

EXAMEN DE LICENȚĂ
Proba scrisă – 27 iunie 2016
Specializarea Matematică Informatică

- I. 1. a) Să se definească noțiunea de subgrup al unui grup.
b) Să se arate că $2\mathbb{Z} \cup 3\mathbb{Z}$ nu este subgrup în grupul $(\mathbb{Z}, +)$.
c) Să se arate că dacă G este un grup și H_1, H_2 sunt subgrupuri ale lui G atunci are loc echivalența: $H_1 \cup H_2$ este subgrup al lui G dacă și numai dacă $H_1 \subseteq H_2$ sau $H_2 \subseteq H_1$.
2. Considerăm funcția $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $f(x, y, z) = (x + 2y, y - z)$.
a) Să se arate că f este \mathbb{R} -liniară.
b) Să se arate că $v = ((1, 0, 1), (1, 1, 0), (1, 1, 1))$ este bază în \mathbb{R}^3 și $w = ((1, 1), (1, 0))$ este bază în \mathbb{R}^2 .
c) Să se determine matricea $[f]_{v,w}$.

- II. 1. Să se determine toate valorile lui $a \in (0, \infty)$ pentru care seria numerică $\sum_{n=1}^{\infty} C_{2n}^n a^n$ este convergentă.
2. Să se calculeze integralele Riemann

$$\text{a) } \int_0^1 \frac{dx}{1+e^x}; \quad \text{b) } \int_0^1 \frac{x dx}{1+x+e^x}.$$

- III. Considerăm, pe parabola $y^2 = 2px$, punctele A, B, C , de ordonate a, b, c , cu $a, b, c \in \mathbb{R}$. Fie A' intersecția dintre tangentele în B și C , B' – intersecția dintre tangentele în A și C și C' – intersecția dintre tangentele în A și B .
- a) Determinați coordonatele punctelor A', B', C' .
b) Demonstrați că aria triunghiului ABC este dublul ariei triunghiului $A'B'C'$.
c) Dacă G și G' sunt centrele de greutate ale triunghiurilor ABC , respectiv $A'B'C'$, demonstrați că dreapta GG' este paralelă cu axa parabolei.

IV. Scrieți un program într-unul din limbajele de programare Python, C++, Java, C# care:

- a) Definiște o clasă *ObiectLicitat* având un atribut privat *denumire* de tip șir de caractere, un atribut privat *pretDePornire* de tip întreg, un constructor public pentru inițializarea atributelor *denumire* și *pretDePornire*, o metodă publică *getDenumire()* ce returnează denumirea obiectului licitat, o metodă publică *getPretDePornire()* ce returnează prețul de pornire al obiectului licitat.
- b) Definiște o clasă *TablouDeObiecte* având un atribut privat *nrElemente* de tip întreg, un atribut privat *elem* de tip tablou cu elemente de tipul *ObiectLicitat*, un constructor pentru inițializarea atributelor *nrElemente* și *elem*, o metodă publică *adauga* care adaugă un obiect licitat, specificat ca parametru al metodei, în șirul *elem*, o metodă publică *elementAt(int pos)* care returnează elementul de pe poziția *pos*, o metodă publică *getNrElemente()* care returnează numărul de elemente din tablou și o metodă *sortare()* care sortează descrescător după prețul de pornire obiectele licitate din tablou.
- c) Definiște o funcție care construiește un tablou de tipul *TablouDeObiecte* (definit la punctul b)) conținând următoarele elemente: un obiect de tipul *ObiectLicitat* având denumire "Laptop" și *pretDePornire* 1000, un obiect de tipul *ObiectLicitat* având denumire "Casti" și *pretDePornire* 200, un obiect de tipul *ObiectLicitat* având denumire "Masina" și *pretDePornire* 8000.
- d) Construiește în funcția principală a programului un tablou de obiecte licitate (apelând funcția de la punctul c)), sortează tabloul (apelând metoda *sortare()* din clasa *TablouDeObiecte* de la punctul b)), apoi afișează tabloul sortat.

Notă:

Nu se vor folosi containere sortate.

Nu se vor defini alte metode decât cele specificate în enunț.

Nu se vor folosi operații de sortare.

Timp de lucru efectiv 3 ore. Toate subiectele sunt obligatorii.

Fiecare subiect se notează cu o notă de la 1 la 10.

Nota finală la proba scrisă este $\frac{2}{3} \cdot \frac{NotaI+NotaII+NotaIII}{3} + \frac{NotaIV}{3}$

Soluții geometrie

Remarcăm, înainte de toate, că

$$A = A\left(\frac{a^2}{2p}, a\right), \quad B = B\left(\frac{b^2}{2p}, b\right), \quad C = C\left(\frac{c^2}{2p}, c\right).$$

Ecuția tangentei într-un punct (x_0, y_0) al parabolei se scrie prin dedublare, adică

$$yy_0 = p(x + x_0).$$

Pentru tangenta în A obținem

$$ay = p\left(x + \frac{a^2}{2p}\right)$$

și, analog, pentru tangentele în B și C ,

$$by = p\left(x + \frac{b^2}{2p}\right)$$

și

$$cy = p\left(x + \frac{c^2}{2p}\right).$$

(a) Se obține imediat

$$A' = A'\left(\frac{bc}{2p}, \frac{b+c}{2}\right), \quad B' = B'\left(\frac{ca}{2p}, \frac{c+a}{2}\right), \quad C' = C'\left(\frac{ab}{2p}, \frac{a+b}{2}\right).$$

(b) Aria triunghiului ABC este

$$Aria_{ABC} = \frac{1}{4p} \left| \begin{vmatrix} a^2 & a & 1 \\ b^2 & b & 1 \\ c^2 & c & 1 \end{vmatrix} \right| = \frac{1}{4p} |(a-b)(b-c)(c-a)|.$$

Aria triunghiului $A'B'C'$ este

$$Aria_{A'B'C'} = \frac{1}{8p} \left| \begin{vmatrix} bc & b+c & 1 \\ ca & c+a & 1 \\ ab & a+b & 1 \end{vmatrix} \right| = \frac{1}{8p} |(a-b)(b-c)(c-a)|,$$

de unde rezultată.

(c) Un calcul simplu ne arată că

$$G = G\left(\frac{a^2 + b^2 + c^2}{6p}, \frac{a + b + c}{3}\right),$$

$$G' = G'\left(\frac{bc + ca + ab}{6p}, \frac{a + b + c}{3}\right),$$

de unde rezultă imediat rezultatul cerut.

EXAMEN DE LICENȚĂ
 Proba scrisă – 27 iunie 2016
 Specializarea Matematică Informatică
 Barem de corectare

Algebră

- Oficiu 1pt
1. a) Definiția 1.5pt
 b) Se arată că nu este parte stabilă 1.5pt
 c) Demonstrația 1.5pt
2. a) Liniaritatea funcției 1.5pt
 b) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} \neq 0, \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \neq 0$ 1.5pt
 c) $[f]_{v,w} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ 1.5pt

Analiză

- Oficiu 1pt
1. Cu notația $u_n = C_{2n}^n a^n$ are loc $D_n = \frac{2a(2n+1)}{n+1}$ 1pt
 $D = \lim_{n \rightarrow \infty} D_n = 4a$ 1pt
 Dacă $a < \frac{1}{4}$, atunci seria este convergentă 0.5pt
 Dacă $a > \frac{1}{4}$, atunci seria este divergentă 0.5pt
 Dacă $a = \frac{1}{4}$, atunci $D_n = \frac{2n+1}{2n+2}$, deci $R_n = n \left(\frac{1}{D_n} - 1 \right) = \frac{n}{2n+1}$ 1pt
 $R = \lim_{n \rightarrow \infty} R_n = \frac{1}{2} < 1$, deci seria este divergentă 1pt
2. (a) Cu schimbarea de variabilă $x = e^t$ se obține $\int_0^1 \frac{dx}{1+e^x} = \int_1^e \frac{dt}{(1+t)t}$ 1pt
 $\int_0^1 \frac{dx}{1+e^x} = \int_1^e \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{1+t} \right) dt = (\ln t - \ln(1+t)) \Big|_1^e = 1 - \ln \frac{e+1}{2}$ 1pt
- (b) $\int_0^1 \frac{xdx}{1+x+e^x} = \int_0^1 \frac{1+x+e^x - (1+e^x)}{1+x+e^x} dx = \int_0^1 \left(1 - \frac{(1+x+e^x)'}{1+x+e^x} \right) dx$ 1pt
 $\int_0^1 \frac{xdx}{1+x+e^x} = (x - \ln(1+x+e^x)) \Big|_0^1 = 1 - \ln \frac{e+2}{2}$ 1pt

Geometrie

- Oficiu 1pt
- a) (i) Determinarea coordonatelor punctelor A, B, C : $A\left(\frac{a^2}{2p}, a\right), B\left(\frac{b^2}{2p}, b\right), C\left(\frac{c^2}{2p}, c\right)$.. 1pt
- (ii) Scrierea ecuațiilor tangentelor în A, B, C : $ay = p\left(x + \frac{a^2}{2p}\right), by = p\left(x + \frac{b^2}{2p}\right), cy = p\left(x + \frac{c^2}{2p}\right)$ 1.5pt
- (iii) Determinarea coordonatelor lui A', B', C' , ca intersecții ale tangentelor: $A'\left(\frac{bc}{2p}, \frac{b+c}{2}\right), B'\left(\frac{ca}{2p}, \frac{c+a}{2}\right), C'\left(\frac{ab}{2p}, \frac{a+b}{2}\right)$ 2pt
- b) (i) Calculul ariei lui ABC : $Aria_{ABC} = \frac{1}{4p} |(a-b)(b-c)(c-a)|$ 1pt
- (ii) Calculul ariei lui $A'B'C'$: $Aria_{A'B'C'} = \frac{1}{8p} |(a-b)(b-c)(c-a)|$ 1pt
- (iii) Demonstrarea relației dintre arii 1pt
- c) (i) Determinarea coordonatelor lui G : $G\left(\frac{a^2+b^2+c^2}{6p}, \frac{a+b+c}{3}\right)$ 0.5pt
- (ii) Determinarea coordonatelor lui G' : $G'\left(\frac{bc+ca+ab}{6p}, \frac{a+b+c}{3}\right)$ 0.5pt
- (iii) Demonstrarea faptului că $GG' \parallel Ox$ 0.5pt

Informatică

- Oficiu 1pt
- a) Definirea clasei *ObiectLicitat* (2pt) din care:
- atribute $2 \cdot 0.25 = 0.5$ pt
- constructor 0.5pt
- metoda *denumire()* 0.5pt
- metoda *pretDePornire()* 0.5pt
- b) Definirea clasei *TablouDeObiecte* (3.5pt) din care:
- atribute $2 \cdot 0.25 = 0.5$ pt
- constructor 0.5pt
- metoda *sortare()* 1pt
- metoda *adauga()* 0.5pt
- metoda *elementAt()* 0.5pt
- metoda *getNrElemente()* 0.5pt
- c) Funcția de creare a tabloului (2pt) din care:
- Signatură corectă, declarare tablou si returnare rezultat 0.5pt

Creare obiecte de tipul *ObiectLicitat* $3 \cdot 0.25 = 0.75\text{pt}$

Adăugare obiecte in tablou $3 \cdot 0.25 = 0.75\text{pt}$

d) Program principal (1.5pt) din care:

apel funcție construire tablou 0.5pt

apel funcție sortare 0.5pt

afișare elemente 0.5pt