Babeş-Bolyai Tudományegyetem, Kolozsvár
Matematika és Informatika Kar

ZÁRÓVIZSGA
Írásbeli vizsga – 2017. július 3.
Matematika–Informatika szak

I. Algebra

1) a) Adjuk meg a test értelmezését.
b) Jelentsük ki a részgyűrűk jellemzési tételét.
c) Adjunk példát véges testre és ebben egy példát részgyűrűre, amely nem test. Indoklás.
2) Az $(\mathbb{R}^3, +, \cdot, \mathbb{R})$ lineáris térben adottak a $v_1 = (a, 1, 1)$, $v_2 = (1, a, 1)$ és $v_3 = (1, 1, a)$ $(a \in \mathbb{R})$ vektorok.
i) Határozzuk meg $(\mathbb{R}^3, +, \cdot, \mathbb{R})$ lineáris tér $A = \langle v_1, v_2, v_3 \rangle$ résztерének dimenzióját. Tárgyalás az a paraméter szerint.
ii) Határozzuk meg az a valós paraméter értékeit, amelyek esetén (v_1, v_2, v_3) az $(\mathbb{R}^3, +, \cdot, \mathbb{R})$ lineáris tér egy bázisa.

II. Matematikai analízis

Legyen az $f : D \to \mathbb{R}$, $f(x) = \ln\left(1 - x^2\right)$, függvény, ahol $D \subset \mathbb{R}$ az f maximális értelmezési tartománya.

a) Határozzuk meg D-t és $f^{(n)}(x)$-et bármely $n \in \mathbb{N}$ és $x \in D$ esetén.

b) Bizonyítsuk be, hogy bármely $n \in \mathbb{N}$ és bármely $x \in \mathbb{R}$ esetén

$$\left(T_{2n} f\right)(x) = -2\left(\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4} + \cdots + \frac{x^{2n}}{2n}\right),$$

ahol $T_{2n} f$ az f függvény $x_0 = 0$ pontjához rendelt $2n$-ed rendű Taylor polinomot jelöli.

c) Számítsuk ki a $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\ln\left(1 - x^2\right) - 2(\cos x - 1)}{x^4}$ határértéket.

III. Geometria

a) Vezessük le két különböző pont által meghatározott egyenes algebrai egyenletét.

b) Írjuk fel az $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$ egyenletű kör paraméteres egyenleteit.

c) Legyen M egy mozgó pont az $x^2 + y^2 = 4$ egyenletű körön és $A(-2, 0)$ a kör egy pontja. Az AM egyenes az Oy tengelyt B-ben metszi és a B ponton keresztül az Ox tengelyhez húzott párhuzamos az OM egyenest a C pontban metszi. Határozzuk meg a C pont mértani helyét.

IV. Informatika

Írjunk programot a Python, C++, Java, C# programozási nyelvek egyikében, amely:

a) (2p) egy *Jarmu* nevű osztályt vezet be a következő privát attribútumokkal: *marka* karakterlánc típusú, *ar* valós típusú és *tipus* karakterlánc típusú. Továbbá, az alábbi publikus metódusokat adjuk meg: 1) *konstruktor* a *marka, ar* és *tipus* attribútumok inicializálására, 2) *getter* típusú hozzáférési metódusok a *marka* és *tipus* attribútumok visszatérítésére, 3) *setter* típusú hozzáférési metódus az *ar* attribútum beállítására, 4) a *toString* metódus, amely egy jármű esetén az alábbi módon képezett karakterláncot téríti vissza: *marka ar tipus.* A *Jarmu* osztály *tipus* attribútuma a következő három érték egyikét veheti fel: "Bicikli", "Motorbicikli", "Roller".

b) (1.5p)Adjunk meg egy *JarmuvekListaja* osztályt az alábbi privát attribútumokkal: 1) *jarmuvekSzama* egész típusú, 2) *jarmuvek*, melynek típusa *Jarmu* elemekből álló táblázat, és a következő publikus metódusokkal: 1) egy paraméter nélküli *konstruktor*, 2) a *hozzaad* metódus amely egy paraméterként megadott járművet ad hozzá a *jarmuvek* táblázathoz, 3) az *elementAt* metódus, amely egy adott, paraméterként specifikált, pozíción lévő járművet téríti vissza, 4) a *getJarmuvekSzama()* metódus, amely a táblázatbeli járművek számát adja vissza.

c) (1.5p)) Vezessünk be egy függvényt, amely egy *JarmuvekListaja* típusú listát hoz létre és térít vissza, az alábbi három járművel: egy "Motorbicikli", egy "Roller", illetve egy "Bicikli" típusúval.

d) (1.5p) Vezessünk be egy függvényt, amely egy *JarmuvekListaja* típusú listát kap paraméterként és az adott lista összes "Roller" típusú járművének az árát csökkenti 15%-al.

e) (1.5p) Vezessünk be egy függvényt, amely egy *JarmuvekListaja* típusú listát kap paraméterként és a *Jarmu* osztály *toString* metódusának meghívása által kiírja a lista tartalmát.

f) (1p) A program fő függvényében hozzunk létre egy járművekből álló listát a c) pontban megadott függvény meghívása által, írjuk ki a járművek listáját az e) pontban megadott függvény meghívása által, alkalmazzuk az árleszállítást a d) pontban megadott függvény meghívásával, végül írjuk ki újból a járművek listáját az e) pontban megadott függvény meghívásával.

Megjegyzések:

- Minden tétel kötelező. Minden tétel esetén kérjük a teljes megoldásokat.
- Az átmenő jegy az 5-ös általános.
- Általános= $\frac{2}{3}(JegyI. + JegyII. + JegyIII.) + \frac{1}{3}JegyIV.$
- Munkaidő 3 óra.

UNIVERSITATEA BABEŞ-BOLYAI CLUJ-NAPOCA
FACULTATEA DE MATEMATICĂ ŞI INFORMATICĂ

Proba scrisă a examenului de licenţă, 3 iulie 2017
Specializarea Matematică Informatică
BAREM

SUBIECTUL I. Algebră

Oficiu .... 1 pt
1) a) Definiţia corpului .... 0,5 pt
b) Teorema de caracterizare a subinelului - enunţ .... 0,5 pt
c) Exemplu de corp finit .... 0,5 pt
Exemplu de subinel care nu este corp .... 0,5 pt
Justificare .... 1 pt

Observaţie: Pentru exemplele care sunt construite în aşa fel încât să nu fie necesare demonstraţii ulterioare, se acordă punctajul complet (2 pt). **O astfel de situaţie ar fi:** Inelul $(\mathbb{Z}_2, +, \cdot)$ al claselor de resturi modulo 2 are un singur element nenul care este inversabil fiind elementul unitate, deci este corp. Cum orice corp are cel puţin 2 elemente, subinelul nul $\{\widehat{0}\}$ nu este corp.

2) a) $\begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow (a+2)(a-1)^2 = 0 \Leftrightarrow a \in \{-2, 1\}$ .... 1 pt

Dacă $a \in \mathbb{R} \setminus \{-2, 1\}$ atunci v_1, v_2, v_3 sunt liniar independenţi,

prin urmare $\dim A = 3$ .... 1 pt

Dacă $a = 1$ atunci $v_1 = v_2 = v_3$, prin urmare $\dim A = 1$ .... 1 pt

Dacă $a = -2$ atunci rang $\begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix} = 2$, prin urmare $\dim A = 2$ .... 1 pt

b) (v_1, v_2, v_3) bază în ${}_{\mathbb{R}}\mathbb{R}^3 \Leftrightarrow A = \mathbb{R}^3 \Leftrightarrow \dim A = \dim \mathbb{R}^3$ .... 1 pt
$\dim A = \dim \mathbb{R}^3 = 3 \Leftrightarrow a \in \mathbb{R} \setminus \{-2, 1\}$ .... 1 pt

SUBIECTUL II. Analiză matematică

Oficiu .... 1 pt

a) $D = (-1, 1)$ şi $f'(x) = \dfrac{-2x}{1-x^2} = \dfrac{2x}{x^2-1} = \dfrac{1}{x-1} + \dfrac{1}{x+1}$ oricare ar fi $x \in D$ .... 1 pt

Intuirea formulei $f^{(n)}(x) = \dfrac{(-1)^{n+1}(n-1)!}{(x-1)^n} + \dfrac{(-1)^{n+1}(n-1)!}{(x+1)^n}$ oricare ar fi $x \in D$ .... 1 pt
şi demonstrarea acesteia prin inducţie .... 2 pt

b) $f^{(n)}(0) = (-1)^{n+1}(n-1)!\,[(-1)^n + 1] = \begin{cases} 0 & \text{dacă } n \text{ este impar} \\ -2(n-1)! & \text{dacă } n \text{ este par.} \end{cases}$ .... 1 pt

$f(0) = 0 \;\Rightarrow\; (T_{2n}f)(x) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{f^{(2k)}(0)}{(2k)!}\, x^{2k} = \sum_{k=1}^{n} \frac{-2(2k-1)!}{(2k)!}\, x^{2k} = -2\sum_{k=1}^{n} \frac{x^{2k}}{2k}$ .... 1 pt

c) Din teorema 2.2.2 din manual rezultă că

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln\left(1-x^2\right) + x^2 + \frac{1}{2}x^4}{x^4} = 0,$$

deci $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\ln\left(1-x^2\right) + x^2}{x^4} = -\frac{1}{2}$ (1) .... 1 pt

Se ştie că

$$(T_{2n}\cos)(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!},$$

deci (aplicând din nou teorema 2.2.2 din manual)

$$\lim_{x\to 0} \frac{2\left(\cos x - 1 + \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{24}\right)}{x^4} = 0,$$

de unde $\lim\limits_{x\to 0} \frac{2(\cos x - 1) + x^2}{x^4} = \frac{1}{12}$ (2) .... 1 pt

Prin scăderea relaţiilor (1) şi (2) obţine $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\ln(1-x^2) - 2(\cos x - 1)}{x^4} = -\frac{1}{2} - \frac{1}{12} = -\frac{7}{12}$ .... 1 pt

SUBIECTUL III. Geometrie

Oficiu .... 1 pt

a) Fie punctele distincte $M_1(x_1, y_1)$ şi $M_2(x_2, y_2)$. Fie $M(x, y)$ un punct variabil pe dreapta M_1M_2. Ecuaţia vectorială a dreptei M_1M_2 este: $\vec{r}_M = \vec{r}_{M_1} + \alpha(\vec{r}_{M_2} - \vec{r}_{M_1})$, unde $\alpha \in \mathbb{R}$ 2pt

– Eliminarea parametrului α şi scrierea ecuaţiei 1pt

b) Ecuaţiile parametrice ale cercului sunt: $x = a + r\cos t, y = b + r\sin t$ 1pt

c) Fie punctul $M(2\cos t, 2\sin t)$ variabil pe cerc. Ecuaţia dreptei AM 1pt

–Determinarea coordonatelor punctului $B(0, \frac{2\sin t}{1+\cos t})$ 1pt

– Determinarea coordonatelor punctului $C(\frac{2\cos t}{1+\cos t}, \frac{2\sin t}{1+\cos t})$ 1pt

– Eliminând parametrul t, locul geometric va fi parabola de ecuaţie: $y^2 = -4x + 4$ 2pt

SUBIECTUL IV. Informatică

Oficiu 1pt

a) Definirea clasei Vehicul 2pt

din care

– atribute .... 3* 0.25 =0.75pt

– metode .... 5*0.25=1.25pt

b) Definirea clasei ListaDeVehicule 1.5pt

din care

– atribute .... 2*0.25=0.5pt

– metode .... 4*0.25 = 1pt

c) Construirea listei de vehicule 1.5pt

din care

– antet metodă 0.5pt

– pentru fiecare vehicul creat .... 3*0.25= 0.75pt

– returnare rezultat .... - 0.25pt

d) Funcţia de aplicare a reducerii de preţ 1.5pt

din care

– antet metodă .... 0.5 pt

– implementare metodă 1pt

e) Funcţia de afişare listă de vehicule 1.5pt

din care

– antet metodă 0.5pt

– implementare metodă 1pt

f) Funcţia principală 1pt

din care

pentru fiecare apel .... 4*0.25=1pt

Notă.

- Orice altă soluţie corectă va fi punctată corespunzător.
- Toate subiectele sunt obligatorii. La toate subiectele se cer rezolvări cu soluţii complete.
- Media lucrării se calculează ca şi medie ponderată: $\frac{2}{3}\cdot$ Media aritmetică a notelor de la cele trei subiecte de Matematică $+\frac{1}{3}\cdot$ Nota de la subiecul de Informatică.
- Pentru o lucrare, nota minimă ce asigură promovarea este 5,00.
- Timpul efectiv de lucru este de 3 ore.