

Proba scrisă a examenului de licență, 4 septembrie 2018
Specializarea Matematică Informatică

SUBIECTUL I. Algebră

a) Demonstrați că mulțimea $M = \left\{ \begin{pmatrix} a & 2b \\ b & a \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{Q} \right\}$ este un subinel al inelului $(\mathcal{M}_2(\mathbb{Q}), +, \cdot)$, unde $\mathcal{M}_2(\mathbb{Q})$ notează mulțimea matricilor cu două linii și două coloane cu coeficienți din \mathbb{Q} . Este $(M, +, \cdot)$ corp? (Justificare)

b) Demonstrați că funcția $f : (M, +, \cdot) \rightarrow (\mathbb{R}, +, \cdot)$, definită prin

$$f\left(\begin{pmatrix} a & 2b \\ b & a \end{pmatrix}\right) = a + b\sqrt{2},$$

este un morfism unital de inele.

c) Determinați valorile lui $a \in \mathbb{R}$ pentru care vectorii

$$v_1 = (-1, 1, a), \quad v_2 = (1, a, 1), \quad v_3 = (0, 2, 2)$$

sunt linear dependenți. Pentru $a = 1$, respectiv pentru $a = 2$, determinați dimensiunea subspațiului generat de v_1, v_2 și v_3 .

SUBIECTUL II. Analiză matematică

Să se calculeze următoarele integrale Riemann:

$$\text{a) } \int_0^{\pi/2} \frac{x \sin x}{(1 + \cos x)^2} dx; \quad \text{b) } \int_0^{\pi} \frac{x \sin x}{1 + \cos^2 x} dx.$$

SUBIECTUL III. Geometrie

Se consideră dreapta $d : x + 3y - 5 = 0$ și punctul $P(-1, 0)$.

a) Calculați distanța de la punctul P la dreapta d .

b) Determinați ecuația dreptei care este paralelă cu dreapta d și este situată la distanța de $\frac{6}{\sqrt{10}}$ unități de punctul P .

c) Determinați ecuațiile laturilor unui pătrat, care are centrul de simetrie în punctul P și una dintre laturile sale se află pe dreapta d .

SUBIECTUL IV. Informatică Un medic de familie dorește să calculeze pentru pacienții săi diferența de greutate față de cea ideală. Acest medic deține pentru fiecare pacient următoarele informații: *nume pacient, vârsta, înălțime (cm) și greutate (kg)*. Pentru *greutatea ideală* utilizează următoarea formulă:

$$\text{greutateIdeală} = \text{înălțime} - 100 - (\text{înălțime} - 150)/3.25 - (\text{vârsta} - 20)/5. \quad (1)$$

Scrieți un program într-unul din limbajele de programare Python, C++, Java, C# care:

Proba scrisă a examenului de licență, 4 septembrie 2018
 Specializarea Matematică Informatică
 BAREM

SUBIECTUL I. Algebră

- Oficiu 1 p
- a) $O_2 \in M$ 1 p
- $X, Y \in M \Rightarrow X - Y \in M$ 1 p
- $X, Y \in M \Rightarrow XY \in M$ 1 p
- Dacă $O_2 \neq X \in M$, atunci matricea X este inversabilă și $X^{-1} \in M$ 1 p
- b) Verificarea condițiilor de morfism 1 p
- Condiția $f(I_2) = 1$ 0,5 p
- c) Condiția de liniar dependentă 0,5 p
- Rezolvarea ecuației $\begin{vmatrix} -1 & 1 & a \\ 1 & a & 1 \\ 0 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 0$ 2 p
- Determinarea rangului matricii pentru fiecare valoare a lui a 1 p

SUBIECTUL II. Analiză matematică

- Oficiu 1 p
- a) Fie $I_1 = \int_0^{\pi/2} \frac{x \sin x}{(1 + \cos x)^2} dx$. Integrând prin părți se obține
- $I_1 = \int_0^{\pi/2} x \left(\frac{1}{1 + \cos x} \right)' dx = \frac{\pi}{2} - \int_0^{\pi/2} \frac{1}{1 + \cos x} dx$ 3 p
- Schimbarea de variabilă $\operatorname{tg} \frac{x}{2} = t$ conduce la
- $I_1 = \frac{\pi}{2} - \int_0^1 \frac{1}{1 + \frac{1-t^2}{1+t^2}} \cdot \frac{2}{1+t^2} dt = \frac{\pi}{2} - 1$ 3 p
- b) Fie $I_2 = \int_0^{\pi} \frac{x \sin x}{1 + \cos^2 x} dx$. Schimbarea de variabilă $t = \pi - x$ conduce la
- $I_2 = \int_0^{\pi} \frac{(\pi - t) \sin t}{1 + \cos^2 t} dt = \pi \int_0^{\pi} \frac{\sin t}{1 + \cos^2 t} dt - I_2$ 2 p
- de unde $2I_2 = -\pi \operatorname{arctg}(\cos t) \Big|_0^{\pi} = \frac{\pi^2}{2}$, deci $I_2 = \frac{\pi^2}{4}$ 1 p

SUBIECTUL III. Geometrie

- Oficiu 1 p
- a) $d(P, d) = \frac{6}{\sqrt{10}}$ 1 p
- b) Ecuația dreptei căutate d' este de forma: $x + 3y + n = 0$ 1 p
- $d(P, d') = \frac{|-1+n|}{\sqrt{10}} = \frac{6}{\sqrt{10}} \Leftrightarrow n_1 = -5, n_2 = 7$ 1,5 p
- $n = 7$ 0,5 p
- c) Dreapta d' conține latura a doua a pătratului 1 p
- Panta dreptelor e, e' ce conțin celelalte două laturi: $m_e = m_{e'} = 3$ 0,5 p
- Ecuațiile dreptelor e, e' sunt de forma: $3x - y + c = 0$ 0,5 p
- Distanța punctului P de la dreptele e, e' este $\frac{6}{\sqrt{10}}$ 1 p
- $d(P, e) = \frac{6}{\sqrt{10}} \Leftrightarrow |3 + c| = 6 \Leftrightarrow c_1 = 3, c_2 = -9$ 1,5 p
- Ecuațiile dreptelor $e : 3x - y + 3 = 0, e' : 3x - y - 9 = 0$ 0,5 p