Babeș-Bolyai Tudományegyetem, Kolozsvár
Matematika és Informatika Kar

ZÁRÓVIZSGA
Írásbeli vizsga – 2016. szeptember 5.
Matematika szak

1. Az $\mathbb{R}^3$ valós vektortérben tekintjük a $v_1 = (1,0,0)$, $v_2 = (1,2,0)$ és $v_3 = (1,2,a)$ vektorokat, ahol $a \in \mathbb{R}$.
   a) Igazoljuk, hogy a v_1 és v_2 vektorok lineárisan függetlenek az $\mathbb{R}^3$ valós vektortérben.
   b) Határozzuk meg az a valós paraméter azon értékeit, melyekre (v_1, v_2, v_3) bázis az $\mathbb{R}^3$ valós vektortérben.

2. a) Legyen $n \in \mathbb{N}$ tetszőlegesen rögzített. Igazoljuk, hogy $n\mathbb{Z} = \{nk \mid k \in \mathbb{Z}\}$ részcsoportja a $(\mathbb{Z},+)$ csoportnak.
   b) Határozzuk meg az alábbi halmazt
   $$A = \left\{ x \in \mathbb{N} \mid x = \frac{n^2+1}{n-1},\ n \in \mathbb{N} \right\}.$$
   c) Határozzuk meg azon $n \in \mathbb{N}$ értékeket, melyekre az $(n^2+1)\mathbb{Z}$ halmaz részcsoportja az $((n-1)\mathbb{Z},+)$ csoportnak.

3. Tekintsük az alábbi $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvényeket:
   $$f(x) = \operatorname{arctg} x, \qquad g(x) = f(x+1) - f(x) - f\left(\frac{1}{1+x+x^2}\right).$$
   a) Számoljuk ki: $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$.
   b) Igazoljuk, hogy $g(x) = 0$ bármely $x \in \mathbb{R}$-re.
   c) Határozzuk meg: $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{arctg} \frac{1}{1+n+n^2}$.

4. Az $A(5,-1)$ pont egy olyan négyzetnek az egyik csúcsa, melynek egyik oldala az alábbi egyenlettel megadott egyenesen fekszik:
   $$4x - 3y - 7 = 0.$$
   Írjuk fel azon egyenesek egyenleteit, melyeken a négyzet többi oldala fekszik. Hány megoldása van a feladatnak? (Grafikus ábrázolás is szükséges.)

5. Tekintsük az $[ABCDA'B'C'D']$ kockát az $Oxyz$ koordinátarendszerben, melynek az A, B, D és A' csúcsait a $(0,0,0)$, $(a,0,0)$, $(0,a,0)$ illetve $(0,0,a)$ koordinátájú pontok adják meg, ahol $a > 0$.
   a) Határozzuk meg azon sík egyenletét, mely tartalmazza a C' pontot és merőleges az $A'C$ egyenesre.
   b) Határozzuk meg a C' pont $A'C$ egyenesre való P vetületének koordinátáit.
   c) Bizonyítsuk be, hogy az AP és $D'P$ egyenesek merőlegesek egymásra.

Universitatea Babeş-Bolyai Cluj-Napoca
Facultatea de Matematică şi Informatică
Specializarea Matematică

EXAMEN DE LICENŢĂ
Proba scrisă – 5 septembrie 2016
Specializarea Matematică
Barem de corectare

Algebră

Oficiu .... 1 pt

1. a) v_1 şi v_2 sunt liniar independenţi dacă (şi numai dacă)
$\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R},\ \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 = (0,0,0) \Rightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = 0.$ .... 1 pt
$\alpha_1(1,0,0)1 + \alpha_2(1,2,0) = (0,0,0) \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 = 0 \\ 2\alpha_2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha_1 = 0 \\ \alpha_2 = 0 \end{cases}$ .... 1,5 pt
Concluzia .... 0,5 pt

b) (v_1, v_2, v_3) bază în ${}_{\mathbb{R}}\mathbb{R}^3 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & a \end{vmatrix} \neq 0 \Leftrightarrow a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ .... 2 pt

2. a) Aplicarea teoremei de caracterizare a subgrupului (mulţimea $n\mathbb{Z}$ a multiplilor întregi de n este nevidă şi diferenţa oricăror multipli de n e multiplu de n) .... 1,5 pt

b) $x = \dfrac{n^2+1}{n-1} = \dfrac{n^2-1+2}{n-1} = n+1+\dfrac{2}{n-1} \in \mathbb{N} \Rightarrow (n-1)\,|\,2 \Rightarrow n-1 \in \{-2,-1,1,2\}$,
adică $n \in \{-1,0,2,3\}$ .... 1 pt
Atunci $n \in \{0,2,3\}$, $\dfrac{n^2+1}{n-1} \in \{-1,5\}$ şi cum $x \in \mathbb{N}$, deducem $A = \{5\}$ .... 0,5 pt

c) Cum $(n^2+1)\mathbb{Z}$ şi $(n-1)\mathbb{Z}$ sunt grupuri în raport cu operaţia indusă de $+$ din $(\mathbb{Z},+)$, condiţia $(n^2+1)\mathbb{Z} \leq ((n-1)\mathbb{Z},+)$ devine, succesiv,
$(n^2+1)\mathbb{Z} \subseteq (n-1)\mathbb{Z} \Leftrightarrow (n-1)|(n^2+1)$ (în $\mathbb{Z}$) $\Leftrightarrow n \in \{0,2,3\}$ .... 1 pt

Analiză

Oficiu 1pt

3. (a) $\displaystyle\int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 (x)'\operatorname{arctg} x dx = x \operatorname{arctg} x\Big|_0^1 - \int_0^1 \frac{x}{x^2+1}dx$ 2pt
$\displaystyle\int_0^1 f(x)dx = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\ln(x^2+1)\Big|_0^1 = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\ln 2$ 1pt

(b) $g'(x) = \dfrac{1}{1+(x+1)^2} - \dfrac{1}{1+x^2} - \dfrac{1}{1+\frac{1}{(1+x+x^2)^2}}\left(-\dfrac{1+2x}{(1+x+x^2)^2}\right)$ 1pt
$g'(x) = \dfrac{-2x-1}{\big(1+(x+1)^2\big)(1+x^2)} + \dfrac{2x+1}{1+(1+x+x^2)^2}$ 0.5pt
$g'(x) = (2x+1)\left(\dfrac{1}{x^4+2x^3+3x^2+2x+2} - \dfrac{1}{x^4+2x^3+3x^2+2x+2}\right) = 0$ 1pt
$\Rightarrow$ g este constantă și cum $g(0) = 0$, rezultă $g(x) = 0,\ \forall x \in \mathbb{R}$ 0.5pt

(c) $s_n = \sum_{k=1}^{n} \operatorname{arctg} \frac{1}{1+k+k^2} = \sum_{k=1}^{n} \Big(\operatorname{arctg}(k+1) - \operatorname{arctg} k\Big)$ 1pt

$s_n = \operatorname{arctg}(n+1) - \operatorname{arctg} 1 = \operatorname{arctg}(n+1) - \frac{\pi}{4}$ 1pt

$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} s_n = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}$ 1pt

Geometrie

Oficiu 1pt

4. reprezentarea grafică 2pt

ecuația dreptei care trece prin A și este paralelă cu dreapta dată $d: \ 4x-3y-7=0$ 1pt

determinarea vârfurilor pătratelor 2pt

determinarea laturilor pătratelor 1pt

5. a) 1pt

b) 1pt

c) 1pt