

EXAMEN DE LICENȚĂ
SPECIALIZAREA MATEMATICĂ
Iunie, 2015

Subiectul I. **Algebră**

1. Definiți izomorfismul de grupuri. Demonstrați faptul că aplicația inversă a unui astfel de izomorfism este un izomorfism.
2. Găsiți cel mai mic număr natural n pentru care 10 divide numărul $2^{2015} + n$.
3. Se consideră aplicația $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $f(x, y, z) = (x + y, 2x - y + z)$. Arătați că vectorii $v = (v_1, v_2, v_3) = ((1, 0, 1), (0, 1, 1), (1, 1, 1))$ formează o bază în \mathbb{R}^3 . Arătați că f este liniară și găsiți matricea $[f]_{v,w}$ a funcției f în raport cu bazele v, w , unde w este baza canonică din \mathbb{R}^2 .

Subiectul II. **Analiză Matematică**

1. Enunțați și demonstrați criteriul raportului (D'Alembert) pentru convergența unei serii cu termeni pozitivi.
2. Calculați limita șirului $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^n}{3^n \cdot n!}$.
3. Găsiți o primitivă definită pe \mathbb{R} a funcției $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = |x| e^{2x}$.

Subiectul III. **Geometrie.**

1. Distanța de la un punct la o dreaptă în plan (formulă și deducere).
2. Se consideră cubul $ABCD A' B' C' D'$ având punctele A, B, D, A' de coordonate respectiv: $(0, 0, 0)$, $(a, 0, 0)$, $(0, a, 0)$, $(0, 0, a)$, $a > 0$. Fie M mijlocul muchiei $[CC']$.
 - (a) Să se determine ecuațiile planelor $(AB'M)$ și $(A'MC')$.
 - (b) Calculați măsura unghiului diedru dintre planele $(AB'M)$ și $(A'MC')$.
 - (c) Să se determine un vector director al dreptei de intersecție a planelor $(AB'M)$ și $(A'MC')$.
 - (d) Să se scrie ecuația planului care trece prin mijlocul segmentului $[AM]$ și este perpendicular pe dreapta AM .

Notă.

Timp de lucru: 3 ore

Toate subiectele sunt obligatorii

Pentru fiecare subiect se acordă o notă întreaga de la 1 la 10.

EXAMEN DE LICENȚĂ
SPECIALIZAREA MATEMATICĂ Iunie, 2015
Barem de corectare

Subiectul I. **Algebră**

Oficiu	1p
1. (a) Definiția	1p
(b) Demonstrația	2p
2. (a) Calculul $2^1, \dots, 2^5 \pmod{10}$	1p
(b) Observarea periodicității	1p
(c) Finalizare	1p
3. (a) Liniar independență vectorilor v_1, v_2, v_3	1p
(b) Demonstrarea liniarității	1p
(c) Calculul $f(v_1), f(v_2), f(v_3)$ și finalizare	1p

Subiectul II. **Analiză Matematică**

Oficiu	1p
1. ELIMINAT	
2. (a) Calcul raportului a_{n+1}/a_n	1p
(b) Calculul limitei raportului	1p
(c) Monotonia și deci convergența șirului	1p
(d) Trecerea la limită în relația $a_{n+1} = (a_{n+1}/a_n)a_n$ și concluzia: $L = 0$	1p
3. (a) Explicitare modulului	1p
(b) Integrarea celor 2 ramuri, integrare prin părți	2p
(c) Ajustarea constantelor pe baza continuității	1p
(d) Finalizare (cu justificare)	1p

Subiectul III. **Geometrie.**

Oficiu	1p
1. (a) Formula	1p
(b) Deducerea	3p
2. (a) Determinarea ecuațiilor (1+1)	2p
(b) Aplicarea formulei pentru unghiul dintre vectorii normali la plane	1p
(c) Vectorul director al dreptei de intersecție	1p
(d) Ecuația planului	1p

NOTĂ: Orice altă soluție corectă se va puncta corespunzător.