UNIVERSITATEA BABEŞ-BOLYAI CLUJ-NAPOCA
FACULTATEA DE MATEMATICĂ ŞI INFORMATICĂ

Proba scrisă a examenului de licenţă, 3 iulie 2017
Specializarea Matematică

SUBIECTUL I. Algebră

Fie $d \in \mathbb{N}$ un număr natural liber de pătrate. Să se arate că:

1. Numărul real $\sqrt{d}$ este iraţional.
2. Numerele 1 şi $\sqrt{d}$ sunt liniar independente în $\mathbb{Q}$-spaţiul vectorial $\mathbb{R}$.
3. Mulţimea $K = \{x = a + b\sqrt{d} \mid a, b \in \mathbb{Q}\}$ este subcorp al corpului $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ al numerelor reale.
4. Mulţimea $M = \left\{X = \begin{pmatrix} a & db \\ b & a \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{Q}\right\}$ este subinel unital al inelului de matrice $(M_2(\mathbb{Q}), +, \cdot)$.
5. Dacă numerele $a, b \in \mathbb{Q}$ nu sunt ambele nule, atunci matricea $X = \begin{pmatrix} a & db \\ b & a \end{pmatrix}$ este inversabilă; în acest caz să se calculeze matricea inversă X^{-1}.
6. $(M, +, \cdot)$ este corp comutativ.
7. Corpurile $(K, +, \cdot)$ şi $(M, +, \cdot)$ sunt izomorfe.

SUBIECTUL II. Analiză matematică

1. Să se enunţe şi să se demonstreze criteriul radicalului (Cauchy) pentru convergenţa unei serii cu termeni pozitivi.
2. Să se scrie formula lui Maclaurin (formula lui Taylor în puctul $x_0 = 0$, cu restul lui Lagrange) de ordinul $n = 3$ pentru funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sin x$, explicitând şi restul corespunzător.
3. Să se demonstreze inegalităţile: $\frac{17}{18} < \int_0^1 \frac{\sin x}{x} dx < 1$.
4. Să se calculeze: $\lim_{n\to\infty} \left(\frac{n!}{n^n}\right)^{\frac{1}{n}}$.

SUBIECTUL III. Geometrie

1. Să se calculeze aria unui romb $ABCD$, ştiind că vârful A are coordonatele $(0, -1)$, punctul M de intersecţie a diagonalelor are coordonatele $(4, 4)$, iar punctul $N(2, 0)$ este situat pe latura AB.
2. Se consideră dreptele

$$(\Delta_1) : \begin{cases} x + 4y - z - 3 = 0, \\ 3x - 4y - 3z + 7 = 0 \end{cases} \quad \text{şi} \quad (\Delta_2) : \begin{cases} x + 2y - z + 2 = 0, \\ x - 2y + z + 4 = 0. \end{cases}$$

Verificaţi dacă dreptele sunt coplanare.

Notă.

- Toate subiectele sunt obligatorii. La toate subiectele se cer rezolvări cu soluţii complete.
- Nota lucrării este media aritmetică a notelor de la cele trei subiecte.
- Nota minimă ce asigură promovarea este 5,00.
- Timpul efectiv de lucru este de 3 ore.

UNIVERSITATEA BABEŞ-BOLYAI CLUJ-NAPOCA
FACULTATEA DE MATEMATICĂ ŞI INFORMATICĂ

Proba scrisă a examenului de licenţă, 3 iulie 2017
Specializarea Matematică
– Barem de corectare şi soluţii -

SUBIECTUL I. Algebră

Oficiu .... (1p)

1. Presupunem prin absurd că $\sqrt{d} \in \mathbb{Q}$ şi scriem $\sqrt{d} = \frac{m}{n}$, unde $m, n \in \mathbb{N}^*$ sunt numere naturale relativ prime, adică $\mathrm{cmmdc}(m, n) = 1$. .... (0,5p)

   Fie p un număr prim ce divide pe d, deci putem scrie $d = pd'$, unde $p \nmid d'$. Avem $m^2 = n^2 d = n^2 pd'$. Rezultă că $p \mid m^2$, deci $p \mid m$, adică $m = pm'$, unde $m' \in \mathbb{N}^*$. Obţinem $p^2 m'^2 = n^2 pd'$, de unde $pm'^2 = n^2 d'$, deci $p \mid n^2 d'$. .... (0,5p)

   Dar $\mathrm{cmmdc}(p, d') = 1$, deci $p \mid n$, adică $n = pn'$, unde $n' \in \mathbb{N}^*$. Rezultă că p este divizor comun al lui m şi n, ceea ce este o contradicţie. .... (0,5p)

2. Fie $a, b \in \mathbb{Q}$ astfel ca $a + b\sqrt{d} = 0$. .... (0,5p)

   Dacă $b \neq 0$, atunci deducem $\sqrt{d} = \frac{a}{b} \in \mathbb{Q}$, contradicţie. Deci $b = 0$ si atunci $a = 0$, deci 1 şi $\sqrt{d}$ sunt liniar independente pste $\mathbb{Q}$. .... (0,5p)

3. Evident, $0,\ 1 \in K$. .... (0,5p)

   Fie $x = a + b\sqrt{d}$, $x' = a' + b'\sqrt{d} \in K$. Atunci $x - x' = (a - a') + (b - b')\sqrt{d} \in K$. .... (0,5p)

   Pentru $x' \neq 0$ avem,

$$\frac{x}{x'} = \frac{(a + b\sqrt{d})(a' - b'\sqrt{d})}{a'^2 - db'^2} = \frac{(aa' - bb'd) + (a'b - ab')\sqrt{d}}{a'^2 - db'^2} \in K$$

   (am amplificat cu conjugata lui x'). .... (0,5p)

4. Evident, matricea nulă 0_2 şi matricea unitate I_2 aparţin lui M. .... (0,5p)

   Fie $X = \begin{pmatrix} a & db \\ b & a \end{pmatrix}$, $X' = \begin{pmatrix} a' & db' \\ b' & a' \end{pmatrix} \in M$. Atunci $X - X' = \begin{pmatrix} a - a' & d(b - b') \\ b - b' & a - a' \end{pmatrix} \in M$ .... (0,5p)

   şi $XX' = \begin{pmatrix} aa' + dbb' & d(ab' + a'b) \\ d(ab' + a'b) & aa' + dbb' \end{pmatrix} \in M$. .... (0,5p)

5. Avem $\det X = a^2 - db^2 = (a + b\sqrt{d})(a - b\sqrt{d}) \neq 0$ dacă $a, b \in \mathbb{Q}$ nu sunt ambele nule. .... (0,5p)

   Folosind formula cunoscută, avem $X^{-1} = \frac{1}{\det X} \begin{pmatrix} a & -db \\ -b & a \end{pmatrix}$. .... (0,5p)

6. Se verifică uşor că $XX' = X'X$ pentru orice $X, X' \in M$, deci din punctul 4. rezultă că $(M, +, \cdot)$ este inel comutativ cu unitate. .... (0,5p)

   Din punctul 5. rezultă că dacă $0 \neq X \in M$, atunci $X^{-1} \in M$, adică orice element nenul al lui M este inversabil în M. .... (0,5p)

7. Considerăm funcţia $f : K \to M$, $f(a + b\sqrt{d}) = \begin{pmatrix} a & db \\ b & a \end{pmatrix}$. .... (0,5p)

   Evident, pentru orice $X = \begin{pmatrix} a & db \\ b & a \end{pmatrix} \in M$ există unic $x = a + b\sqrt{d} \in K$ astfel ca $f(x) = X$, deci f este bijecţie. .... (0,4p)

   Pentru orice $x, x' \in K$ avem $f(x + x') = f(a + a' + (b + b')\sqrt{d}) = \begin{pmatrix} a + a' & d(b + b') \\ b + b' & a + a' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & db \\ b & a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a' & db' \\ b' & a' \end{pmatrix} = f(x) + f(x')$ .... (0,3p)

   şi $f(xx') = f(aa' + bb'd + (a'b + ab')\sqrt{d}) = \begin{pmatrix} aa' + dbb' & d(ab' + a'b) \\ d(ab' + a'b) & aa' + dbb' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & db \\ b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a' & db' \\ b' & a' \end{pmatrix} = f(x)f(x')$, deci f este morfism de corpuri. .... (0,3p)

SUBIECTUL II. Analiză matematică

Oficiu .... (1,0p)

1. Enunţul teoremei .... (1,5p)

   Demonstraţie .... (1,5p)

2. Formula: $f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \ldots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}x^{n+1}$, ... (0,5p)

   $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!}\sin c$, cu c între 0 şi x .... (1,5p)

3. $1 - \frac{x^2}{3!} < \frac{\sin x}{x} < 1$ .... (1,0p)

   $\frac{17}{18} < \int_0^1 \frac{\sin x}{x} dx < 1$ .... (1,0p)

4. $x_n = \left(\frac{n!}{n^n}\right)^{\frac{1}{n}}$, $\ln x_n = \frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n} \ln \frac{k}{n}$, $\lim_{n\to\infty} \ln x_n = \int_0^1 \ln x dx$ .... (1,0p)

   $\int_0^1 \ln x dx = -1 \Longrightarrow \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n!}{n^n}\right)^{\frac{1}{n}} = \frac{1}{e}$ .... (1,0p)

Soluţie

1. Teoremă (criteriul radicalului, criteriul Cauchy) Fie $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ o serie cu termeni pozitivi.

   (a) Dacă există un număr real $q \in [0,1)$ şi un număr natural n_0 astfel încât

   $$\sqrt[n]{u_n} \leq q, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0, \qquad \text{atunci seria } \sum_{n=1}^{\infty} u_n \text{ este convergentă.}$$

   (b) Dacă există un număr natural n_0 astfel încât

   $$\sqrt[n]{u_n} \geq 1, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0, \qquad \text{atunci seria } \sum_{n=1}^{\infty} u_n \text{ este divergentă.}$$

   Demonstraţie:

   (a) Presupunem că există $q \in [0,1)$ şi un număr natural n_0 astfel încât $\sqrt[n]{u_n} \leq q, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0$, atunci $u_n \leq q^n, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0$, şi

   $$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty} u_n &= \sum_{n=1}^{n_0-1} u_n + \sum_{n=n_0}^{\infty} u_n \leq \sum_{n=1}^{n_0-1} u_n + \sum_{n=n_0}^{\infty} q^n = \\ &= \sum_{n=1}^{n_0-1} u_n + q^{n_0-1} \lim_{k\to\infty} \frac{1-q^k}{1-q} \overset{q\in[0,1)}{=} \sum_{n=1}^{n_0-1} u_n + \frac{q^{n_0-1}}{1-q} \in \mathbb{R},\end{aligned}$$

   astfel, rezultă că $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ este convergentă (monoton crescătoare şi mărginită superior).

   (b) Dacă există un număr natural n_0 astfel încât $\sqrt[n]{u_n} \geq 1, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0$, atunci rezultă că $u_n \geq 1$, $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0$, de unde

   $$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = \sum_{n=1}^{n_0-1} u_n + \sum_{n=n_0}^{\infty} u_n \geq \sum_{n=1}^{n_0-1} u_n + \sum_{n=n_0}^{\infty} 1 = \infty,$$

   deci $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ este divergentă.

2. Se aplică formula:

   $$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \ldots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}x^{n+1},$$

   unde c se află între 0 şi x. Pentru funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sin x$, şi $n = 3$ avem:

   $$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!}\sin c, \text{ cu } c \text{ între } 0 \text{ şi } x.$$

3. Folosind dezvoltarea scrisă la punctul precedent, pentru $x \in (0,1)$ rezultă $c \in (0,1)$, de unde, deoarece $\sin c \in (0,1)$ avem următoarele:

$$\begin{aligned} -\frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!}\sin c &= -\frac{x^3}{3!}\left(1 - \frac{x}{4}\sin c\right) < 0, \\ \frac{x^4}{4!}\sin c &> 0, \end{aligned}$$

de unde, rezultă

$$\begin{aligned} & x - \frac{x^3}{3!} < \sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!}\sin c < x \Longrightarrow \\ & 1 - \frac{x^2}{3!} < \frac{\sin x}{x} < 1 \Longrightarrow \\ & \frac{17}{18} = \int_0^1 \left(1 - \frac{x^2}{3!}\right) dx < \int_0^1 \frac{\sin x}{x} dx < \int_0^1 dx = 1. \end{aligned}$$

4. Notând $x_n = \left(\frac{n!}{n^n}\right)^{\frac{1}{n}}$, $\ln x_n = \frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n} \ln\frac{k}{n}$, de unde

$$\lim_{n\to\infty} \ln x_n = \int_0^1 \ln x dx = -1 \Longrightarrow \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n!}{n^n}\right)^{\frac{1}{n}} = e^{-1} = \frac{1}{e}.$$

Soluţia a II-a: fie $a_n = \frac{n!}{n^n}$, cum

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}\frac{n^n}{n!} = \lim_{n\to\infty}\frac{n^n}{(n+1)^n} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} = \frac{1}{e},$$

rezultă (pe baza unei consecinţe a teoremei Cesàro–Stolz)

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n!}{n^n}\right)^{\frac{1}{n}} = \frac{1}{e}.$$

SUBIECTUL III. Geometrie

Oficiu .... (1p)

1. (a) coordonatele lui C, ca simetric al lui A faţă de M .... (0.5p)
   (b) ecuaţia dreptei AN $(= AB)$ 0.5pt
   (c) ecuaţia diagonalei MB, perpendiculară pe AC .... (1p)
   (d) coordonatele lui B, ca intersecţie dintre MB şi AN .... (1p)
   (e) aria rombului ca dublul ariei triunghiului ABC .... (1p)
2. (a) determinarea unui vector director $\mathbf{v}_1$ pentru Δ_1 .... (1.5p)
   (b) determinarea unui punct M_1 de pe dreapta Δ_1 .... (0.5p)
   (c) determinarea unui vector director $\mathbf{v}_2$ pentru Δ_2 .... (1.5p)
   (d) determinarea unui punct M_2 de pe dreapta Δ_2 .... (0.5p)
   (e) verificarea condiţiei de coplanaritate .... (1p)

Soluţie

1. Vom determina coordonatele vârfurilor B şi C ale rombului. Aria acestuia este dublul ariei triunghiului ABC,

   Începem prin a determina coordonatele vârfului C. Pentru aceasta, remarcăm că punctul M este mijlocul segmentului AC, deci avem:

$$\overrightarrow{AC} \equiv \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA} = 2\overrightarrow{AM} = 2\left(\overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OA}\right),$$

   prin urmare
$$\overrightarrow{OC} = 2\overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OA} = (8, 9)$$

   deci $C = C(8, 9)$. Aici O este originea coordonatelor.

   Cum diagonalele rombului sunt perpendiculare, diagonala MB este perpendiculară pe AC. Vârful B al rombului se află la intersecţia dintre dreptele MB şi $AN(\equiv AB)$.

   Stabilim acum ecuaţia diagonalei MB. Aceasta este perpendiculară pe dreapta AC. Panta dreptei AC este
$$k_{AC} = \frac{y_C - y_A}{x_C - x_A} = \frac{9+1}{8-0} = \frac{5}{4},$$

   prin urmare, panta dreptei MB este
$$k_{MB} = -\frac{4}{5},$$

   aşadar ecuaţia dreptei MB este
$$(MB):\ y - 4 = -\frac{4}{5}(x - 4)$$

   sau
$$(MB):\ 4x + 5y - 36 = 0.$$

   Ecuaţia dreptei AB (sau AN) este
$$(AB);\ \frac{x - x_A}{x_N - x_A} = \frac{y - y_A}{y_N - y_A}$$

   ceea ce ne conduce la
$$(AB):\ x - 2y - 2 = 0.$$

   În concluzie, coordonatele lui B sunt date de soluţia sistemului:
$$\begin{cases} 4x + 5y - 36 = 0, \\ x - 2y - 2 = 0. \end{cases}$$

Obţinem $B = B\left(\frac{82}{13}, \frac{28}{13}\right)$. Prin urmare,

$$\mathcal{A}_{ABCD} = 2\mathcal{A}_{ABC} = \left|\begin{vmatrix} 0 & -1 & 1 \\ \frac{82}{13} & \frac{28}{13} & 1 \\ 8 & 9 & 1 \end{vmatrix}\right| = \frac{492}{13}.$$

2. Vom determina, mai întâi, vectorii directori ai celor două drepte şi câte un punct de pe fiecare dreaptă.

Notăm cu $\mathbf{n}_{11}$ şi $\mathbf{n}_{12}$ vectorii normali la planele care determină prima dreaptă. Atunci, după cum se ştie, orice vector director al dreptei este coliniar cu vectorul $\mathbf{n}_{11} \times \mathbf{n}_{12}$. Se observă imediat că $\mathbf{n}_{11} = (1, 4, -1)$, în timp ce $\mathbf{n}_{12} = (3, -4, -3)$, deci

$$\mathbf{n}_{11} \times \mathbf{n}_{12} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 4 & -1 \\ 3 & -4 & -3 \end{vmatrix} = (-16, 6, -16),$$

deci putem alege, în calitate de vector director al dreptei Δ_1, vectorul $\mathbf{v}_1 = (8, -3, 8)$. Se constată, cu uşurinţă, că punctul $M_1(0, 1, 1)$ aparţine dreptei Δ_1.

Procedăm analog în cazul celei de-a doua drepte. Acum vectorii normali la cele două plane vor fi $\mathbf{n}_{21}(1, 2, -1)$ şi $\mathbf{n}_{22}(1, -2, 1)$, deci

$$\mathbf{n}_{21} \times \mathbf{n}_{22} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix} = (0, -2, -4),$$

deci putem alege, în calitate de vector director al dreptei Δ_2, vectorul $\mathbf{v}_2 = (0, 1, 2)$. Se constată, cu uşurinţă, că punctul $M_2(-3, 0, -1)$ aparţine dreptei Δ_2.

Dreptele Δ_1 şi Δ_2 sunt coplanare dacă şi numai dacă vectorii $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ şi $\overrightarrow{M_1M_2}$ sunt coplanari, adică dacă şi numai dacă

$$\left(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \overrightarrow{M_1M_2}\right) = 0.$$

Dar

$$\left(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \overrightarrow{M_1M_2}\right) = \begin{vmatrix} 8 & -3 & 8 \\ 0 & 1 & 2 \\ -3 & -1 & -2 \end{vmatrix} = 42 \neq 0,$$

deci dreptele sunt necoplanare.