BABEŞ-BOLYAI TUDOMÁNYEGYETEM, KOLOZSVÁR
MATEMATIKA ÉS INFORMATIKA KAR

MATE-INFO UBB verseny, 2018. március 25.
MATEMATIKA írásbeli vizsga

FONTOS TUDNIVALÓK:

1) A feleletválasztós feladatok („A" rész) esetén egy vagy több válasz lehet helyes. A helyes válaszokat a vizsgalapon kell feltüntetni. Egy feladathoz tartozó pontszámot csak akkor lehet megkapni, ha az összes helyes válasz fel van tüntetve, és csak a helyes válaszok vannak feltüntetve.

2) A „B" rész feladatai esetén a vizsgalapon kérjük a megoldások részletes kidolgozását. Ezeket a javítókulcs alapján értékeljük.

„A" rész

1. (5 pont) Az $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=-4x^2+20x-25$ függvény:

$\boxed{\text{A}}$ maximuma szigorúan kisebb, mint 0; $\boxed{\text{B}}$ minimuma negatív; $\boxed{\text{C}}$ maximuma 0; $\boxed{\text{D}}$ minimuma 0;

$\boxed{\text{E}}$ maximuma szigorúan nagyobb, mint 0.

2. (5 pont) Tekintjük az $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=\dfrac{2x}{1+x^2},\ \forall x\in\mathbb{R}$ függvényt.

$\boxed{\text{A}}$ f-nek van ferde aszimptotája; $\boxed{\text{B}}$ f-nek van vízszintes aszimptotája $+\infty$ felé is és $-\infty$ felé is;
$\boxed{\text{C}}$ f-nek nincs függőleges aszimptotája; $\boxed{\text{D}}$ $-1\le f(x)\le 1, \forall x\in\mathbb{R}$; $\boxed{\text{E}}$ f monoton $\mathbb{R}$-en.

3. (5 pont) $a,b\in\mathbb{R}$ esetén az $a+bi$ komplex szám pontosan akkor különbözik 0-tól, ha:

$\boxed{\text{A}}$ $a\cdot b\neq 0$; $\boxed{\text{B}}$ $a^2+b^2\neq 0$; $\boxed{\text{C}}$ az a és b nem egyszerre 0; $\boxed{\text{D}}$ $a=b\neq 0$; $\boxed{\text{E}}$ $a,b\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$.

4. (5 pont) Ha $\sin\alpha+\sin\beta=a$ és $\cos\alpha+\cos\beta=b$, akkor

$\boxed{\text{A}}$ $\cos\dfrac{\alpha-\beta}{2}=\pm\dfrac{1}{2}\sqrt{a^2+b^2}$; $\boxed{\text{B}}$ $\cos\dfrac{\alpha-\beta}{2}=\pm\sqrt{a^2-b^2}$; $\boxed{\text{C}}$ $\cos\dfrac{\alpha-\beta}{2}=\pm\sqrt{\dfrac{4-a^2-b^2}{a^2+b^2}}$;
$\boxed{\text{D}}$ $\cos(\alpha-\beta)=\dfrac{a^2+b^2-2}{2}$; $\boxed{\text{E}}$ $\cos(\alpha+\beta)=a^2+b^2-2$.

5. (5 pont) Az $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\sin\frac{2}{n}\right)^n$ határérték

$\boxed{\text{A}}$ nem létezik; $\boxed{\text{B}}$ $\dfrac{e}{2}$; $\boxed{\text{C}}$ e^2; $\boxed{\text{D}}$ $\sqrt{e}$; $\boxed{\text{E}}$ $2e$.

6. (5 pont) Tekintjük az $A(0,0),B(21,0),C(0,21)$ pontokat. Hány olyan pont van az ABC háromszög belsejében, amelynek mindkét koordinátája egész szám?

$\boxed{\text{A}}$ 242; $\boxed{\text{B}}$ 190; $\boxed{\text{C}}$ 231; $\boxed{\text{D}}$ 210; $\boxed{\text{E}}$ 284.

„B" rész

1. Adottak a $G=\{A\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R})\mid \det A\neq 0\}$ és $H=\left\{\begin{pmatrix}1 & a\\ 0 & 1\end{pmatrix}\middle|\, a\in\mathbb{R}\right\}$ halmazok.

a) (4 pont) Igazold, hogy G zárt részhalmaza $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$-nek a mátrixok szorzására nézve!

b) (5 pont) Igazold, hogy $(G,\cdot)$ egy csoport (ahol „$\cdot$" a mátrixok szorzása által indukált művelet G-n)!

c) (8 pont) Bizonyítsd be, hogy $(H,\cdot)$ részcsoportja $(G,\cdot)$-nak, és izomorf az $(\mathbb{R},+)$ csoporttal!

d) (8 pont) Az $A=\begin{pmatrix}1 & a\\ 0 & 1\end{pmatrix}\in H$ mátrix és $n\in\mathbb{Z}$ egész szám esetén számítsd ki az A^n mátrixot!

2. a) (5 pont) Adott az ABC háromszög. Bizonyítsd be, hogy a háromszög síkjának tetszőleges M pontja esetén teljesül a következő egyenlőség:

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CM} + \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BC} = 0.$$

b) (10 pont) Oldd meg a

$$4^{\sin 2x} + 4^{3-\sin 2x} = 65, \quad x \in \mathbb{R}$$

egyenletet!

3. Tekintjük az $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} -x^2, & x < 1 \\ x - 2, & x \geq 1 \end{cases}$$

függvényt.

a) (6 pont) Határozd meg az f szélsőértékpontjait!

b) (7 pont) Számítsd ki az f primitív függvényeit!

c) (7 pont) Számítsd ki az $\int\limits_0^2 f(x)\,dx$ integrált!

MEGJEGYZÉS:

Minden feladat kötelező. Hivatalból 10 pont jár.

Munkaidő 3 óra.

JAVÍTÓKULCS

„A” rész

1. $\boxed{\text{C}}$ .... 5 p
2. $\boxed{\text{B}}$, $\boxed{\text{C}}$, $\boxed{\text{D}}$ .... 5 p
3. $\boxed{\text{B}}$, $\boxed{\text{C}}$ .... 5 p
4. $\boxed{\text{A}}$, $\boxed{\text{D}}$ .... 5 p
5. $\boxed{\text{C}}$ .... 5 p
6. $\boxed{\text{B}}$ .... 5 p

„B” rész

1. a) $A, B \in G \Leftrightarrow \det A \neq 0 \neq \det B \Rightarrow \det(AB) = \det A \cdot \det B \neq 0$
$\Rightarrow AB \in G$ .... 4 p

b) Mivel a mátrixok szorzása asszociatív, az előbbi tulajdonság alapján
$\forall A, B, C \in G \subseteq \mathcal{M}_2(\mathbb{R}),\ (A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$ (G-ben) .... 1 p

Mivel $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ determinánsa 1, következik, hogy $I_2 \in G$ és így I_2 a $(G, \cdot)$ semleges eleme. 2 p

Ha $A \in G$, akkor $\det A \neq 0$, tehát létezik A^{-1} és $1 = \det I_2 = \det A \cdot \det(A^{-1}) \Rightarrow \det(A^{-1}) \neq 0$, vagyis $A^{-1} \in G$. Tehát létezik $A^{-1} \in G$, amelyre $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I_2$, vagyis $(G, \cdot)$ csoport. .... 2 p

c) Mivel $\begin{vmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$, $\forall a \in \mathbb{R}$, a H egy nemüres részhalmaza G-nek ($I_2 \in H$), ... 1 p
amely zárt is a szorzásra nézve mivel
$\forall a, b \in \mathbb{R},\ \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & a+b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in H \quad (1)$ .... 1 p

Ugyanakkor $\forall a \in \mathbb{R}$ esetén az $\begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ mátrix inverze $\begin{pmatrix} 1 & -a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in H$, tehát $(H, \cdot)$ részcsoportja $(G, \cdot)$-nak. .... 2 p

Az $f : \mathbb{R} \to H$, $f(a) = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ függvény morfizmus $(\mathbb{R}, +)$ és $(H, \cdot)$ közt, az (1) alapján .... 2 p

Az f bijektivitása az értelmezések alapján ellenőrizhető. .... 2 p

d) Annak megsejtése, hogy $A^n = \begin{pmatrix} 1 & na \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\forall n \in \mathbb{N}$ .... 2 p

Az $A^n = \begin{pmatrix} 1 & na \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\forall n \in \mathbb{N}$ összefüggés bizonyítása a matematikai indukció módszerével .... 4 p

Ha $m \in \mathbb{N}^*$, akkor $A^{-m} = (A^{-1})^m = \begin{pmatrix} 1 & m(-a) \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & (-m)a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ .... 2 p

2. a) (5 pont)

(i) $\overrightarrow{CM}$ felbontása .... 1 p

(ii) $\overrightarrow{MB}$ felbontása .... 1 p

(iii) $\overrightarrow{BC}$ felbontása .... 1 p

(iv) Az összefüggésbe való visszahelyettesítés .... 1 p

(v) A műveletek elvégzése és a végső következtetés .... 1 p

2. b) (10 pont)

(i) A $4^{\sin 2x} = t$ jelölés .... 2 p

(ii) A t-ben másodfokú egyenlet felírása .... 2 p

(iii) A másodfokú egyenlet megoldása ....3 p

(iv) A $t = 3$ eset kizárása..1 p

(v) A megoldás végső alakja ....2 p

3. a) (6 pont)

(i) Az $x_1 = 0$ pont meghatározása ....2 p

(ii) Annak igazolása, hogy x_1 lokális maximumpont ....2 p

(iii) Az $x_2 = 1$ pont vizsgálata ....2 p

3. b) (7 pont)

(i) A primitív meghatározása a $(-\infty, 1)$ és $(1, \infty)$ intervallumokon ....4 p

(ii) A két konstans közti összefüggés meghatározása...2 p

(iii) A primitívek végső alakja ....1 p

3. c) (7 pont)

(i) $F(0)$ és $F(2)$ kiszámítása ....4 p

(ii) A Newton-Leibniz-tétel alkalmazása ....2 p

(iii) A végeredmény ....1 p

Megjegyzés: Az előbbiektől eltérő megoldásokat is pontozzuk.

Válaszok és megoldások

„A” rész

1. $\boxed{\text{C}}$; **2.** $\boxed{\text{B}}$, $\boxed{\text{C}}$, $\boxed{\text{D}}$; **3.** $\boxed{\text{B}}$, $\boxed{\text{C}}$; **4.** $\boxed{\text{A}}$, $\boxed{\text{D}}$; **5.** $\boxed{\text{C}}$; **6.** $\boxed{\text{B}}$.

„B” rész

1. a) Ha $A, B \in G$, akkor $\det A \neq 0 \neq \det B$ és így $\det(AB) = \det A \cdot \det B \neq 0$, vagyis $AB \in G$.

b) Mivel a mátrixok szorzása asszociatív, az előbbi tulajdonság alapján $\forall A, B, C \in G \subseteq \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, $(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$ (G-ben). Mivel $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ determinánsa 1, következik, hogy $I_2 \in G$ és így I_2 a $(G, \cdot)$ semleges eleme.

Ha $A \in G$, akkor $\det A \neq 0$, tehát létezik A^{-1} és $1 = \det I_2 = \det A \cdot \det(A^{-1}) \Rightarrow \det(A^{-1}) \neq 0$, vagyis $A^{-1} \in G$. Tehát létezik $A^{-1} \in G$, amelyre $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I_2$, vagyis $(G, \cdot)$ csoport.

c) Mivel $\begin{vmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$, $\forall a \in \mathbb{R}$, a H egy nemüres részhalmaza G-nek ($I_2 \in H$), amely zárt is a szorzásra nézve mivel

$$\forall a, b \in \mathbb{R}, \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & a+b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in H \quad (1)$$

Ugyanakkor $\forall a \in \mathbb{R}$ esetén az $\begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ mátrix inverze $\begin{pmatrix} 1 & -a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in H$, tehát $(H, \cdot)$ részcsoportja $(G, \cdot)$-nak.

Az $f : \mathbb{R} \to H$, $f(a) = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ függvény morfizmus $(\mathbb{R}, +)$ és $(H, \cdot)$ közt, az (1) alapján.

Az f bijektivitását az értelmezések alapján ellenőrizzük.

d) A matematikai indukció módszerével igazoljuk, hogy

$$A^n = \begin{pmatrix} 1 & na \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \ \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

$n = 1$ esetén a tulajdonság igaz. Ha $m \in \mathbb{N}^*$ és $A^m = \begin{pmatrix} 1 & ma \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, akkor

$$A^{m+1} = A^m \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & ma \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & (m+1)a \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

tehát az összefüggés igaz $(m+1)$-re is. Így a matematikai indukció elve alapján igaz bármely $n \in \mathbb{N}^*$ esetén. Ha $m \in \mathbb{N}^*$, akkor

$$A^{-m} = (A^{-1})^m = \begin{pmatrix} 1 & m(-a) \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & (-m)a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ha $m = 0$, akkor $A^0 = I_2$, tehát

$$A^n = \begin{pmatrix} 1 & na \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \ \forall n \in \mathbb{Z}.$$

Megjegyzés: Egy más megközelítés lenne a c) és d) esetén ha az $F : \mathbb{R} \to G$, $F(a) = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ függvényről igazoljuk, hogy injektív morfizmus (ez az (1) alapján igaz) $(\mathbb{R}, +)$-ról $(G, \cdot)$-ra és $F(\mathbb{R}) = H$. Így $(H, \cdot)$ részcsoportja $(G, \cdot)$-nak és $(\mathbb{R}, +) \simeq (H, \cdot)$, illetve $F(na) = [F(a)]^n$, bármely $n \in \mathbb{Z}$.

2. a) A háromszögszabály alapján

$$\overrightarrow{CM} = \overrightarrow{AM} - \overrightarrow{AC},$$
$$\overrightarrow{MB} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AM},$$
$$\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB},$$

tehát

$$S = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CM} + \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AB} \cdot \left(\overrightarrow{AM} - \overrightarrow{AC}\right) +$$
$$+ \overrightarrow{AC} \cdot \left(\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AM}\right) + \overrightarrow{AM} \cdot \left(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}\right).$$

A zárójelek felbontása után a skaláris szorzat kommutativitását és az összeadásra való disztributivitását használva azt kapjuk, hogy $S = 0$.
b) A

$$t = 4^{\sin 2x}$$

jelöléssel az egyenlet a következő alakba írható:

$$t + \frac{64}{t} = 65.$$

Ez ekvivalens a

$$t^2 - 65t + 64 = 0.$$

másodfokú egyenlettel, amelynek megoldásai $1 = 4^0$ és $64 = 4^3$.
Ez alapján a

$$\sin 2x = 3,$$

illetve a

$$\sin 2x = 0$$

egyenleteket kell megoldanunk. Az elsőnek nincs megoldása, mert $\sin 2x \leq 1$. A második megoldása $x \in \left\{ \frac{k\pi}{2} \middle| k \in \mathbb{Z} \right\}$.
3. a) A $(-\infty, 1)$ intervallumon $f(x) = -x^2$, tehát ezen az intervallumon $f'(x) = -2x$. Az $f'(x) = 0$ egyenletnek $x_1 = 0$ az egyetlen megoldása és mivel $f'(x) > 0$, ha $x < 0$, illetve $f'(x) < 0$, ha $0 < x < 1$, az $x_1 = 0$ lokális maximumpont. f deriválható $(-\infty, 1)$-en és az $f'(x) = 0$ egyenletnek más megoldása nincs, ezért x_1 az egyetlen lokális szélsőértékpont a $(-\infty, 1)$ intervallumban. Az $(1, \infty)$ intervallumon f szigorúan növekvő (elsőfokú és az x együtthatója szigorúan pozitív), tehát ebben az intervallumban nincs lokális szélsőértékpontja. Az $x_2 = 1$ pont vizsgálata szükséges, mert ebben a pontban f nem deriválható. $f(1) = -1$ és $x \in (-1, 1)$ esetén $-x^2 > -1$, tehát

$$f(x) > f(1),\ \forall x \in (-1, 1).$$

Ugyanakkor $x \geq 1$ esetén $x - 2 \geq -1$, tehát

$$f(x) \geq f(1),\ \forall x \in [1, \infty).$$

Tehát

$$f(x) \geq f(1),\ \forall x \in (-1, \infty),$$

vagyis x_2 lokális minimumpont.
b) A Lagrange-tétel következményét alkalmazzuk a $(-\infty, 1)$ és az $(1, \infty)$ intervallumon. Így a f minden primitívje $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$F(x) = \begin{cases} -\frac{x^3}{3} + c_1, & x < 1 \\ \frac{x^2}{2} - 2x + c_2, & x > 1 \end{cases}$$

alakú. Mivel F deriválható, folytonos is, tehát

$$F(1) = -\frac{1}{3} + c_1 = -\frac{3}{2} + c_2.$$

Ez alapján a f minden primitívje

$$F(x) = \mathcal{C} + \begin{cases} -\frac{x^3}{3}, & x < 1 \\ \frac{x^2}{2} - 2x + \frac{7}{6}, & x \geq 1 \end{cases}$$

alakú. A Lagrange tétel következménye alapján az előbbi F függvények deriválhatók $\mathbb{R}$-en és $F'(x) = f(x), \forall x \in \mathbb{R}$.
c) A Newton-Leibniz-tétel alapján:

$$\int_0^2 f(x)\,dx = F(2) - F(0) = 2 - 4 + \frac{7}{6} - 0 = -\frac{5}{6}.$$

Megjegyzés: Az integrál értéke kiszámítható a primitív függvény kiszámítása nélkül is, ha felbontjuk a kiszámítandó integrált:

$$\int_0^2 f(x)\,dx = \int_0^1 f(x)\,dx + \int_1^2 f(x)\,dx.$$