

CONCURS DE ADMITERE, 21 iulie 2019
Proba scrisă la MATEMATICĂ

NOTĂ IMPORTANTĂ:

1) Problemele de tip grilă din Partea A pot avea unul sau mai multe răspunsuri corecte, care trebuie indicate de candidat pe formularul special de pe foaia de concurs. Notarea subiectului de tip grilă se face conform sistemului de punctare parțială din regulament.

2) Pentru problemele din Partea B se cer rezolvări complete scrise pe foaia de concurs. Acestea sunt evaluate în detaliu conform baremului.

PARTEA A

1. (6 puncte) Pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$ notăm

$$S_n = \frac{1}{1 \cdot 4} + \frac{1}{4 \cdot 7} + \frac{1}{7 \cdot 10} + \cdots + \frac{1}{(3n-2) \cdot (3n+1)}.$$

Atunci valoarea lui S_{2019} este

- A $\frac{2019}{6059}$; B $\frac{2018}{6059}$; C $\frac{2019}{6058}$; D $\frac{2018}{6058}$.

2. (6 puncte) Dacă $\log_x(x^2 + 2x) + \log_{x^2}(x + 2) = 4$, atunci x poate fi

- A 2; B $\sqrt{2}$; C 4; D $2\sqrt{2}$.

3. (6 puncte) Fie $A = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$ și $B = \begin{pmatrix} 1 & x \\ y & z \end{pmatrix}$ matrice cu elemente reale. Dacă $AB = BA = O_2$ (matricea nulă din $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$), atunci

- A nu există astfel de B ; B B este unic determinată;
 C x, y, z sunt numere pare; D $\det B = 0$.

4. (6 puncte) În inelul $(\mathbb{Z}_{12}, +, \cdot)$ se consideră ecuația $\hat{3}(x + \hat{2}) = \hat{9}$. Atunci

- A ecuația are exact 4 soluții; B toate soluțiile ecuației sunt inversabile în $(\mathbb{Z}_{12}, +, \cdot)$;
 C ecuația are exact 3 soluții; D ecuația nu are soluții.

5. (6 puncte) Fie $\ell = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x - x}{\sin^3 x}$. Care dintre următoarele afirmații sunt adevărate?

- A ℓ este număr rațional. B Limita ℓ nu există. C $\ell = 1/3$. D $\ell = \infty$.

6. (6 puncte) Fie $a, b \in \mathbb{R}$ parametri, fie $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ funcția definită prin

$$f(x) = \begin{cases} ae^x + b + e^{-x}, & \text{dacă } x \leq 0 \\ x^2, & \text{dacă } x > 0 \end{cases}$$

și fie $x_0 = 0$. Care dintre următoarele afirmații sunt adevărate?

- A Există o infinitate de perechi (a, b) pentru care f este continuă în punctul x_0 .
 B f este derivabilă în punctul $x_0 \Leftrightarrow (a = 1 \text{ și } b = -2)$.
 C f este continuă în punctul $x_0 \Leftrightarrow a + b = -1$.
 D f este derivabilă în punctul $x_0 \Leftrightarrow (a = -2 \text{ și } b = 1)$.

7. (6 puncte) Fie $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ funcția definită prin $f(x) = (x^2 - 4x + 6)e^x$. Atunci

- A funcția f este descrescătoare pe $(-\infty, 0]$ și crescătoare pe $(0, +\infty)$;
- B 0 este punct de inflexiune pentru funcția f ;
- C funcția f este strict crescătoare pe \mathbb{R} ;
- D funcția f este convexă pe \mathbb{R} .

8. (6 puncte) Valoarea integralei $\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{1 + \sin x}$ este

- A $\frac{\pi}{2}$;
- B $\frac{1}{2}$;
- C π ;
- D 1.

9. (6 puncte) În rombul $ABCD$ avem $AB = 12$ și $m(\widehat{C}) = 60^\circ$. Atunci suma

$$\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD}$$

este egală cu

- A 72;
- B $72\sqrt{3}$;
- C $144\sqrt{3}$;
- D $72(1 + \sqrt{3})$.

10. (6 puncte) În triunghiul ABC avem $BC = a$, $m(\widehat{A}) = 30^\circ$ și $m(\widehat{B}) = 105^\circ$. Atunci aria triunghiului ABC este egală cu

- A $\frac{a^2(\sqrt{3} - 1)}{4}$;
- B $\frac{a^2(1 + \sqrt{3})}{4}$;
- C $\frac{a^2(\sqrt{3} + \sqrt{2})}{4}$;
- D $\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$.

PARTEA B

1. (10 puncte) Să se calculeze următoarele limite:

(a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{k}{\sqrt{n^2 + k^2}}$; (b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{k}{\sqrt{n^2 + k}}$.

2. (10 puncte) În sistemul cartezian xOy se dau punctele $A(2, -1)$, $B(4, 3)$ și dreapta $d: x - 2y - 1 = 0$.

(a) Să se demonstreze că dreapta d trece prin mijlocul segmentului $[AB]$.

(b) Să se determine punctele C pentru care aria triunghiului ABC este egală cu 3 și una dintre medianele triunghiului ABC este pe dreapta d .

3. (10 puncte) Fie mulțimea de matrice

$$G = \left\{ \begin{pmatrix} z_1 & z_2 \\ -\bar{z}_2 & \bar{z}_1 \end{pmatrix} \mid z_1, z_2 \in \mathbb{C} \right\} \subseteq \mathcal{M}_2(\mathbb{C}),$$

unde prin \bar{z} se notează conjugatul unui număr complex z .

(a) Să se arate că G este un subgrup al grupului $(\mathcal{M}_2(\mathbb{C}), +)$.

(b) Să se construiască un morfism injectiv de grupuri între grupurile $(\mathbb{C}, +)$ și $(G, +)$.

NOTĂ:

Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.

Timpul efectiv de lucru este de 3 ore.

Răspunsuri și soluții

PARTEA A

Răspunsuri la probleme:

1. \boxed{C} ; 2. \boxed{A} ; 3. $\boxed{B}, \boxed{C}, \boxed{D}$; 4. \boxed{C} ; 5. \boxed{A}, \boxed{C} ;
6. $\boxed{A}, \boxed{B}, \boxed{C}$; 7. \boxed{C}, \boxed{D} ; 8. \boxed{D} ; 9. \boxed{A} ; 10. \boxed{B} .

Soluții la probleme:

1. Pentru orice $k \in \mathbb{N}^*$ avem egalitatea $\frac{1}{k(k+3)} = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+3} \right)$, de unde rezultă că pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$ avem

$$3S_n = \frac{1}{1} - \frac{1}{4} + \frac{1}{4} - \frac{1}{7} + \dots + \frac{1}{3n-2} - \frac{1}{3n+1} = 1 - \frac{1}{3n+1},$$

adică $S_n = \frac{n}{3n+1}$ pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$. Astfel, $S_{2019} = \frac{2019}{6058}$.

2. Condițiile de existență a logaritmilor conduc la $x \in (0, 1) \cup (1, \infty)$. În aceste condiții, ecuația este echivalentă cu

$$\frac{1}{2} \log_x(x+2) + 1 + \log_x(x+2) = 4,$$

de unde rezultă că $\log_x(x+2) = 2$, adică $x^2 = x+2$. În concluzie, $x = 2$ este singura soluție.

3. Din ecuațiile matriceale $AB = BA = O_2$ obținem

$$\begin{pmatrix} 4-2y & 4x-2z \\ -2+y & -2x+z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4-2x & -2+x \\ 4y-2z & -2y+z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Rezolvând sistemele de ecuații obținute ajungem la concluzia că singura soluție este $x = 2, y = 2$

și $z = 4$, deci $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$.

4. Ecuația se scrie echivalent: $\hat{3}(x + \hat{2}) = \hat{9} \Leftrightarrow \hat{3}x + \hat{6} = \hat{9} \Leftrightarrow \hat{3}x - \hat{3} = \hat{0} \Leftrightarrow \hat{3}(x - \hat{1}) = \hat{0}$. Ultima egalitate are loc dacă și numai dacă $x - \hat{1} \in \{\hat{0}, \hat{4}, \hat{8}\}$, deci mulțimea soluțiilor este $M = \{\hat{1}, \hat{5}, \hat{9}\}$. Dintre acestea, soluția $\hat{9}$ nu este inversabilă în inelul $(\mathbb{Z}_{12}, +, \cdot)$.

5. Aplicând regula lui l'Hôpital, găsim

$$\ell = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{\cos^2 x} - 1}{3 \sin^2 x \cos x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos^2 x}{3 \sin^2 x \cos^3 x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{3 \cos^3 x} = \frac{1}{3}.$$

6. Avem $\lim_{x \nearrow 0} f(x) = a + b + 1 = f(0)$ și $\lim_{x \searrow 0} f(x) = 0$. Drept urmare, f este continuă în $x_0 = 0$ dacă și numai dacă $a + b = -1$, deci există o infinitate de perechi (a, b) pentru care f este continuă în x_0 . De asemenea, f este derivabilă pe $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, iar

$$f'(x) = ae^x - e^{-x} \quad \text{pentru orice } x < 0,$$

$$f'(x) = 2x \quad \text{pentru orice } x > 0.$$

Se constată imediat că $\lim_{x \nearrow 0} f'(x) = a - 1$ și $\lim_{x \searrow 0} f'(x) = 0$. Presupunând că $a + b = -1$ (adică f este continuă în 0), în baza unei consecințe a teoremei de medie a lui Lagrange rezultă că

$f'_s(0) = a - 1$ și $f'_d(0) = 0$. Drept urmare, f este derivabilă în $x_0 = 0$ dacă și numai dacă $a + b = -1$ și $a - 1 = 0$, adică dacă și numai dacă $a = 1$ și $b = -2$.

7. Avem că $f'(x) = (x^2 - 2x + 2)e^x > 0$, oricare ar fi $x \in \mathbb{R}$, iar $f''(x) = x^2e^x \geq 0$, oricare ar fi $x \in \mathbb{R}$.

8. Cu schimbarea de variabilă $\operatorname{tg} \frac{x}{2} = t$, obținem

$$\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{1 + \sin x} = \int_0^1 \frac{1}{1 + \frac{2t}{1+t^2}} \cdot \frac{2}{1+t^2} dt = 2 \int_0^1 \frac{dt}{(1+t)^2} = -\frac{2}{1+t} \Big|_0^1 = 1.$$

9. În rombul $ABCD$ avem $m(\widehat{BAD}) = 60^\circ$ și diagonalele sunt perpendiculare. Folosind definiția produsului scalar și notând cu O intersecția diagonalelor, obținem că

$$\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD} = AD \cdot AB \cdot \cos(\widehat{BAD}) + AC \cdot BD \cdot \cos(\widehat{AOD}) = 12 \cdot 12 \cdot \frac{1}{2} + 0 = 72.$$

10. Avem $m(\widehat{C}) = 180^\circ - 30^\circ - 105^\circ = 45^\circ$. Aplicăm teorema sinusului în triunghiul ABC :

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{c}{\sin C} \Leftrightarrow \frac{a}{\frac{1}{2}} = \frac{c}{\frac{\sqrt{2}}{2}} \Leftrightarrow c = a\sqrt{2}.$$

Aria triunghiului ABC este

$$\mathcal{A}(ABC) = \frac{a \cdot c \cdot \sin B}{2} = \frac{1}{2} a^2 \sqrt{2} \cdot \sin(60^\circ + 45^\circ) = \frac{1}{2} a^2 \sqrt{2} \cdot \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \right) = \frac{a^2(1 + \sqrt{3})}{4}.$$

PARTEA B

Soluții la probleme și barem:

1. (a) Fie $a_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{k}{\sqrt{n^2 + k^2}}$.

(3 puncte) Avem

$$a_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{k/n}{\sqrt{1 + (k/n)^2}} = \sigma(f, \Delta_n, \xi_n),$$

unde $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ este funcția definită prin $f(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$, Δ_n este diviziunea intervalului $[0, 1]$ definită prin $\Delta_n = (0, 1/n, 2/n, \dots, 1)$, iar $\xi_n = (1/n, 2/n, \dots, 1) \in P(\Delta_n)$.

Observație. În caz că nu se specifică funcția, diviziunea și sistemul de puncte intermediare, se acordă 2 puncte din cele 3 puncte.

(1 punct) Întrucât $\|\Delta_n\| = 1/n \rightarrow 0$ când $n \rightarrow \infty$, rezultă că $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \int_0^1 f(x) dx$.

Observație. În caz că nu se precizează $\|\Delta_n\| = 1/n \rightarrow 0$ când $n \rightarrow \infty$, nu se acordă acest punct.

(3 puncte) Prin urmare, $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \int_0^1 \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} dx = \sqrt{1+x^2} \Big|_0^1 = \sqrt{2} - 1$.

(b) Fie $b_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{k}{\sqrt{n^2 + k}}$. Avem

(1 punct) $b_n \leq \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{k}{\sqrt{n^2 + 1}} = \frac{1}{n\sqrt{n^2 + 1}} \sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2n\sqrt{n^2 + 1}}$

și analog

(1 punct) $b_n \geq \frac{n(n+1)}{2n\sqrt{n^2 + n}}$.

(1 punct) Cum $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n(n+1)}{2n\sqrt{n^2 + 1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n(n+1)}{2n\sqrt{n^2 + n}} = \frac{1}{2}$, în baza criteriului cleștelui rezultă că $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 1/2$.

2. (a) (1 punct) Mijlocul segmentului $[AB]$ este punctul $M(3, 1)$.

(1 punct) Coordonatele punctului M satisfac ecuația dreptei $d : 3 - 2 - 1 = 0$.

(b) (2 puncte) Deoarece dreapta d conține o mediană a triunghiului ABC și coordonatele punctelor A și B nu satisfac ecuația dreptei d (sau deoarece d trece prin mijlocul segmentului $[AB]$), obținem că punctul C se află pe dreapta d .

(2 puncte) Fie coordonatele punctului $C(c_1, c_2)$. Atunci avem $c_1 - 2c_2 - 1 = 0 \Leftrightarrow c_1 = 2c_2 + 1$.

(2 puncte) Aria triunghiului ABC este $\frac{1}{2}|\Delta| = 3$, unde

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 4 & 3 & 1 \\ 2c_2 + 1 & c_2 & 1 \end{vmatrix}.$$

(1 punct) De aici obținem $|-6c_2 + 6| = 6 \Leftrightarrow |-c_2 + 1| = 1$, adică $c_2 = 0$ sau $c_2 = 2$.

(1 punct) Prin urmare, coordonatele lui C pot fi $C(1, 0)$ sau $C(5, 2)$.

3. (a) (1 punct) Avem $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in G$, deci $G \neq \emptyset$.

Fie $A = \begin{pmatrix} z_1 & z_2 \\ -\bar{z}_2 & \bar{z}_1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} z_3 & z_4 \\ -\bar{z}_4 & \bar{z}_3 \end{pmatrix} \in G$. Avem:

$$\text{(3 puncte)} \quad A + B = \begin{pmatrix} z_1 + z_3 & z_2 + z_4 \\ -\bar{z}_2 - \bar{z}_4 & \bar{z}_1 + \bar{z}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_1 + z_3 & z_2 + z_4 \\ -\bar{z}_2 + z_4 & \bar{z}_1 + z_3 \end{pmatrix} \in G,$$

$$\text{(3 puncte)} \quad -A = \begin{pmatrix} -z_1 & -z_2 \\ \bar{z}_2 & -\bar{z}_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -z_1 & -z_2 \\ -(-\bar{z}_2) & -\bar{z}_1 \end{pmatrix} \in G.$$

Deci G este un subgrup al grupului $(\mathcal{M}_2(\mathbb{C}), +)$.

Observație. Alternativ, mulțimea G este un subgrup al grupului $(\mathcal{M}_2(\mathbb{C}), +) \Leftrightarrow [G \neq \emptyset, A - B \in G \text{ pentru orice } A, B \in G] \Leftrightarrow [G \text{ este parte stabilă a lui } (\mathcal{M}_2(\mathbb{C}), +) \text{ și } (G, +) \text{ este grup}]$.

(b) (1 punct) Fie funcția $f : \mathbb{C} \rightarrow G$ definită prin $f(z) = \begin{pmatrix} z & 0 \\ 0 & \bar{z} \end{pmatrix}$ pentru orice $z \in \mathbb{C}$. Se observă că $\begin{pmatrix} z & 0 \\ 0 & \bar{z} \end{pmatrix} \in G$ pentru orice $z \in \mathbb{C}$, deci f este bine definită.

(1 punct) Verificarea injectivității lui f .

(1 punct) Pentru orice $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ avem:

$$f(z_1 + z_2) = \begin{pmatrix} z_1 + z_2 & 0 \\ 0 & \bar{z}_1 + \bar{z}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_1 + z_2 & 0 \\ 0 & \bar{z}_1 + \bar{z}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_1 & 0 \\ 0 & \bar{z}_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} z_2 & 0 \\ 0 & \bar{z}_2 \end{pmatrix} = f(z_1) + f(z_2).$$

Deci f este morfism de grupuri între grupurile $(\mathbb{C}, +)$ și $(G, +)$.

Observație. Există și alte morfisme injective de grupuri între grupurile $(\mathbb{C}, +)$ și $(G, +)$, care pot fi definite, de exemplu, prin $f(z) = \begin{pmatrix} 0 & z \\ -\bar{z} & 0 \end{pmatrix}$ sau $f(z) = \begin{pmatrix} z & z \\ -\bar{z} & \bar{z} \end{pmatrix}$.