UNIVERSITATEA BABEŞ-BOLYAI CLUJ-NAPOCA
FACULTATEA DE MATEMATICĂ ŞI INFORMATICĂ

Proba scrisă a examenului de licenţă, 1 iulie 2019
Specializarea Matematică

SUBIECTUL I. Algebră

Fie $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$.

1. Să se arate că funcţia $f : M_2(\mathbb{R}) \to M_2(\mathbb{R})$, $f(X) = AX - XA$ este $\mathbb{R}$-liniară şi să se determine matricea $[f]_{e,e}$, unde e este baza canonică a $\mathbb{R}$-spaţiului $M_2(\mathbb{R})$.
2. Să se arate că mulţimea $V = \left\{ X = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R}) \mid AX = XA \right\}$ este subspaţiu al lui $M_2(\mathbb{R})$ şi să se determine o bază a lui V.
3. Să se determine dimensiunea imaginii $\mathrm{Im}(f)$ a funcţiei f, precum şi o bază lui $\mathrm{Im}(f)$.

SUBIECTUL II. Analiză matematică

1. Să se calculeze limita $\lim_{n\to\infty} \dfrac{a_1^\alpha + a_2^\alpha + \ldots + a_n^\alpha}{n^{1+\alpha}}$, unde $\alpha \in \mathbb{R}$ şi $(a_n)_{n\geq 1}$ este un şir cu termeni pozitivi, pentru care $\lim_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{n} = l \in (0, +\infty)$.
2. Calculaţi: $\displaystyle\int_{-1}^{1} \left(|x| + x^{2019}\right) e^{-x^2} dx.$

SUBIECTUL III. Geometrie

1. În planul euclidian raportat la reperul ortonormat xOy se dau dreptele:

$$\begin{aligned} d_1 &: 4x - y - 7 = 0 \\ d_2 &: x + 3y - 31 = 0 \\ d_3 &: x + 5y - 7 = 0. \end{aligned}$$

   Fie $\{A\} = d_1 \cap d_2$, $\{B\} = d_2 \cap d_3$ şi $\{C\} = d_3 \cap d_1$.

   a) Determinaţi coordonatele punctelor A, B şi C.
   b) Determinaţi ecuaţiile perpendicularelor din A pe dreapta d_3 şi din C pe dreapta d_2.
   c) Determinaţi coordonatele ortocentrului triunghiului ABC.
   d) Calculaţi aria triunghiului ABC.

2. Se dau dreptele AB, unde $A(-1, 0, 1)$ şi $B(-2, 1, 0)$, respectiv

$$d : \begin{cases} x + y + z - 1 = 0 \\ 2x - y - 5z = 0 \end{cases}.$$

   Să se calculeze distanţa dintre cele două drepte.

Notă.
- Toate subiectele sunt obligatorii. La toate subiectele se cer rezolvări cu soluţii complete.
- Nota lucrării este media aritmetică a notelor de la cele trei subiecte.
- Nota minimă ce asigură promovarea este 5,00.
- Timpul efectiv de lucru este de 3 ore.

UNIVERSITATEA BABEŞ-BOLYAI CLUJ-NAPOCA
FACULTATEA DE MATEMATICĂ ŞI INFORMATICĂ

Proba scrisă a examenului de licenţă, 1 iulie 2019
Specializarea Matematică
– Barem de corectare şi soluţii -

SUBIECTUL I. Algebră

Oficiu .... (1p)

1. Avem $f(aX+bY) = A(aX+bY) - (aX+bY)A = a(AX - XA) + b(AY - YA) = af(X) + bf(Y)$
pentru orice $a, b \in \mathbb{R}$ şi $X, Y \in M_2(\mathbb{R})$ .... (0,5p)
Fie $e = (E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22})$ baza canonică a lui $M_2(\mathbb{R})$, unde $E_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $E_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$,
$E_{21} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ şi $E_{22} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. .... (0,5p)
Avem $f(E_{11}) = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, $f(E_{12}) = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, $f(E_{21}) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$, $f(E_{22}) = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ .... (1p)
Rezultă că $[f]_{e,e} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 0 \\ -2 & -2 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$ .... (1p)

2. Observăm că $V = \mathrm{Ker}(f)$, deci V este subspaţiu .... (0,5p)
(Altfel, se verifică direct că $0_2 \in M_2(\mathbb{R})$ şi $aX + bY \in V$ pentru orice $a, b \in \mathbb{R}$ şi $X, Y \in V$;
într-adevăr, avem $A0_2 = 0_2A = 0_2$; $A(aX + bY) = aAX + bAY = aXA + bYA = (aX + bY)A$.)
Fie $X = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$; calculând $AX = \begin{pmatrix} x+2y & y+2t \\ -x+3z & -y+3t \end{pmatrix}$ şi $XA = \begin{pmatrix} x-y & 2x+3y \\ z-t & 2z+3t \end{pmatrix}$
sau folosind matricea $[f]_{e,e}$, obţinem sistemul omogen

$$[f]_{e,e}[x\ y\ z\ t]^t = [0\ 0\ 0\ 0]^t, \quad \text{care devine} \quad \begin{cases} y + 2z & = 0 \\ x + y - t & = 0 \\ -x + 2z + t & = 0 \end{cases};$$

.... (1p)
Rangul matricei sistemului este $\mathrm{rang}[f]_{e,e} = 2$ şi putem alege necunoscutele secundare $z = \alpha$, $t = \beta \in \mathbb{R}$.
Obţinem soluţia sistemului: $(x, y, z, t) = (2\alpha + \beta, -2\alpha, \alpha, \beta) = \alpha(2, -2, 1, 0) + \beta(1, 0, 0, 1)$,
unde $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ sunt parametri independenţi .... (1p)
Rezultă că $\dim V = 2$ şi matricele $B_1 = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ şi $B_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ formează o bază a lui V ...... (0,5p)

3. Ştim că $\dim \mathrm{Ker}(f) + \dim \mathrm{Im}(f) = \dim M_2(\mathbb{R}) = 4$, deci $\dim \mathrm{Im}(f) = 2$ .... (1p)
Matricele E_{ij}, $i, j = 1, 2$, de mai sus formează baza canonică a lui $M_2(\mathbb{R})$,
deci matricele $f(E_{ij})$, $i, j = 1, 2$, formează o familie de generatori ai lui $\mathrm{Im}(f)$ .... (1p)
Deoarece coloanele 1 şi 2 ale lui $[f]_{e,e} = 2$ sunt liniar independente, rezultă că matricele $f(E_{11})$
şi $f(E_{12})$ calculate la 1) formează o bază a lui $M_2(\mathbb{R})$ .... (1p)
(Sunt posibile şi alte alegeri a două coloane liniar independente.)

SUBIECTUL II. Analiză matematică

Oficiu .... (1,0p)

1. Cazul $\underline{\alpha + 1 > 0}$.

   Aplicăm teorema lui Cesàro-Stolz: $L := \lim_{n\to\infty} \frac{a_1^\alpha + a_2^\alpha + \ldots + a_n^\alpha}{n^{1+\alpha}} = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}^\alpha}{(n+1)^{1+\alpha} - n^{1+\alpha}}$ ...... (1,0p)

   $L = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{a_{n+1}}{n+1}\right)^\alpha \left(\frac{n+1}{n}\right)^\alpha \frac{\frac{1}{n}}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{1+\alpha} - 1} = l^\alpha \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n}}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{1+\alpha} - 1}$ .... (1,0p)

   Aplicăm regula lui L'Hospital: $L = l^\alpha \lim_{x\searrow 0} \frac{x}{(1+x)^{1+\alpha} - 1} = l^\alpha \lim_{x\searrow 0} \frac{1}{(1+\alpha)(1+x)^\alpha} = \frac{l^\alpha}{1+\alpha}$ ...... (1,0p)

   Cazul $\underline{\alpha = -1}$.

   $\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{a_n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{n} = l \in (0, +\infty)$ .... (0,5p)

   Seria $\sum_{n\ge 1} \frac{1}{n}$ este divergentă .... (0,5p)

   $\lim_{n\to\infty} \left(a_1^{-1} + a_2^{-1} + \ldots + a_n^{-1}\right) = +\infty$ .... (0,25p)

   Cazul $\underline{\alpha + 1 < 0}$.

   $\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n^{-\alpha}}}{\frac{1}{a_n^{-\alpha}}} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{a_n}{n}\right)^{-\alpha} = l^{-\alpha} \in (0, +\infty)$ .... (0,5p)

   Seria $\sum_{n\ge 1} \frac{1}{n^{-\alpha}}$ este convergentă $(-\alpha > 1)$ .... (0,5p)

   Seria $\sum_{n\ge 1} \frac{1}{a_n^{-\alpha}}$ este convergentă $(-\alpha > 1)$ .... (0,25p)

   $\lim_{n\to\infty} n^{-1-\alpha} = +\infty$ .... (0,25p)

   $\lim_{n\to\infty} \frac{a_1^\alpha + a_2^\alpha + \ldots + a_n^\alpha}{n^{1+\alpha}} = \lim_{n\to\infty} n^{-1-\alpha} \left(\frac{1}{a_1^{-\alpha}} + \frac{1}{a_2^{-\alpha}} + \ldots + \frac{1}{a_n^{-\alpha}}\right) = +\infty$ .... (0,25p)

2. $I := \int_{-1}^{1} \left(|x| + x^{2019}\right) e^{-x^2} dx = \int_{-1}^{0} \left(-x + x^{2019}\right) e^{-x^2} dx + \int_{0}^{1} \left(x + x^{2019}\right) e^{-x^2} dx$ .... (1,0p)

   Schimbare de variabilă $x = -t$ pentru integrala considerată pe intervalul $[-1, 0]$ .... (1,0p)

   $I = \int_0^1 \left(t - t^{2019}\right) e^{-t^2} dt + \int_0^1 \left(x + x^{2019}\right) e^{-x^2} dx = \int_0^1 2xe^{-x^2} dx = -e^{-x^2} \Big|_0^1 = \frac{e-1}{e}$ .... (1,0p)

Soluţie

1. Distingem următoarele trei cazuri:

   (a) Cazul $\underline{\alpha + 1 > 0}$. Aplicăm teorema lui Cesàro-Stolz şi ipoteza $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{n} = l$:

$$
\begin{aligned}
L &:= \lim_{n\to\infty} \frac{a_1^\alpha + a_2^\alpha + \ldots + a_n^\alpha}{n^{1+\alpha}} = \lim_{n\to\infty} \frac{(a_1^\alpha + a_2^\alpha + \ldots + a_{n+1}^\alpha) - (a_1^\alpha + a_2^\alpha + \ldots + a_n^\alpha)}{(n+1)^{1+\alpha} - n^{1+\alpha}} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}^\alpha}{(n+1)^{1+\alpha} - n^{1+\alpha}} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{a_{n+1}}{n+1}\right)^\alpha \left(\frac{n+1}{n}\right)^\alpha \frac{\frac{1}{n}}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{1+\alpha} - 1} \\
&= l^\alpha \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n}}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{1+\alpha} - 1}.
\end{aligned}
$$

   Aplicăm regula lui L'Hospital:

$$
L = l^\alpha \lim_{x\searrow 0} \frac{x}{(1+x)^{1+\alpha} - 1} = l^\alpha \lim_{x\searrow 0} \frac{1}{(1+\alpha)(1+x)^\alpha} = \frac{l^\alpha}{1+\alpha}.
$$

   În continuare vom aplica următorul criteriu: *dacă* $\sum_{n\ge 1} a_n$ *şi* $\sum_{n\ge 1} b_n$ *sunt două serii cu termeni pozitivi astfel încât există* $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} \in (0, +\infty)$, *atunci seriile* $\sum_{n\ge 1} a_n$ *şi* $\sum_{n\ge 1} b_n$ *au aceeaşi natură.*

(b) Cazul $\underline{\alpha = -1}$. Avem $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{a_n}} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{n} = l \in (0, +\infty)$. Dar seria $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n}$ este divergentă, astfel

$$\lim_{n\to\infty} \left(a_1^{-1} + a_2^{-1} + \ldots + a_n^{-1}\right) = +\infty.$$

(c) Cazul $\underline{\alpha + 1 < 0}$. Avem $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n^{-\alpha}}}{\frac{1}{a_n^{-\alpha}}} = \lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{a_n}{n}\right)^{-\alpha} = l^{-\alpha} \in (0, +\infty)$. Dar seria $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^{-\alpha}}$ este convergentă, deoarece $-\alpha > 1$, astfel seria $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{a_n^{-\alpha}}$ este tot convergentă. Evident $\lim\limits_{n\to\infty} n^{-1-\alpha} = +\infty$. În concluzie

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_1^\alpha + a_2^\alpha + \ldots + a_n^\alpha}{n^{1+\alpha}} = \lim_{n\to\infty} n^{-1-\alpha} \left(\frac{1}{a_1^{-\alpha}} + \frac{1}{a_2^{-\alpha}} + \ldots + \frac{1}{a_n^{-\alpha}}\right) = +\infty.$$

2. Descompunem integrala dată în două:

$$I := \int_{-1}^{1} \left(|x| + x^{2019}\right) e^{-x^2}\, dx = \int_{-1}^{0} \left(-x + x^{2019}\right) e^{-x^2}\, dx + \int_{0}^{1} \left(x + x^{2019}\right) e^{-x^2}\, dx.$$

Efectuăm schimbarea de variabilă $x = -t$ pentru integrala considerată pe intervalul $[-1, 0]$. Atunci

$$I = \int_0^1 \left(t - t^{2019}\right) e^{-t^2}\, dt + \int_0^1 \left(x + x^{2019}\right) e^{-x^2}\, dx = \int_0^1 2xe^{-x^2}\, dx = -e^{-x^2}\Big|_0^1 = \frac{e-1}{e}.$$

SUBIECTUL III. Geometrie

Oficiu .... (1,0p)

1. a) Coordonatele punctului A se obţin rezolvând sistemul $\begin{cases} 4x - y - 7 &= 0 \\ x + 3y - 31 &= 0 \end{cases}$.

Rezultă $A(4, 9)$. .... (0,5p)

Coordonatele punctului B se obţin rezolvând sistemul $\begin{cases} x + 3y - 31 &= 0 \\ x + 5y - 7 &= 0 \end{cases}$.

Rezultă $B(67, -12)$ .... (0,5p)

Coordonatele punctului C se obţin rezolvând sistemul $\begin{cases} x + 5y - 7 &= 0 \\ 4x - y - 7 &= 0 \end{cases}$.

Rezultă $C(2, 1)$ .... (0,5p)

b) Panta dreptei d_3 este $-\frac{1}{5}$. Panta perpendicularei din A pe d_3 este 5.
Ecuaţia perpendicularei din A pe d_3 este $y - 9 = 5(x - 4) \Leftrightarrow 5x - y - 11 = 0$ .... (0,5p)
Panta dreptei d_2 este $-\frac{1}{3}$. Panta perpendicularei din C pe d_2 este 3.
Ecuaţia perpendicularei din C pe d_2 este $y - 1 = 3(x - 2) \Leftrightarrow 3x - y - 5 = 0$ .... (0,5p)

c) Coordonatele ortocentrului H se obţin rezolvând sistemul $\begin{cases} 5x - y - 11 &= 0 \\ 3x - y - 5 &= 0 \end{cases}$.

Rezultă $H(3, 4)$ .... (0,5p)

d) Aria triunghiului ABC este: $\frac{1}{2} \cdot \left| \begin{vmatrix} x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \\ x_C & y_C & 1 \end{vmatrix} \right| = 273$ .... (1,0p)

2. Ecuaţiile dreptei AB sunt: $\frac{x - x_A}{x_B - x_A} = \frac{y - y_A}{y_B - y_A} = \frac{z - z_A}{z_B - z_A} \Leftrightarrow \frac{x+1}{-1} = \frac{y}{1} = \frac{z-1}{-1}$ .... (1,0p)

Ecuaţiile dreptei d prin punct şi vector director se obţin (de exemplu) rezolvând sistemul format de ecuaţiile celor două plane: $\begin{cases} x + y + z - 1 &= 0 \\ 2x - y - 5z &= 0 \end{cases}$. Mulţimea soluţiilor este

$S = \{(\frac{1+4\alpha}{3}, \frac{2-7\alpha}{3}, \alpha) \mid \alpha \in \mathbb{R}\}$. Un vector director al dreptei d este $\vec{d}(4, -7, 3)$. Un punct pe dreapta d este $P(-1, 3, -1)$.

Rezultă ecuaţiile dreptei d: $\dfrac{x+1}{4} = \dfrac{y-3}{-7} = \dfrac{z+1}{3}$ .... (1,0p)

Distanţa dintre dreptele (necoplanare) AB şi d este $\delta(AB, d) = \dfrac{|(\vec{PA}, \vec{AB}, \vec{d})|}{\| \vec{AB} \times \vec{d} \|}$, unde

$\vec{PA}(x_A - x_P, y_A - y_P, z_A - z_P) \Leftrightarrow \vec{PA}(0, -3, 2)$, $\vec{AB}(-1, 1, -1)$, $\vec{d}(4, -7, 3)$.

Avem produsul mixt $(\vec{PA}, \vec{AB}, \vec{d}) = \begin{vmatrix} 0 & -3 & 2 \\ -1 & 1 & -1 \\ 4 & -7 & 3 \end{vmatrix} = 9$ .... (1,0p)

Produsul vectorial $\vec{AB} \times \vec{d} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & 1 & -1 \\ 4 & -7 & 3 \end{vmatrix} = -4\vec{i} - \vec{j} + 3\vec{k}$ .... (1,0p)

Rezultă distanţa $\delta(AB, d) = \dfrac{9}{\sqrt{26}}$ .... (1,0p)