszögtől különböző) lapszög mértéke* $120°$. *A kapott arányok és szögek megfelelnek a valóságban létező méhsejt méreteinek.*

1.2. Versenyfeladatok

1.2.1. Megoldás. *Előbb igazoljuk, hogy a* C_n *pontoknak az* AB*-től való távolsága tart* 0*-hoz. Ehhez tekintsük az* ABC_{n-1} *háromszöget (lásd a 2.1 ábrát). Legyen* M *a* $C_{n-1}C_n$



2.1. ábra.

szögfelező metszéspontja az AB*-vel és legyenek* C_nP_n *és* $C_{n-1}P_{n-1}$ *merőlegesek az* AB*-re, úgy, hogy* $P_{n-1}, P_n \in AB$.
Mivel $C_nP_n \parallel C_{n-1}P_{n-1}$ *ezért igaz, hogy*

$$\frac{MC_n}{MC_{n-1}} = \frac{C_nP_n}{P_{n-1}C_{n-1}} = \frac{r_n}{r_{n-1}},$$

ahol r_n*-el jelöltük a* C_n *távolságát az* AB*-től.*
Vegyük észre, hogy AC_n *szögfelezője a* $\widehat{C_{n-1}AB}$ *szögnek, mivel* C_n *az* ABC_{n-1} *háromszögbe írt kör középpontja, tehát alkalmazva a szögfelező tételt, kapjuk, hogy*

$$\frac{AM}{AC_{n-1}} = \frac{MC_n}{C_nC_{n-1}} \Rightarrow \frac{AM}{AM+AC_{n-1}} = \frac{r_n}{r_{n-1}} \tag{1.6}$$

Mivel MC_{n-1} *szögfelezője az* ABC_{n-1} *háromszögnek, ezért alkalmazva a szögefelező tételt, kapjuk, hogy*

$$\frac{AM}{MB} = \frac{AC_{n-1}}{BC_{n-1}} \Rightarrow \frac{AM}{AB} = \frac{AC_{n-1}}{BC_{n-1}+AC_{n-1}} \Rightarrow \frac{AM}{AC_{n-1}} = \frac{AB}{BC_{n-1}+AC_{n-1}} \Rightarrow$$
$$\frac{AM}{AM+AC_{n-1}} = \frac{AB}{AB+BC_{n-1}+AC_{n-1}}$$

Innen az (1) *alpján felírható, hogy*

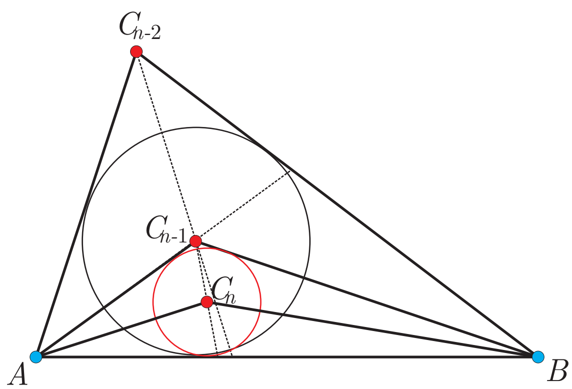
$$\frac{r_n}{r_{n-1}} = \frac{AB}{AB+BC_{n-1}+AC_{n-1}}.$$

A háromszög egyenlőtlenség alapján felírható, hogy

$$AB < BC_{n-1}+AC_{n-1} \Rightarrow 2AB < AB+BC_{n-1}+AC_{n-1} \Rightarrow \frac{AB}{AB+BC_{n-1}}+AC_{n-1} < \frac{1}{2}$$

Ami alapján teljesül, hogy $\frac{r_n}{r_{n-1}} < \frac{1}{2}$, *vagyis* $r_n < \frac{1}{2}r_{n-1}$, *amiből következik, hogy* $r_n \to 0$.

Másrészt mivel AC_{n-1} *szögfelezője a* $\widehat{C_{n-2}AB}$ *szögnek,* $\forall n \in \mathbb{N}$ *(lásd a 2.2 ábrát), ezért felírható, hogy* $\widehat{C_{n-1}AB} = \dfrac{\widehat{C_{n-2}AB}}{2}, \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow \widehat{C_nAB} = \dfrac{\widehat{A}}{2^n}, \forall n \in \mathbb{N}$.
Hasonlóan $\widehat{C_nBA} = \dfrac{\widehat{B}}{2^n}, \forall n \in \mathbb{N}$. *Most alkalmazva a szinusztételt az* ABC_n *háromszögben,*



2.2. ábra.

kapjuk, hogy

$$\frac{AC_n}{BC_n} = \frac{\sin\frac{B}{2^n}}{\sin\frac{A}{2^n}}.$$

Ezek alapján felírható, hogy

$$\lim_{n\to\infty}\frac{AC_n}{BC_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{\sin(\frac{B}{2^n})}{\sin(\frac{A}{2^n})} = \lim_{n\to\infty}\frac{\sin(\frac{B}{2^n})}{\frac{B}{2^n}} \cdot \frac{\frac{A}{2^n}}{\sin(\frac{A}{2^n})} \cdot \frac{B}{A} = \frac{B}{A},$$

mivel $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sin(\frac{B}{2^n})}{\frac{B}{2^n}} = 1$. *Tehát a* $(C_n)_{n\geq 0}$ *sorozat konvergens és* C_∞ *határértéke az* (AB) *szakaszon van, melyet* $\frac{B}{A}$ *arányban oszt.*

1.2.2. Megoldás. *Mivel* $nx - 1 < [nx] \leq nx$ *írhatjuk, hogy*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{[nx]}{[ny]} = \lim_{n\to\infty} \frac{[nx]}{nx} \cdot \frac{ny}{[ny]} \cdot \frac{x}{y} = \frac{x}{y}.$$

A feltételek alapján az $x_n = \frac{[nx]}{[ny]}$ *sorozat egész tagokból áll és konvergens. Ez csak akkor lehetséges, ha a határérték is egész szám és a sorozat egy idő után állandó. Így* $\frac{x}{y}$ *egész szám és létezik* $n_0, k \in \mathbb{Z}$ *úgy, hogy* $\frac{[nx]}{[ny]} = \frac{x}{y} = k \neq 1$, *ha* $n \geq n_0$. *Ebből következik, hogy* $[nky] = k[ny]$, $\forall\, n \geq n_0$. *Feltételezhetjük, hogy* $k > 0$. *Így* $[ny] \leq ny < [ny] + \frac{1}{k}$, $\forall\, n \geq n_0$ *vagyis* ny *törtrésze kisebb, mint* $\frac{1}{k}$, $\forall\, n \geq n_0$. *Ez csak akkor lehetséges, ha* y *egész szám.*

1.2.3. Megoldás. *Jelölje* x_1, x_2 *és* x_3 *az egyenletek egész gyökét. Így az*

$$\begin{cases} ax_1^2 + bx_1 + c = 0 \\ a + bx_2^2 + cx_2 = 0 \\ ax_3 + b + cx_3^2 = 0 \end{cases}$$

egyenletrendszerhez jutunk, az a, b *és* c *ismeretlenekre nézve. Mivel ennek a rendszernek létezik nemtriviális megoldása, a rendszer mátrixának determinánsa* 0, *tehát*

$$x_1^2x_2^2x_3^2 + x_1x_2x_3 + 1 = x_1^2x_2 + x_2^2x_3 + x_3^2x_1.$$

Az egyenlet alapján mindhárom gyök nem lehet negatív. Így ha az x_1, x_2 *és* x_3 *közül egyik sem 1-es, akkor mivel* 0 *egyikük sem lehet, a pozitívak mindegyike legalább* 2. *Ebben az esetben viszont*

$$\begin{aligned} x_1^2x_2^2x_3^2 &> 4x_1^2x_2, \\ x_1^2x_2^2x_3^2 &> 4x_2^2x_3, \\ x_1^2x_2^2x_3^2 &> 4x_3^2x_1, \end{aligned}$$

tehát

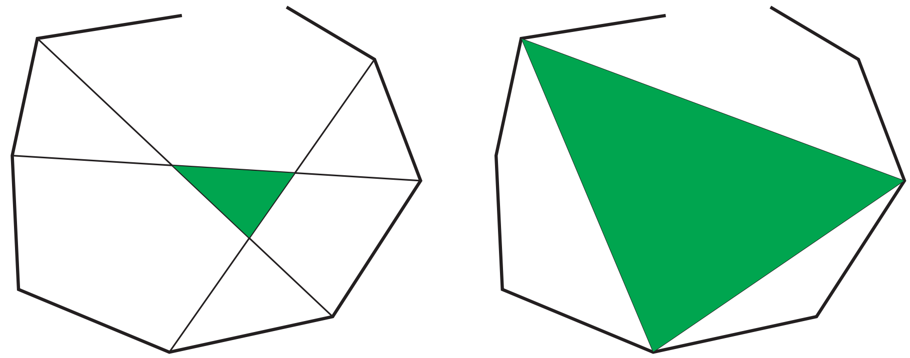
$$x_1^2x_2^2x_3^2 + x_1x_2x_3 + 1 \geq \frac{3}{4}x_1^2x_2^2x_3^2 > x_1^2x_2 + x_2^2x_3 + x_3^2x_1.$$

Mivel ez lehetetlen, x_1, x_2 *és* x_3 *közül legalább az egyik 1-es. Ez viszont azt jelenti, hogy* $a + b + c = 0$, *vagyis az* 1 *közös gyöke mindhárom egyenletnek.*

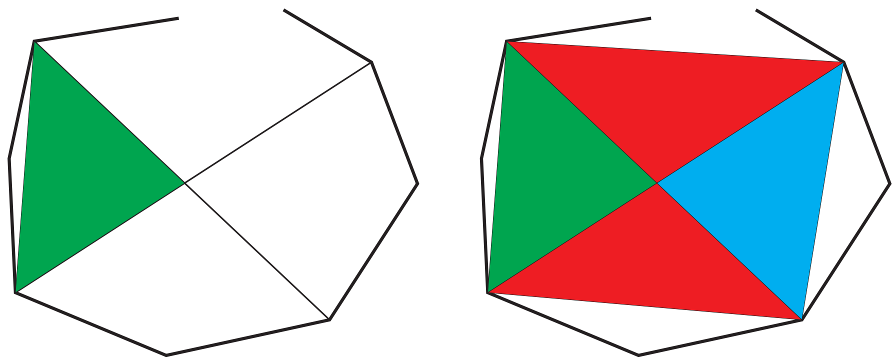
1.2.4. Megoldás. *A háromszög alakú tartományokat aszerint csoportosítjuk, hogy hány olyan csúcsa van, amely az eredeti sokszögnek is csucsa. Így* $j \in \{0, 1, 2, 3\}$ *esetén jelölje* S_j *azoknak a háromszög alakú tartományokanak a számát, amelyeknek a csúcsai közt az eredeti sokszög csúcsai közül pontosan* j *darab csúcs van. Világos, hogy* $S_3 = C_n^3$ *és* $S_0 = C_n^6$ *(lásd az 1.2.4 ábrát). Ha egy háromszög alakú tartománynak az eredeti sokszög csúcsai közt két csúcsa van, akkor a tartományt körbehatároló átlók további két csúcspontot határoznak meg és a négy csúcshoz összesen* 4 *háromszög tartozik, tehát* $S_2 = 4C_n^4$ *(lásd az 1.2.4 ábrát). Ha egy háromszög alakú tartománynak az eredeti sokszög csúcsai közt pontosan egy csúcsa van, akkor a tartományt körbehatároló átlók további négy csúcspontot határoznak meg az eredeti sokszögben és az öt csúcshoz összesen* 5 *háromszög tartozik, tehát* $S_1 = 5C_n^5$ *(lásd az 1.2.4 ábrát). Így a keresett tartományok száma*

$$C_n^6 + 4C_n^4 + 5C_n^5 + C_n^6.$$

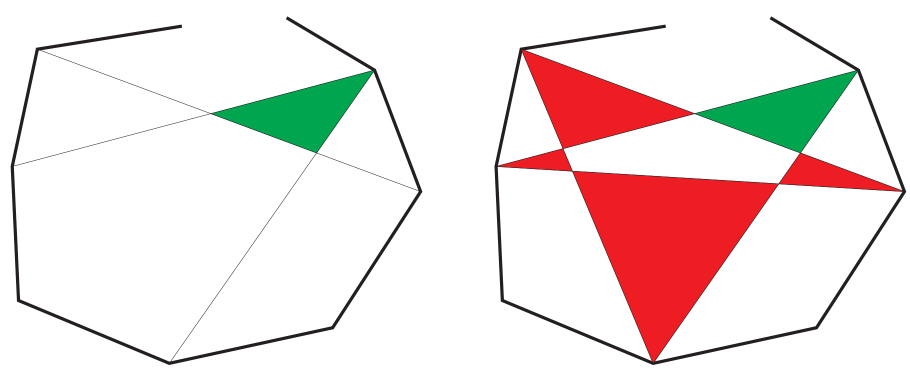
1.2.5. Megoldás. *A bizonyítás megtalálható az András Szilárd: Dinamikus rendszerek, Editura Didactică şi Pedagogică, 2008 könyv 121. oldalán (és a 122. oldal 3. feladatában).*



2.3. ábra.



2.4. ábra.



2.5. ábra.