UNIVERSITATEA "BABEŞ-BOLYAI" CLUJ-NAPOPCA
FACULTATEA DE MATEMATICĂ ŞI INFORMATICĂ

EXAMEN DE LICENŢĂ
SPECIALIZAREA MATEMATICĂ
Iulie 2016

Subiectul I. **Algebră**

1) Daţi un exemplu de spaţiu vectorial real de tip finit în care daţi apoi un exemplu de subspaţiu de dimensiune 3 şi un exemplu de submulţime care nu este subspaţiu. Justificaţi răspunsurile date.

2) Să se arate că:

a) $2\mathbb{Z}$ este subgrup al grupului $(\mathbb{Z},+)$;

b) $2\mathbb{Z}\cap 3\mathbb{Z}=6\mathbb{Z}$ şi $2\mathbb{Z}+3\mathbb{Z}=\mathbb{Z}$;

c) $f:\mathbb{Z}\to 2\mathbb{Z}$, $f(x)=2x$ este un izomorfism între grupurile $(\mathbb{Z},+)$ şi $(2\mathbb{Z},+)$;

d) $2\mathbb{Z}$ este subinel al inelului $(\mathbb{Z},+,\cdot)$.

Este f un izomorfism de inele? Justificaţi răspunsul.

Subiectul II. **Analiză matematică**

1) Enunţaţi teorema lui Taylor.

2) Scrieţi polinomul lui Taylor de ordinul n în punctul zero pentru funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$,
$$f(x)=\begin{cases} e^{-1/x}, & \text{dacă } x>0\\ 0, & \text{dacă } x\le 0.\end{cases}$$

3) Enunţaţi teorema lui Newton-Leibniz.

4) Calculaţi $\displaystyle\int_1^e \frac{\sqrt{\ln x}}{x(1+\sqrt{\ln x})^2}\,dx.$

Subiectul III. **Geometrie**

1) În reperul cartezian ortonormat xOy se consideră punctele $O(0,0)$, $A(12,0)$, $B(\alpha+4,\beta)$, $C(\alpha,\beta)$, unde $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$, $\alpha\ge 0$, $\beta>0$ (unitatea de măsură este 1 cm). Fie $\{I\}=OB\cap AC$, $D\in OC$ astfel încât $ID\parallel OA$ şi $\{E\}=AD\cap BC$.

a) Determinaţi ecuaţiile dreptelor OB şi AC.

b) Determinaţi coordonatele punctelor I, D şi E.

c) Arătaţi că $ID=3\,\text{cm}$.

d) Demonstraţi că $CE\equiv BC$.

e) Determinaţi coordonatele simetricului punctului B faţă de dreapta DI.

f) Determinaţi ecuaţia dreptei BD.

g) Dacă $(DI$ este bisectoarea unghiului $\widehat{ADB}$, arătaţi că OABC este trapez dreptunghic.

2) Fie cubul $[ABCDA'B'C'D']$ raportat la reperul ortonormat $Oxyz$ şi fie $A=O(0,0,0)$, $B(a,0,0)$, $D(0,a,0)$, $A'(0,0,a)$, unde $a\in\mathbb{R}$, $a>0$. Fie M centrul pătratului $[ABCD]$, N mijlocul muchiei $[B'C']$, P mijlocul muchiei $[AA']$. Determinaţi aria triunghiului MNP.

UNIVERSITATEA "BABEŞ-BOLYAI" CLUJ-NAPOCA
FACULTATEA DE MATEMATICĂ ŞI INFORMATICĂ

EXAMEN DE LICENŢĂ
SPECIALIZAREA MATEMATICĂ
IUNIE 2016

BAREM DE NOTARE

Subiectul I. **Algebră**

Oficiu .... 1 punct

1) Exemplu corect de $\mathbb{R}$-spaţiu de dimensiune finită ≥ 3 .... 0,5 puncte

Exemplu corect de subspaţiu de dimensiune 3 .... 0,5 puncte

Exemplu corect de submulţime care nu este subspaţiu .... 0,5 puncte

Observaţie: În cazul unor exemple corecte care nu sunt consacrate, în lipsa justificărilor necesare, se vor acorda doar 0,75 puncte pe tot subiectul 1).

2) a) Demonstrarea faptului că $2\mathbb{Z} \leq \mathbb{Z}$ folosind teorema de caracterizare a subgrupului

- $2\mathbb{Z} \neq \emptyset$ .... 0,5 puncte
- diferenţa a doi multipli de 2 este multiplu de 2 .... 1 punct

b) $2\mathbb{Z} \cap 3\mathbb{Z} = 6\mathbb{Z}$ deoarece pentru $x \in \mathbb{Z}$,

$6|x \Leftrightarrow 2|x$ şi $3|x$ .... 1 punct

$2\mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Z}, 3\mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Z} \Rightarrow 2\mathbb{Z} + 3\mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Z} + \mathbb{Z} = \mathbb{Z}$ .... 0,5 puncte

$(2,3) = 1 \Rightarrow \exists m, n \in \mathbb{Z} : 1 = 2m + 3n \Rightarrow \mathbb{Z} \subseteq 2\mathbb{Z} + 3\mathbb{Z}$ .... 1,5 puncte

c) f omomorfism de grupuri .... 1 punct

f bijectivă .... 0,5 puncte

d) Demonstrarea faptului că $2\mathbb{Z}$ e subinel în $\mathbb{Z}$ folosind teorema de caracterizare a subinelului sau completarea lui a) cu faptul că produsul a două numere întregi pare e par .... 0,5 puncte

f nu e omomorfism de inele. Exemplu care să justifice afirmaţia (e.g. $2 = f(1) = f(1 \cdot 1) \neq f(1) \cdot f(1) = 2 \cdot 2 = 4$)........................ 1 punct

Subiectul II. **Analiză Matematică**

Oficiu .... 1 punct

1) enunţul teoremei .... 1 punct

2)calcularea lui $f'(x)$ pentru $x \neq 0$ .... 1 punct

$\lim_{x\searrow 0} f'(x) = 0$ .... 0,5 puncte

$\lim_{x\nearrow 0} f'(x) = 0$, există $f'(0) = 0$ .... 0,5 puncte

stabilirea lui $f^{(n)}(x) = \begin{cases} P_{2n}(\frac{1}{x})e^{-\frac{1}{x}}, & x > 0 \\ 0, & x < 0, \end{cases}$ unde P_{2n} este un polinom de grad $2n$ .... 1 punct

$\lim_{x\searrow 0} f^{(n)}(x) = 0$ .... 0,5 puncte

$\lim_{x\nearrow 0} f^{(n)}(x) = 0$, există $f^{(n)}(0) = 0$ .... 0,5 puncte

polinomul lui Taylor $T_n(f;0) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n = 0$ .... 0,5 puncte

3) enunţul teoremei .... 1 punct

4) notăm cu $I = \int \frac{\sqrt{\ln x}}{x(1+\sqrt{\ln x})^2}\,dx$ şi considerăm substituţia $t = \sqrt{\ln x}$ .. 0,5 puncte

$I = 2\int \frac{t^2}{(1+t)^2}\,dt$ .... 0,5 puncte

$I = 2\int \left(1 - \frac{2}{1+t} + \frac{1}{(1+t)^2}\right) dt$ .... 0,5 puncte

$I = 2\left(t - 2\ln(1+t) - \frac{1}{1+t}\right) + c = 2\left(\sqrt{\ln x} - 2\ln(1+\sqrt{\ln x}) - \frac{1}{1+\sqrt{\ln x}}\right) + c$

.... 0,5 puncte

$\int_1^e \frac{\sqrt{\ln x}}{x(1+\sqrt{\ln x})^2}\,dx = 3 - 4\ln 2$ .... 0,5 puncte.

Subiectul III. **Geometrie**

Oficiu .... 1 punct

1)

a) Ecuaţiile dreptelor OB şi AC .... 1 punct

b) Coordonatele lui I .... 0,5 puncte

Coordonatele lui D .... 0,5 puncte

Coordonatele lui E .... 1 punct

c) $ID = 3$ cm .... 0,5 puncte

d) $CE \equiv BC$ .... 0,5 puncte

e) Coordonatele simetricului .... 0,5 puncte

f) Ecuaţia dreptei BD .... 0,5 puncte

g) $(DI$ bisectoare $\Rightarrow OABC$ trapez dreptunghic .... 2 puncte.

2) Aria triunghiului MNP .... 2 puncte.

NOTĂ: Orice altă soluţie corectă va fi punctată corespunzător.