

BABEŞ-BOLYAI TUDOMÁNYEGYETEM KOLOZSVÁR
MATEMATIKA ÉS INFORMATIKA KAR

Záróvizsga
Matematika szak, 2014 február

I. tétel: Algebra

Az α valós paraméter értékei szerint tárgyaljuk és oldjuk meg a következő egyenletrendszert \mathbb{R}^4 -ben:

$$\begin{cases} 5x_1 - 3x_2 + 2x_3 + 4x_4 = 3 \\ 4x_1 - 2x_2 + 3x_3 + 7x_4 = 1 \\ 8x_1 - 6x_2 - x_3 - 5x_4 = 9 \\ 7x_1 - 3x_2 + 7x_3 + 17x_4 = \alpha \end{cases}.$$

II. tétel: Matematikai analízis

- (a) Jelentsük ki és bizonyítsuk az első összehasonlítási kritériumot pozitív tagú sorok esetén.
- (b) Számítsuk ki a következő határozott integrált: $\int_1^3 \frac{1}{(x+1)(x^2+2)} dx$.
- (c) Számítsuk ki a következő határértéket:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n+2} \right)^{n(\sqrt{n^2+n} - \sqrt{n^2-2})}.$$

III. tétel: Mértan

- (a) Az ellipszis értelmezése és kanonikus egyenletének levezetése.
- (b) Tekintsük az $ABCD A' B' C' D'$ kockát. Az A, B, D és A' csúcsok koordinátái $(0, 0, 0)$, $(a, 0, 0)$, $(0, a, 0)$ illetve $(0, 0, a)$, ahol $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$. Legyenek M és N a CC' illetve DD' szakaszok középpontjai.
- (i) Határozzuk meg a BM és CN egyenesek egyenleteit.
- (ii) Számítsuk ki a BM és CN egyenesek közötti távolságot.

Megjegyzés: Minden tétel kötelező. Munkaidő két óra.