

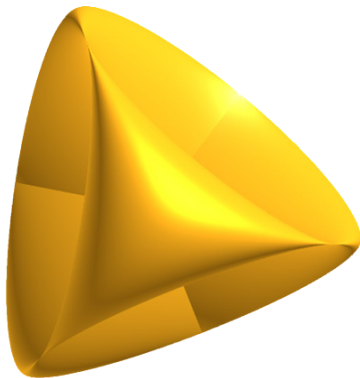
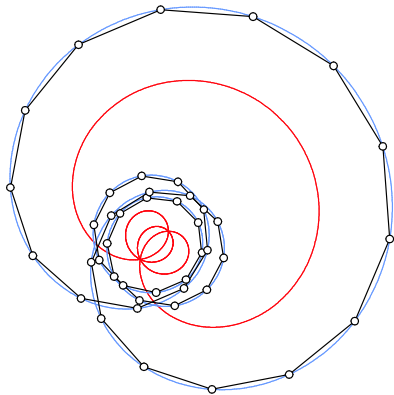
Zárt görbék és felületek modellezése ciklikus bázisokkal

Róth Ágoston

Babeş-Bolyai Tudományegyetem, Numerikus Analízis és Statisztika Tanszék, Kolozsvár, Románia

2008. december 3.

Célkitűzés



Bevezető

Egy nemrégiben elért eredményről

A későbbiekben bemutatott ciklikus görbék és felületek tulajdonságai az alábbi dolgozatra épülnek.

Dolgozat

Ágoston Róth, Imre Juhász, Josef Schicho, Miklós Hoffmann: *A cyclic basis for closed curve and surface modeling*, **Computer Aided Geometric Design**, CAGD-D-08-00010, 2008.

Ajánlott bázis

Egy szimmetrikus függvényrendszer szerkesztése

- Tekintsük a

$$\mathcal{V}_n = \langle 1, \cos(t), \sin(t), \dots, \cos(nt), \sin(nt) \rangle$$

függvényekből álló vektorteret (maximálisan n -ed fokú trigonometrikus polinomok tere).

Ajánlott bázis

Egy szimmetrikus függvényrendszer szerkesztése

- Tekintsük a

$$\mathcal{V}_n = \langle 1, \cos(t), \sin(t), \dots, \cos(nt), \sin(nt) \rangle$$

függvényekből álló vektorteret (maximálisan n -ed fokú trigonometrikus polinomok tere).

- Legyenek a

$$B_{i,n}(t) = B_{0,n}(t + i\lambda_n) = c_n \left(\frac{1 + \cos(t + i\lambda_n)}{2} \right)^n, \quad i = 0, 1, \dots, 2n,$$

függvények, ahol

$$\lambda_n = \frac{2\pi}{2n+1}$$

és

$$c_n = \frac{2^{2n}}{(2n+1) \binom{2n}{n}} = \frac{(2^n n!)^2}{(2n+1)!}. \quad (1)$$

Ajánlott bázis

A bevezetett függvényrendszer tulajdonságai

Tétel

*Az előbb értelmezett függvények összege azonosan 1, azaz $\sum_{i=0}^{2^n} B_{i,n}(t) \equiv 1$,
 $\forall t \in \mathbb{R}$.*

Ajánlott bázis

A bevezetett függvényrendszer tulajdonságai

Tétel

Az előbb értelmezett függvények összege azonosan 1, azaz $\sum_{i=0}^{2n} B_{i,n}(t) \equiv 1$,
 $\forall t \in \mathbb{R}$.

Tétel

A

$$B_{i,n}(t) = \frac{c_n}{2^n} (1 + \cos(t + i\lambda_n))^n, \quad i = 0, 1, \dots, 2n, \quad (2)$$

függvények egy **bázisát alkotják** a

$$\mathcal{V}_n = \langle 1, \cos(t), \sin(t), \dots, \cos(nt), \sin(nt) \rangle$$

vektortérnek.

A továbbiakban a

$$\mathbf{g}_n(t) = \sum_{i=0}^{2n} B_{i,n}(t) \cdot \mathbf{d}_i, \quad t \in [-\pi, \pi], \quad n \geq 1 \quad (3)$$

n -ed fokú ciklikus görbe tulajdonságait részletezzük, ahol a $\mathbf{d}_i \in \mathbb{R}^\delta$ ($\delta \geq 2$) vektorokat kontrollpontoknak, az általuk alkotott poligont pedig kontrollpoligonnak nevezzük.

[alkalmazás]

Konvex burkoló tulajdonság

A bázisfüggvények mind pozitívak és összegük azonosan 1. Így, a kontrollpontok által generált görbe azok konvex burkában található.

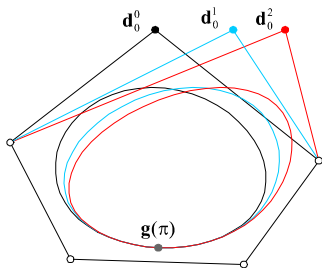
Konvex burkoló tulajdonság

A bázisfüggvények mind pozitívak és összegük azonosan 1. Így, a kontrollpontok által generált görbe azok konvex burkában található.

Egy adott kontrollpont legnagyobb hatása

A $B_{i,n}(t)$ függvény egyetlen (periodicitást leszámítva) maximuma a $t = -2\pi i / (2n + 1)$ pontban van, ezért a \mathbf{d}_i kontrollpont a $\mathbf{g}_n(-2\pi i / (2n + 1))$ görbepont környezetében fejt ki a legnagyobb hatását.

Példa [alkalmazás]



1. ábra. A \mathbf{d}_0 kontrollpont translációjából három különböző görbe származik. Vegyük észre, hogy a $\mathbf{g}_2(\pi)$ görbepont helyzete nem változik a transzformáció során

A görbe globálisan változtatható. Invariáns görbepont egy adott kontrollpont módosításaival szemben

A $B_{i,n}(t)$ függvény a $t = \pi - 2\pi i / (2n + 1)$ pontban tűnik el, így, a \mathbf{d}_i kontrollpont nincs hatással $\mathbf{g}_n(\pi - 2\pi i / (2n + 1))$ görbepontra. Ez a görbepont invariáns a \mathbf{d}_i kontrollpont affin transzformációival szemben.

Ugyanakkor, e görbepont kivételével a \mathbf{d}_i kontrollpont módosítása a görbe minden más pontjára kihat, azaz a görbe globálisan változtatható.

Pszedo-lokális változtathatóság

Ki kell emelnünk (főleg nagyobb n fokszámok esetén), hogy annak ellenére, hogy elméletileg a görbe globálisan változtatható, a kontrollpontok módosítása által kifejtett hatás mértéke nagyon gyorsan csökken a görbe más részein.

Pszedo-lokális változtathatóság

Ki kell emelnünk (főleg nagyobb n fokszámok esetén), hogy annak ellenére, hogy elméletileg a görbe globálisan változtatható, a kontrollpontok módosítása által kifejtett hatás mértéke nagyon gyorsan csökken a görbe más részein.

Hullámzást csökkentő tulajdonság

A ciklikus görbék rendelkeznek a hullámzást csökkentő tulajdonsággal is, azaz bármely hipersík legfennebb annyi pontban metszi a görbét, mint a kontrollpoligonját.

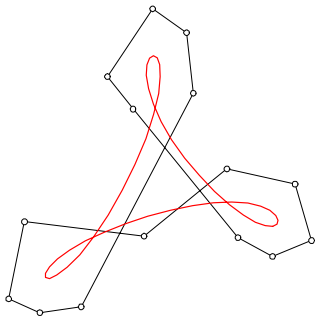
Ciklikus görbék

Geometriai tulajdonságok

Ezt a kontrollpont alapú görbeleírást választva, változatos alakzatokat modellezhetünk.

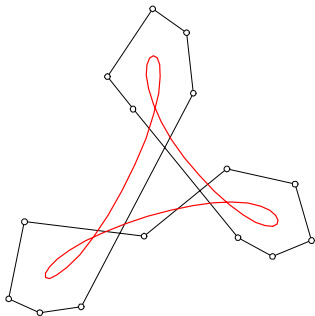
Ezt a kontrollpont alapú görbeleírást választva, változatos alakzatokat modellezhetünk.

Hurkok [alkalmazás]

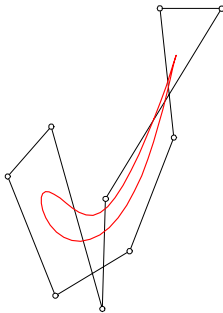


Ezt a kontrollpont alapú görbeleírást választva, változatos alakzatokat modellezhetünk.

Hurkok [alkalmazás]



Csúcspontok [alkalmazás]

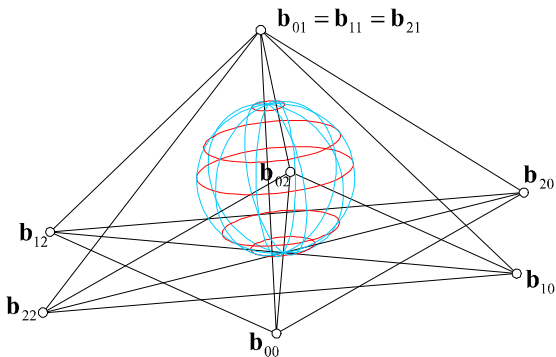


- Tenzor szorzat segítségével

$$\mathbf{s}(u, v) = \sum_{i=0}^{2n} \sum_{j=0}^{2m} \mathbf{d}_{ij} B_{i,n}(u) B_{j,m}(v), \quad (u, v) \in [-\pi, \pi] \times [-\pi, \pi],$$

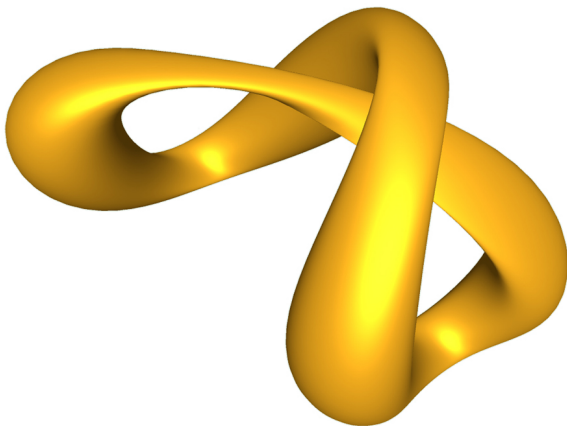
alakú, (n, m) -ed fokú ciklikus felületeket is értelmezhetünk, ahol a \mathbf{d}_{ij} kontrollpontok egy kontrollhálót alkotnak.

Tökéletes gömb [alkalmazás]



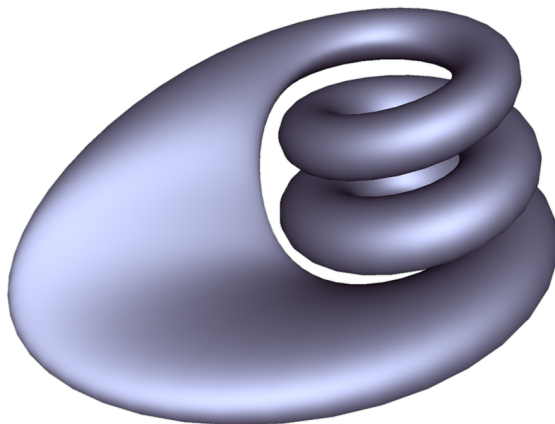
2. ábra. Egy egzakt gömb például 9 olyan kontrollpont által írható le, amelyek közül 3 egybeesik

Szabadformájú zárt felület [alkalmazás]



3. ábra. Egy $(7,9)$ -ed fokú szabadformájú zárt felület

Szabadformájú zárt felület [alkalmazás]



4. ábra. Egy $(4,7)$ -ed fokú csigaszerű felület

Invariáns paramétergörbék egy adott kontrollpont affin transzformációival szemben

A \mathbf{d}_{ij} ($i = 0, 1, \dots, 2n$; $j = 0, 1, \dots, 2m$) kontrollpont nincs hatással az

$$\mathbf{s}\left(\pi - \frac{2\pi i}{2n+1}, v\right) \text{ és } \mathbf{s}\left(u, \pi - \frac{2\pi j}{2m+1}\right)$$

izoparametrikus görbékre, mert $B_{i,n}\left(\pi - \frac{2\pi i}{2n+1}\right) = B_{j,m}\left(\pi - \frac{2\pi j}{2m+1}\right) = 0$.

Ezt a két paramétergörbét leszámítva a \mathbf{d}_{ij} kontrollpont módosítása kihat a felület minden más pontjára.

Egy zárt görbecsalád egzakt leírása

Egy zárt görbecsalád/osztály

Egy zárt görbékől álló osztály

Olyan zárt görbék, mint az ellipszisek (sajátságosan körök), epi- és hipocikloisok, Lissajous-görbék, tórusz csomók, stb. egy általános görbeosztály tagjai, amelynek az elemeit az

$$\begin{cases} \mathbf{x} : [-2\pi, 0] \rightarrow \mathbb{R}^\delta, \delta \geq 2 \\ \mathbf{x}(t) = [x_1(t) \quad x_2(t) \quad \dots \quad x_\delta(t)]^T, \end{cases}$$

alakban adhatjuk meg, ahol

$$\begin{aligned} x_\ell(t) &= x_\ell \left(t, \left\{ (\alpha_p^\ell, \psi_p^\ell) \right\}_{p \in P_\ell}, \left\{ (\beta_q^\ell, \varphi_q^\ell) \right\}_{q \in Q_\ell} \right) \\ &= \sum_{p \in P_\ell} \alpha_p^\ell \cos(pt + \psi_p^\ell) + \sum_{q \in Q_\ell} \beta_q^\ell \sin(qt + \varphi_q^\ell), \end{aligned} \quad (4)$$

$\ell = 1, 2, \dots, \delta$ és $P_\ell \subset \mathbb{N}$, $Q_\ell \subset \mathbb{N}^* = \mathbb{N} \setminus \{0\}$, $\alpha_p^\ell, \beta_q^\ell, \psi_p^\ell, \varphi_q^\ell \in \mathbb{R}$.

Egy zárt görbecsalád egzakt leírása

Tétel

Tekintsük a (4) görbeosztálynak egy $\mathbf{x} : [-2\pi, 0] \rightarrow \mathbb{R}^\delta$ elemét. Legyen

$$n \geq n_{\min} = \max_{\ell=1,2,\dots,\delta} \{e \mid e \in P_\ell \cup Q_\ell\},$$

vegyük fel a

$$\mathbf{d}_i = \left[x_1 \left(-\frac{2\pi i}{2n+1} \right) \quad x_2 \left(-\frac{2\pi i}{2n+1} \right) \quad \dots \quad x_\delta \left(-\frac{2\pi i}{2n+1} \right) \right]^T$$

($i = 0, 1, \dots, 2n$) kontrollpontokat, valamint jelölje $\mathbf{g}_n(t) = \sum_{i=0}^{2n} B_{i,n}(t) \mathbf{d}_i$, $t \in [-2\pi, 0]$ az általuk meghatározott n -ed fokú ciklikus görbét.

Ekkor, a \mathbf{g}_n görbe g_ℓ ($\ell = 1, 2, \dots, \delta$) koordinátafüggvénye a

$$g_\ell(t) = \frac{1}{\binom{2n}{n}} \left(\sum_{p \in P_\ell} \alpha_p^\ell \binom{2n}{n-p} \cos(pt + \lambda_p^\ell) \right. \\ \left. + \sum_{q \in Q_\ell} \beta_q^\ell \binom{2n}{n-q} \sin(qt + \varphi_q^\ell) \right)$$

alakra hozható.

Egy zárt görbecsalád egzakt leírása

Következmény

Tekintsük az

$$\tilde{\mathbf{x}}(t) = [\tilde{x}_1(t) \quad \tilde{x}_2(t) \quad \dots \quad \tilde{x}_\delta(t)]^T, \quad \delta \geq 2, \quad t \in [-2\pi, 0],$$

zárt térgörbét, ahol

$$\tilde{x}_\ell(t) = \sum_{p \in P_\ell} \tilde{\alpha}_p^\ell \cos(pt + \tilde{\psi}_p^\ell) + \sum_{q \in Q_\ell} \tilde{\beta}_q^\ell \sin(qt + \tilde{\varphi}_q^\ell), \quad \ell = 1, 2, \dots, \delta, \quad (5)$$

$P_\ell \subset \mathbb{N}$, $Q_\ell \subset \mathbb{N}^* = \mathbb{N} \setminus \{0\}$ és $\tilde{\alpha}_p^\ell, \tilde{\beta}_q^\ell, \tilde{\psi}_p^\ell, \tilde{\varphi}_q^\ell \in \mathbb{R}$. Legyen

$$n \geq n_{\min} = \max_{\ell=1,2,\dots,\delta} \{e \mid e \in P_\ell \cup Q_\ell\}.$$

Ha az előző tételbeli \mathbf{x} görbe előállításában szereplő konstansokat az

$$\alpha_p^\ell(n) = \frac{\binom{2n}{n}}{\binom{2n}{n-p}} \tilde{\alpha}_p^\ell, \quad \psi_p^\ell(n) \equiv \tilde{\psi}_p^\ell, \quad p \in P_\ell, \quad (6)$$

$$\beta_q^\ell(n) = \frac{\binom{2n}{n}}{\binom{2n}{n-q}} \tilde{\beta}_q^\ell, \quad \varphi_q^\ell(n) \equiv \tilde{\varphi}_q^\ell, \quad q \in Q_\ell, \quad (7)$$

Egy zárt görbecsalád egzakt leírása

Következmény – folytatás

módon választjuk meg, akkor minden $n \geq n_{\min}$ esetén a

$$\mathbf{d}_i = \left[x_1 \left(-\frac{2\pi i}{2n+1} \right) \quad x_2 \left(-\frac{2\pi i}{2n+1} \right) \quad \dots \quad x_\delta \left(-\frac{2\pi i}{2n+1} \right) \right]^T \quad (8)$$

($i = 0, 1, \dots, 2n$) kontrollpontok pontosan az $\tilde{\mathbf{x}}$ görbét generálják.

Az is nyilvánvaló, hogy a $\tilde{\mathbf{x}}$ görbét végtelen sok féleképpen előállíthatjuk, mi több igaz

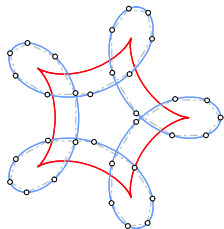
$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{x} \left(t, \left\{ \left(\alpha_p^\ell(n), \psi_p^\ell(n) \right) \right\}_{p \in P_\ell}, \left\{ \left(\beta_q^\ell(n), \varphi_q^\ell(n) \right) \right\}_{q \in Q_\ell} \right) = \tilde{\mathbf{x}}(t),$$

határérték is, azaz a (8) kontrollpoligon az $\tilde{\mathbf{x}}$ görbéhez konvergál, amint $n \rightarrow \infty$.

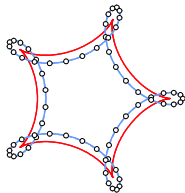
Egy zárt görbecsalád egzakt leírása

Egy hipociklois egzakt leírása

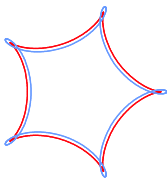
Példa [alkalmazás]



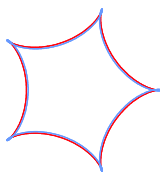
$n = 16$



$n = 32$



$n = 64$



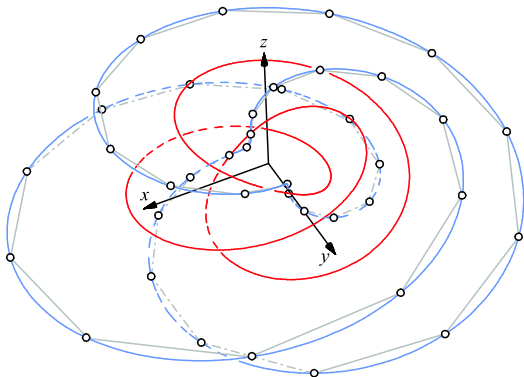
$n = 128$

5. ábra. $\tilde{x}_1(t) = 4 \cos(t) + \cos(4t)$, $\tilde{x}_2(t) = 4 \sin(t) - \sin(4t)$

Egy zárt görbecsalád egzakt leírása

Egy (2,3)-ad rendű tórusz csomó egzakt leírása

Példa [alkalmazás] [alkalmazás]



6. ábra. $\tilde{x}_1(t) = (2 + \cos \frac{2t}{3}) \cos t$, $\tilde{x}_2(t) = (2 + \cos \frac{2t}{3}) \sin t$, $\tilde{x}_3(t) = \sin \frac{2t}{3}$, $t \in [0, 6\pi]$

Egy zárt felületcsalád egzakt leírása

Egy zárt felületekből álló család/osztály

Egy zárt felületekből álló osztály

Olyan zárt felületek mint az ellipszoidok (sajátságosan gömbök), tóruszok, más forgásfelületek, Steiner római felülete stb. egy általános felületosztálynak a tagjai, amely elemeit az

$$\begin{cases} \mathbf{s} : [-2\pi, 0]^\delta \rightarrow \mathbb{R}^{\delta+\kappa}, \delta \geq 2, \kappa \geq 1, \\ \mathbf{s}(\mathbf{u}) = [s_1(\mathbf{u}) \quad s_2(\mathbf{u}) \quad \dots \quad s_{\delta+\kappa}(\mathbf{u})]^T, \mathbf{u} = (u_1, u_2, \dots, u_\delta), \end{cases}$$

alakban adhatjuk meg, ahol

$$\begin{aligned} s_\ell(\mathbf{u}) &= s_\ell \left(\mathbf{u}, \left\{ \left\{ (\alpha_p^{\ell j}, \psi_p^{\ell j}) \right\}_{p \in P_{\ell j}}, \left\{ (\beta_q^{\ell j}, \varphi_q^{\ell j}) \right\}_{q \in Q_{\ell j}} \right\}_{j=1}^\delta \right) \\ &= \prod_{j=1}^\delta \left(\sum_{p \in P_{\ell j}} \alpha_p^{\ell j} \cos(pu_j + \psi_p^{\ell j}) + \sum_{q \in Q_{\ell j}} \beta_q^{\ell j} \sin(qu_j + \varphi_q^{\ell j}) \right) \end{aligned} \quad (9)$$

$(\ell = 1, 2, \dots, \delta + \kappa)$ és $P_{\ell j} \subset \mathbb{N}$, $Q_{\ell j} \subset \mathbb{N}^* = \mathbb{N} \setminus \{0\}$, $\alpha_p^{\ell j}, \beta_q^{\ell j}, \psi_p^{\ell j}, \varphi_q^{\ell j} \in \mathbb{R}$.

Egy zárt felületcsalád egzakt leírása

Tétel

Legyen \mathbf{s} eleme a (9) felületcsaládnak.

Minden $j = 1, 2, \dots, \delta$ esetén legyen

$$n_j \geq n_{\min}^j = \max_{l=1,2,\dots,\delta+\kappa} \{e_j \mid e_j \in P_{lj} \cup Q_{lj}\}$$

és képezzük a

$$[\mathbf{d}_{i_1 i_2 \dots i_\delta}]_{i_1=0, i_2=0, \dots, i_\delta=0}^{2n_1, 2n_2, \dots, 2n_\delta} \in \mathcal{M}_{2n_1+1, 2n_2+1, \dots, 2n_\delta+1}(\mathbb{R}^{\delta+\kappa})$$

kontrollhálót, ahol

$$\mathbf{d}_{i_1 i_2 \dots i_\delta} = [s_1(\mathbf{u}^*) \quad s_2(\mathbf{u}^*) \quad \dots \quad s_{\delta+\kappa}(\mathbf{u}^*)]^T,$$

és

$$\mathbf{u}^* = \left(-\frac{2\pi i_1}{2n_1+1}, -\frac{2\pi i_2}{2n_2+1}, \dots, -\frac{2\pi i_\delta}{2n_\delta+1} \right) \in \mathbb{R}^\delta.$$

Egy zárt felületcsalád egzakt leírása

Tétel – folytatás

Ugyanakkor tekintsük az

$$\begin{cases} \mathbf{f}_{n_1, n_2, \dots, n_\delta} : [-2\pi, 0]^\delta \rightarrow \mathbb{R}^{\delta+\kappa}, \\ \mathbf{f}_{n_1, n_2, \dots, n_\delta}(\mathbf{u}) = \sum_{i_1=0}^{2n_1} \sum_{i_2=0}^{2n_2} \dots \sum_{i_\delta=0}^{2n_\delta} B_{i_1, n_1}(u_1) B_{i_2, n_2}(u_2) \dots B_{i_\delta, n_\delta}(u_\delta) \mathbf{d}_{i_1 i_2 \dots i_\delta}, \end{cases}$$

tenszorszorzattal értelmezett zárt ciklikus felületet.

Ezekkel a beállításokkal az $\mathbf{f}_{n_1, n_2, \dots, n_\delta}$ ciklikus felület ℓ -ik ($\ell = 1, 2, \dots, \delta + \kappa$) koordináta függvénye az

$$f_\ell(\mathbf{u}) = \prod_{j=1}^{\delta} \frac{1}{\binom{2n_j}{n_j}} \left(\sum_{p \in P_{\ell j}} \alpha_p^{\ell j} \binom{2n_j}{n_j - p} \cos(pu_j + \psi_p^{\ell j}) + \sum_{q \in Q_{\ell j}} \beta_q^{\ell j} \binom{2n_j}{n_j - q} \sin(qu_j + \varphi_q^{\ell j}) \right).$$

alakra hozható.

Egy zárt felületcsalád egzakt leírása

Következmény

Legyen az előző tételben $\delta = 2$ és $\kappa = 1$. Tekintsük azt az

$$\tilde{\mathfrak{s}}(u_1, u_2) = [\tilde{s}_1(u_1, u_2) \quad \tilde{s}_2(u_1, u_2) \quad \tilde{s}_3(u_1, u_2)], (u_1, u_2) \in [-2\pi, 0] \times [-2\pi, 0],$$

zárt felületet, az

$$\tilde{s}_\ell(u_1, u_2) = \prod_{j=1}^2 \left(\sum_{p \in P_{\ell j}} \tilde{\alpha}_p^{\ell j} \cos(pu_j + \tilde{\psi}_p^{\ell j}) + \sum_{q \in Q_{\ell j}} \tilde{\beta}_q^{\ell j} \sin(qu_j + \tilde{\varphi}_q^{\ell j}) \right), \quad (10)$$

($\ell = 1, 2, 3$) koordinátafüggvényekkel, ahol $P_{\ell j} \subset \mathbb{N}$, $Q_{\ell j} \subset \mathbb{N}^* = \mathbb{N} \setminus \{0\}$ és $\tilde{\alpha}_p^{\ell j}, \tilde{\beta}_q^{\ell j}, \tilde{\psi}_p^{\ell j}, \tilde{\varphi}_q^{\ell j} \in \mathbb{R}$.

Egy zárt felületcsalád egzakt leírása

Következmény – folytatás

Legyen

$$n_j \geq n_{\min}^j = \max_{\ell=1,2,3} \{e_j \mid e_j \in P_{\ell 1} \cup Q_{\ell 1}\}, \quad j = 1, 2.$$

Ha az előző tételbeli

$$\mathbf{s}(u_1, u_2) = [s_1(u_1, u_2) \quad s_2(u_1, u_2) \quad s_3(u_1, u_2)]^T$$

felület előállításában megjelenő paramétereket az

$$\alpha_p^{\ell 1}(n_1) = \frac{\binom{2n_1}{n_1}}{\binom{2n_1}{n_1-p}} \tilde{\alpha}_p^{\ell 1}, \quad \psi_p^{\ell 1}(n_1) \equiv \tilde{\psi}_p^{\ell 1}, \quad p \in P_{\ell 1}, \quad (11)$$

$$\beta_q^{\ell 1}(n_1) = \frac{\binom{2n_1}{n_1}}{\binom{2n_1}{n_1-q}} \tilde{\beta}_q^{\ell 1}, \quad \varphi_q^{\ell 1}(n_1) \equiv \tilde{\varphi}_q^{\ell 1}, \quad q \in Q_{\ell 1}, \quad (12)$$

$$\alpha_p^{\ell 2}(n_2) = \frac{\binom{2n_2}{n_2}}{\binom{2n_2}{n_2-p}} \tilde{\alpha}_p^{\ell 2}, \quad \psi_p^{\ell 2}(n_2) \equiv \tilde{\psi}_p^{\ell 2}, \quad p \in P_{\ell 2}, \quad (13)$$

$$\beta_q^{\ell 2}(n_2) = \frac{\binom{2n_2}{n_2}}{\binom{2n_2}{n_2-q}} \tilde{\beta}_q^{\ell 2}, \quad \varphi_q^{\ell 2}(n_2) \equiv \tilde{\varphi}_q^{\ell 2}, \quad q \in Q_{\ell 2}, \quad (14)$$

Egy zárt felületcsalád egzakt leírása

Következmény – folytatás

módon választjuk meg, akkor minden $n_1 \geq n_{\min}^1$ és $n_2 \geq n_{\min}^2$ esetén a

$$\mathbf{d}_{i_1 i_2} = \begin{bmatrix} s_1 \left(-\frac{2\pi i_1}{2n_1+1}, -\frac{2\pi i_2}{2n_2+1} \right) \\ s_2 \left(-\frac{2\pi i_1}{2n_1+1}, -\frac{2\pi i_2}{2n_2+1} \right) \\ s_3 \left(-\frac{2\pi i_1}{2n_1+1}, -\frac{2\pi i_2}{2n_2+1} \right) \end{bmatrix}, \quad (15)$$

($i_1 = 0, 1, \dots, 2n_1$, $i_2 = 0, 1, \dots, 2n_2$) kontrollpontok pontosan az $\tilde{\mathbf{s}}$ felületet generálják.

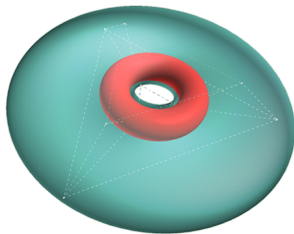
Az is nyilvánvaló, hogy az $\tilde{\mathbf{s}}$ felületet végtelen sokféleképpen előállíthatjuk és igaz a

$$\lim_{n_1 \rightarrow \infty, n_2 \rightarrow \infty} \mathbf{s} \left(\mathbf{u}, \left\{ \left\{ \left(\alpha_p^{\ell j}(n_j), \psi_p^{\ell j}(n_j) \right) \right\}_{p \in P_{\ell j}}, \left\{ \left(\beta_q^{\ell j}(n_j), \varphi_q^{\ell j}(n_j) \right) \right\}_{q \in Q_{\ell j}} \right\}_{j=1, \ell=1}^{2,3} \right) \\ = \tilde{\mathbf{s}}(u_1, u_2)$$

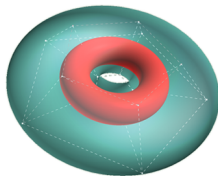
határérték, azaz a (15) kontrollháló az $\tilde{\mathbf{s}}$ felülethez tart, amikor az $n_1 \rightarrow \infty$ és $n_2 \rightarrow \infty$.

Egy zárt felületcsalád egzakt leírása

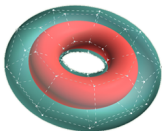
Példa [alkalmazás]



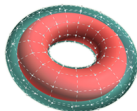
$$n_1 = n_2 = 1$$



$$n_1 = 1, n_2 = 2$$



$$n_1 = 2, n_2 = 4$$



$$n_1 = 4, n_2 = 8$$

7. ábra. Egy tórusz egzakt leírása. Megfigyelhető a kontrollháló konvergenciája

A

$$\mathcal{V}_n = \langle 1, \cos(t), \sin(t), \dots, \cos(nt), \sin(nt) \rangle$$

vektortérnek egy olyan új bázisát szerkesztettük meg, amellyel végtelenszer sima (és nem eltűnő (parciális) deriváltakkal rendelkező) zárt görbék és felületek modellezésére alkalmas.

A

$$\mathcal{V}_n = \langle 1, \cos(t), \sin(t), \dots, \cos(nt), \sin(nt) \rangle$$

vektortérnek egy olyan új bázisát szerkesztettük meg, amellyel végtelenszer sima (és nem eltűnő (parciális) deriváltakkal rendelkező) zárt görbék és felületek modellezésére alkalmas.

Előnyös tulajdonságok

- a ciklikus görbe/felület a kontrollpoligon/háló konvex burkában található;

A

$$\mathcal{V}_n = \langle 1, \cos(t), \sin(t), \dots, \cos(nt), \sin(nt) \rangle$$

vektortérnek egy olyan új bázisát szerkesztettük meg, amellyel végtelenszer sima (és nem eltűnő (parciális) deriváltakkal rendelkező) zárt görbék és felületek modellezésére alkalmas.

Előnyös tulajdonságok

- a ciklikus görbe/felület a kontrollpoligon/háló konvex burkában található;
- pszeudo-lokális változtathatóság;

A

$$\mathcal{V}_n = \langle 1, \cos(t), \sin(t), \dots, \cos(nt), \sin(nt) \rangle$$

vektortérnek egy olyan új bázisát szerkesztettük meg, amellyel végtelenszer sima (és nem eltűnő (parciális) deriváltakkal rendelkező) zárt görbék és felületek modellezésére alkalmas.

Előnyös tulajdonságok

- a ciklikus görbe/felület a kontrollpoligon/háló konvex burkában található;
- pszeudo-lokális változtathatóság;
- a kontrollpontokat ciklikusan permutálhatjuk és az eredeti ciklikus görbével/felülettel megegyező görbét/felületet kapunk;

A

$$\mathcal{V}_n = \langle 1, \cos(t), \sin(t), \dots, \cos(nt), \sin(nt) \rangle$$

vektortérnek egy olyan új bázisát szerkesztettük meg, amellyel végtelenszer sima (és nem eltűnő (parciális) deriváltakkal rendelkező) zárt görbék és felületek modellezésére alkalmas.

Előnyös tulajdonságok

- a ciklikus görbe/felület a kontrollpoligon/háló konvex burkában található;
- pszeudo-lokális változtathatóság;
- a kontrollpontokat ciklikusan permutálhatjuk és az eredeti ciklikus görbével/felülettel megegyező görbét/felületet kapunk;
- a ciklikus görbe/felület invariáns a kontrollpoligonjának/hálójának affin transzformációival szemben;

A

$$\mathcal{V}_n = \langle 1, \cos(t), \sin(t), \dots, \cos(nt), \sin(nt) \rangle$$

vektortérnek egy olyan új bázisát szerkesztettük meg, amellyel végtelenszer sima (és nem eltűnő (parciális) deriváltakkal rendelkező) zárt görbék és felületek modellezésére alkalmas.

Előnyös tulajdonságok

- a ciklikus görbe/felület a kontrollpoligon/háló konvex burkában található;
- pszeudo-lokális változtathatóság;
- a kontrollpontokat ciklikusan permutálhatjuk és az eredeti ciklikus görbével/felülettel megegyező görbét/felületet kapunk;
- a ciklikus görbe/felület invariáns a kontrollpoligonjának/hálójának affin transzformációival szemben;
- fokszám növelés, mely az eredeti ciklikus görbéhez/felülethez konvergáló kontrollpoligont/hálót eredményez;

A

$$\mathcal{V}_n = \langle 1, \cos(t), \sin(t), \dots, \cos(nt), \sin(nt) \rangle$$

vektortérnek egy olyan új bázisát szerkesztettük meg, amellyel végtelenszer sima (és nem eltűnő (parciális) deriváltakkal rendelkező) zárt görbék és felületek modellezésére alkalmas.

Előnyös tulajdonságok

- a ciklikus görbe/felület a kontrollpoligon/háló konvex burkában található;
- pszeudo-lokális változtathatóság;
- a kontrollpontokat ciklikusan permutálhatjuk és az eredeti ciklikus görbével/felülettel megegyező görbét/felületet kapunk;
- a ciklikus görbe/felület invariáns a kontrollpoligonjának/hálójának affin transzformációival szemben;
- fokszám növelés, mely az eredeti ciklikus görbéhez/felülethez konvergáló kontrollpoligont/hálót eredményez;
- a ciklikus görbe rendelkezik a hullámzást csökkentő tulajdonsággal;

A

$$\mathcal{V}_n = \langle 1, \cos(t), \sin(t), \dots, \cos(nt), \sin(nt) \rangle$$

vektortérnek egy olyan új bázisát szerkesztettük meg, amellyel végtelenszer sima (és nem eltűnő (parciális) deriváltakkal rendelkező) zárt görbék és felületek modellezésére alkalmas.

Előnyös tulajdonságok

- a ciklikus görbe/felület a kontrollpoligon/háló konvex burkában található;
- pszeudo-lokális változtathatóság;
- a kontrollpontokat ciklikusan permutálhatjuk és az eredeti ciklikus görbével/felülettel megegyező görbét/felületet kapunk;
- a ciklikus görbe/felület invariáns a kontrollpoligonjának/hálójának affin transzformációival szemben;
- fokszám növelés, mely az eredeti ciklikus görbéhez/felülethez konvergáló kontrollpoligont/hálót eredményez;
- a ciklikus görbe rendelkezik a hullámzást csökkentő tulajdonsággal;
- számos klasszikus mérnöki alkalmazásban megjelenő zárt görbét/felületet egzaktul leírhatunk a segítségükkel.

Hátrányos tulajdonság

- A minimális fokszámmal leírt kontrollpoligon/háló távol áll a kontrollpontok által generált ciklikus görbétől/felülettől (de ezen segít a fokszám növelési eljárás).

Köszönöm a lehetőséget!

