

În atenția concurenților:

- Se consideră că indexarea șirurilor începe de la 1.
- Problemele tip grilă din Partea A pot avea unul sau mai multe răspunsuri corecte care trebuie indicate de candidat pe formularul special de pe foaia de concurs. Notarea acestora se face conform sistemului de punctare parțială din regulamentul concursului.
- Pentru problemele din Partea B se cer rezolvări complete scrise pe foaia de concurs, fiind evaluate în detaliu conform baremului.
 - Rezolvarea cerințelor B1-B4 implică răspunsuri atât în limbaj natural/matematic, cât și în *pseudocod* sau *Pascal/C/C++*.
 - Primul criteriu în evaluarea rezolvărilor va fi **corectitudinea** algoritmului, iar apoi **performanța** din punct de vedere al *timpului de executare* și al *spațiului de memorie utilizat*.
 - Este obligatorie descrierea și justificarea** subalgoritmilor **înaintea** rezolvărilor. Se vor scrie, de asemenea, **comentarii** pentru a ușura înțelegerea detaliilor tehnice ale soluției date, a semnificației identificatorilor, a structurilor de date folosite etc. Neîndeplinirea acestor cerințe duce la pierderea a 10% din punctajul aferent subiectului.
 - Nu se vor folosi funcții sau biblioteci predefinite (de exemplu: *STL*, funcții predefinite pe șiruri de caractere).

Partea A (60 puncte)

A.1. Ce se afișează? (6 puncte)

Se consideră programul de mai jos. Care este rezultatul afișat în urma execuției programului?

- A. $P(a, b) = 253;$ B. $P(a, b) = 132;$ C. $P(a, b) = 22;$ D. $P(a, b) = 253;$
 $a = 11; b = 11$ $a = 11; b = 121;$ $a = 11; b = 11;$ $a = 11; b = 121;$

Varianta C++	Varianta C	Varianta Pascal
<pre>#include <iostream> using namespace std; int P(int x, int &y){ y = y * x; x = x + y; return x + y; } int main(){ int a = 11; int b = a; cout << "P(a, b) = " << P(a, b); cout << endl << "; a = " << a; cout << "; b = " << b << endl; return 0; }</pre>	<pre>#include <stdio.h> int P(int x, int *y){ *y = (*y) * x; x = x + (*y); return x + (*y); } int main(){ int a = 11; int b = a; printf("P(a, b) = %d", P(a, &b)); printf("; na = %d", a); printf("; b = %d\n", b); return 0; }</pre>	<pre>function P(x : Integer; var y : Integer) : Integer; begin y := y * x; x := x + y; P := x + y; end; var a, b : Integer; Begin a := 11; b := a; Write('P(a, b) = ', P(a, b)) WriteLn('; '); Write('a = ', a); WriteLn('; b = ', b); End.</pre>

A.2. Evaluare (6 puncte)

Se știe că v este un vector care conține n numere naturale mai mici decât 30 000 ($1 \leq n \leq 10\,000$). Care dintre următoarele secvențe de instrucțiuni poate înlocui „...” în subalgoritmul prelucrare(v, n, rez, m) astfel încât vectorul rez , după executarea structurii repetitive, să rețină valorile care sunt multipli ai lui 5 aflate pe poziții pare în vectorul v . Lungimea vectorului rez se reține în variabila m .

Subalgoritm prelucrare(v, n, rez, m)
 $m \leftarrow 0$
 Pentru $i = 1, n$ execută
 ...
 SfPentru
 SfSubalgoritm

A. Dacă $i \text{ MOD } 2 = 0$ ȘI $v[i] \text{ MOD } 5 = 0$ atunci
 $m \leftarrow m + 1; rez[m] \leftarrow v[i]$
 SfDacă

C. Dacă $v[i] \text{ MOD } 10 = 0$ atunci
 Dacă $i \text{ MOD } 2 = 0$ atunci
 $m \leftarrow m + 1; rez[m] \leftarrow v[i]$
 altfel
 Dacă $v[i] \text{ MOD } 10 = 5$ atunci
 $m \leftarrow m + 1; rez[m] \leftarrow v[i]$
 SfDacă
 SfDacă
 SfDacă

B. Dacă $i \text{ MOD } 2 = 0$ atunci
 Dacă $v[i] \text{ MOD } 10 = 5$ atunci
 $m \leftarrow m + 1; rez[m] \leftarrow v[i]$
 SfDacă
 Dacă $v[i] \text{ MOD } 10 = 0$ atunci
 $m \leftarrow m + 1; rez[m] \leftarrow v[i]$
 SfDacă
 SfDacă

D. Dacă $i \text{ MOD } 2 = 0$ ȘI $v[i] \text{ MOD } 10 = 5$ ȘI $v[i] \text{ MOD } 10 = 0$ atunci
 $m \leftarrow m + 1; rez[m] \leftarrow v[i]$
 SfDacă

A.3. Ce valori sunt necesare? (6 puncte)

Se consideră subalgoritmul calcul(n, v), unde v este un șir cu n numere întregi (n - număr natural, $1 \leq n \leq 1\,000$).

```
Subalgoritm calcul(n, v)
a ← 0; b ← 0
Pentru i ← 1, n execută
    a ← a + v[i]
SfPentru
Pentru i ← 1, n execută
    a ← a - v[i]
    Dacă a = b atunci
        returnează v[i]
    SfDacă
    b ← b + v[i]
SfPentru
returnează -1
SfSubalgoritm
```

Precizați pentru care valori ale parametrilor subalgoritmul returnează valoarea 0.

- A. $n = 5, v = (4, 5, 7, 3, 6)$
 B. $n = 7, v = (-3, 1, 2, 0, 5, -2, -3)$
 C. $n = 4, v = (-2, 2, 5, -5)$
 D. $n = 8, v = (1, -7, 3, 0, -2, 1, -2, 0)$

A.4. Oare ce face? (6 puncte)

```

Subalgoritm ghici(n)
  f ← 0; p ← -1
  Pentru c ← 0, 9 execută
    x ← n; k ← 0
    CâtTimp x > 0 execută
      Dacă x MOD 10 = c atunci
        k ← k + 1
      SfDacă
      x ← x DIV 10
    SfCâtTimp
    Dacă k > f atunci
      p ← c; f ← k
    SfDacă
  SfPentru
  returnează p
SfSubalgoritm
  
```

Se consideră subalgoritmul $ghici(n)$, unde n este număr natural ($1 \leq n \leq 10000$). Precizați efectul subalgoritmului $ghici(n)$:

- Calculează și returnează numărul de cifre din reprezentarea zecimală a numărului n .
- Calculează și returnează frecvența cifrei maxime din reprezentarea zecimală a numărului n .
- Calculează și returnează una dintre cifrele cu frecvența maximă din reprezentarea zecimală a numărului n .
- Calculează și returnează numărul de cifre egale cu c din reprezentarea zecimală a numărului n .

A.5. Generare șir de numere speciale (6 puncte)

Se știe că într-un șir x cu k elemente $x = (x_1, x_2, x_3, \dots, x_k)$ o secvență y de lungime p este reprezentată de p elemente ale șirului x care se află pe poziții consecutive. De ex. $y = (x_3, x_4, x_5, x_6)$ este o secvență de lungime $p = 4$.

Se consideră mulțimea de cifre $M = \{1, 2, \dots, n\}$ și cele $n!$ permutări ale mulțimii M (n – număr natural, $n \leq 9$). Se poate construi cel mai scurt șir ss format cu cifre din M astfel încât oricare dintre cele $n!$ permutări ale mulțimii M să se regăsească în ss sub forma unei secvențe de n cifre.

De exemplu, dacă $n = 3$, avem 6 permutări, iar șirul cerut ss are 9 cifre și poate fi, de exemplu următorul: $ss = (1, 2, 3, 1, 2, 1, 3, 2, 1)$. Din permutarea $perm_1 = (1, 2, 3)$ se pot folosi ultimele două cifre ale sale și se adaugă o a treia cifră pentru a obține o altă permutare, adică permutarea $perm_2 = (2, 3, 1)$; apoi se poate așeza cifra 2 după ultimele două cifre ale $perm_2$ și se obține permutarea $perm_3 = (3, 1, 2)$. Dacă după $(1, 2)$ s-ar așeza cifra 3, s-ar obține permutarea $perm_1$ care există deja în șirul de cifre generat până la acest moment. Atunci se folosește doar ultima cifră din $perm_3$ și se caută o permutare care începe cu cifra 2 și încă nu face parte din șir ș. a. m. d. Astfel, în șirul construit există o secvență de trei cifre care nu este o permutare $(1, 2, 1)$; restul secvențelor (adică $(1, 2, 3)$, $(2, 3, 1)$, $(3, 1, 2)$, $(2, 1, 3)$, $(1, 3, 2)$ și $(3, 2, 1)$) sunt permutări.

Precizați numărul minim de elemente de tip cifră din care se poate construi șirul ss în cazul mulțimii $M = \{1, 2, 3, 4\}$.

$perm_1$								
1	2	3	1	2	1	3	2	1
$perm_2$								

- A. 55 B. 16 C. 33 D. 37

A.6. Produs cifre (6 puncte)

```

Subalgoritm cifre(n, d)
  Dacă d = 1 atunci
    Dacă n = 1 atunci
      returnează 0
    altfel
      returnează -1
  SfDacă
  altfel
    Dacă n MOD d = 0 atunci
      val = cifre(n DIV d, d)
      Dacă val < 0 atunci
        returnează -1
      altfel
        returnează val * 10 + d
    SfDacă
  altfel
    returnează cifre(n, d - 1)
  SfDacă
SfSubalgoritm
  
```

Se consideră subalgoritmul $cifre(n, d)$, unde n și d sunt numere naturale ($10 \leq n \leq 100000$, $1 \leq d \leq 9$), care determină și returnează cel mai mic număr natural format din cifre nenule mai mici sau egale cu d și cu proprietatea că produsul cifrelor sale este egal cu n . De exemplu, dacă $n = 108$, subalgoritmul returnează 269. Dacă nu există un astfel de număr, subalgoritmul returnează -1. Precizați de câte ori se autoapelează subalgoritmul $cifre(n, d)$ prin executarea secvenței de instrucțiuni:

```

Citește n
val = cifre(n, 9)
  
```

- Dacă $n = 108$, subalgoritmul se autoapelează de 11 ori.
- Dacă $n = 109$, subalgoritmul se autoapelează de 8 ori.
- Dacă $n = 13$, subalgoritmul nu se autoapelează niciodată.
- Dacă $n = 100$, subalgoritmul se autoapelează de 10 ori.

A.7. Prelucrare șir (6 puncte)

Se consideră subalgoritmul $prelucrare(n, x)$, unde x este un șir cu $n - 1$ numere naturale distincte din mulțimea $\{1, 2, \dots, n\}$. Precizați care este semnificația valorii returnate de către subalgoritm.

```

Subalgoritm prelucrare(n, x)
  s ← 0
  Pentru i ← 1, n - 1 execută
    s ← s + x[i]
  SfPentru
  returnează n * (n + 1) / 2 - s
SfSubalgoritm
  
```

- Subalgoritmul returnează diferența dintre suma primelor n numere naturale nenule și suma elementelor din șirul x .
- Subalgoritmul returnează diferența dintre suma primelor n numere naturale nenule și suma elementelor din șir, mai puțin ultimul element din șir.
- Subalgoritmul returnează acel număr natural din mulțimea $\{1, 2, \dots, n\}$ care nu apare în șirul x .
- Subalgoritmul returnează 0.

A.8. Magie (6 puncte)

Un vrăjitor de cifre face o magie prin care un număr natural x ($100 \leq x \leq 1000000$ și, reprezentat în baza 10, are cel puțin două cifre nenule) se separă în două numere naturale nenule *stânga* și *dreapta*, astfel încât numărul x să se poate scrie prin concatenarea cifrelor numerelor *stânga* și *dreapta*, iar produsul dintre *stânga* și *dreapta* este maxim. De exemplu, numărul $x = 1092$, prin magie, se separă în numerele *stânga* = 10 și *dreapta* = 92.

Care dintre subalgoritmii de mai jos aplică magia vrăjitorului asupra unui număr natural x care, reprezentat în baza 10, are cel puțin două cifre nenule ($100 \leq x \leq 1\ 000\ 000$), identificând numărul natural z ($1 \leq z \leq 1\ 000\ 000$) care reprezintă *dreapta* asociată lui x știind că au fost deja definiți subalgoritmii:

- $putere(b, p)$ – determină b^p (b la puterea p), b și p fiind numere naturale ($1 \leq b \leq 20, 1 \leq p \leq 20$);
- $nrCifre(nr)$ – determină numărul cifrelor unui număr natural nr ($1 \leq nr \leq 1\ 000\ 000$).

<p>A.</p> <pre> Subalgoritm magie(x, z) prodMax ← -1 rez ← 0 CâtTimp x > 0 execută z ← (x MOD 10) * putere(10, nrCifre(z)) + z x ← x DIV 10 Dacă x * z > prodMax atunci prodMax ← x * z rez ← z SfDacă SfCâtTimp returnează prodMax SfSubalgoritm </pre>	<p>B.</p> <pre> Subalgoritm magie(x, z) t ← 0 Dacă x > 0 atunci y ← (x MOD 10) * putere(10, nrCifre(z)) + z t ← x DIV 10 Dacă x * z < y * t atunci returnează magie(y, t) altfel returnează t SfDacă altfel returnează t SfDacă SfSubalgoritm </pre>
<p>C.</p> <pre> Subalgoritm magie(x, z) prodMax ← -1 rez ← 0 CâtTimp x > 0 execută z ← (x MOD 10) * putere(10, nrCifre(z)) + z x ← x DIV 10 Dacă x * z > prodMax atunci prodMax ← x * z rez ← z SfDacă SfCâtTimp returnează rez SfSubalgoritm </pre>	<p>D.</p> <pre> Subalgoritm magie(x, z) Dacă x > 0 atunci y ← (x MOD 10) * putere(10, nrCifre(z)) + z t ← x DIV 10 Dacă x * z < y * t atunci returnează magie(y, t) altfel returnează z SfDacă altfel returnează z SfDacă SfSubalgoritm </pre>

A.9. Completați (6 puncte)

Se consideră un șir x ordonat crescător cu n ($3 \leq n \leq 100$) elemente numere naturale distincte mai mici decât 30 000. Subalgoritmul $apropiat(x, st, dr, val)$ determină poziția celui mai mare element din șirul x aflat între pozițiile st și dr ($1 \leq st < dr \leq n$) și a cărui valoare este mai mică sau egală cu val . În cazul în care nu există un astfel de element, subalgoritmul $apropiat(x, st, dr, val)$ returnează 0.

Subalgoritmul $modul(a)$ returnează valoarea absolută a numărului întreg a .

Subalgoritmul $calcul(n, x, nr)$ determină cea valoare existentă în șirul x care este cea mai apropiată de valoarea lui nr . În cazul a două elemente la fel de apropiate de valoarea lui nr , se va considera elementul mai mare.

Fie $n = 5$, $x = (5, 9, 11, 15, 99)$ și $nr = 12$. Precizați cu ce se pot înlocui punctele de suspensie în cadrul subalgoritmului $apropiat(x, st, dr, val)$ pentru ca prin executarea subalgoritmului $calcul(n, x, nr)$ să se returneze valoarea 11.

<pre> Subalgoritm apropiat(x, st, dr, val) Dacă val > x[dr] atunci returnează dr SfDacă Dacă val < x[st] atunci returnează st - 1 SfDacă mij ← (st + dr) DIV 2 Dacă ... atunci returnează mij - 1 altfel Dacă val < x[mij] atunci returnează apropiat(x, st, mij - 1, val) altfel returnează apropiat(x, mij + 1, dr, val) SfDacă SfDacă SfSubalgoritm </pre>	<pre> Subalgoritm calcul(n, x, nr) i ← apropiat(x, 1, n, nr) Dacă i = 0 atunci returnează x[i + 1] altfel Dacă modul(x[i] - nr) < modul(x[i + 1] - nr) atunci returnează x[i] altfel returnează x[i + 1] SfDacă SfDacă SfSubalgoritm </pre>
--	--

- A. $x[mij - 1] \leq val$ ȘI $val < x[mij]$
 B. $x[mij - 1] \leq val$ SAU $val < x[mij]$
 C. $x[mij - 1] < val$ ȘI $val \leq x[mij]$
 D. $x[mij] \leq val$ ȘI $val < x[mij - 1]$

A.10. Cavaleri și mincinoși (6 puncte)

Pe o insulă locuiesc cavaleri care spun întotdeauna adevărul și mincinoși care mint întotdeauna. Un vizitator ajuns pe insulă dorește să afle natura unei perechi de localnici cu care s-ar întâlni în plimbările lui pe insulă. Astfel, atunci când el se întâlnește cu doi localnici A și B îi adresează lui A întrebarea „ Q_1 : Amândoi sunteți cavaleri?“, dar răspunsul primit (R_1) nu îl lămurește în privința naturii fiecăruia din cei doi localnici. De aceea vizitatorul îi adresează tot lui A o nouă întrebare: „ Q_2 : Sunteți la fel, amândoi cavaleri sau amândoi mincinoși?“; de data aceasta, răspunsul primit (R_2) îl lămurește pe vizitator (adică acum știe ce este fiecare dintre cei doi localnici, cavaler sau mincinos).

Ce a răspuns localnicul A știind că vizitatorul a reușit să identifice în mod exact natura celor doi localnici pe baza scenariului descris anterior?

- A. R_1 : Da, R_2 : Da B. R_1 : Da, R_2 : Nu C. R_1 : Nu D. Variantele B și C sunt corecte.

Partea B (30 puncte)

Banane



În urma unui naufragiu, marinarii de pe o corabie au reușit să se salveze folosind bărcile de salvare, iar fiecare barcă, încărcată cu câte trei marinari, a ajuns pe o altă insulă. Căutând mâncare, marinarii de pe fiecare insulă i au cules b_i banane pe care le-au depozitat în barcă și au decis să le împartă între ei abia a doua zi. În oricare barcă încap cel mult k banane. În timpul nopții, pe o insulă, unul dintre marinari s-a trezit și a împărțit bananele din barcă în trei grămezi, fiecare grămadă având același număr de banane, dar a constatat că i-a mai rămas o banană (neplăsată în nici una dintre grămezi) pe care a mâncat-o. Apoi, el a ascuns una dintre grămezi, a pus celelalte două grămezi înapoi în barcă și s-a culcat. Până dimineața fiecare marinar de pe fiecare insulă a efectuat același tip de intervenție secretă (a împărțit bananele în trei grămezi egale, a mâncat banana rămasă, a ascuns una dintre grămezi și a pus înapoi în barcă celelalte două grămezi). Dimineața, pe fiecare insulă, bananele rămase în barcă au fost împărțite în trei grămezi identice nevide și, din nou, a rămas o banană, pe care marinarii au dat-o unei maimuțe. Da, pe fiecare insulă trăia și câte o maimuță! ☺

Cerințe:

- B.1.** Dacă marinarii de pe una din insule au cules înainte de venirea nopții 241 de banane, câte banane au rămas în fiecare dintre cele trei grămezi finale (de pe insula respectivă)? (2 puncte)
- B.2.** Dacă pe una din insule, după ultima împărțire, fiecare din cele trei grămezi conținea 15 banane, iar pe o altă insulă, fiecare din cele trei grămezi conținea 31 banane, câte banane s-au cules în total pe cele două insule? (2 puncte)
- B.3.** Scrieți un subalgoritm care pentru un număr k dat calculează cea mai mare valoare posibilă a lui $bmax$ care reprezintă numărul de banane culese de marinarii de pe o insulă. Parametrul de intrare al subalgoritmului este k . $bmax$ este parametru de ieșire. Identificați formula de calcul a valorii maxime a lui $bmax$ în funcție de valoarea lui k . Explicați raționamentul folosit ($bmax, k$ – numere naturale, $1 \leq bmax \leq k, 100 \leq k \leq 10\,000\,000$). (14 puncte)
Exemplu: dacă $k = 200$, atunci $bmax = 160$.
- B.4.** Scrieți un subalgoritm care, pentru o valoare k dată, calculează numărul total maxim de banane culese pe toate insulele ($totalMax$). Se știe că pe fiecare insulă marinarii au cules un număr diferit de banane b_i (k, b_i – numere naturale, $1 \leq b_i \leq k, b_i \neq b_j, \forall i, j \in \{1, 2, \dots, nr\}, 100 \leq k \leq 10\,000\,000$). Parametrii de intrare ai subalgoritmului sunt k și nr – numărul de insule (nr – număr natural, $2 \leq nr \leq 10$), iar cel de ieșire este $totalMax$, reprezentând numărul total maxim de banane culese pe toate insulele. Valorile variabilelor k și nr sunt date astfel încât problema are soluție. (12 puncte)
Exemplu: dacă $k = 400, nr = 3$, atunci pe cele trei insule numărul de banane culese va fi 322, 241 și, respectiv 160. Prin urmare numărul maxim de banane culese pe toate insulele este $totalMax = 322 + 241 + 160 = 723$.

Notă:

1. Toate subiectele sunt obligatorii.
2. Ciornele nu se iau în considerare.
3. Se acordă 10 puncte din oficiu.
4. Timpul efectiv de lucru este de 3 ore.

BAREM

OFICIU	10 puncte
Partea A	60 puncte
A.1. Ce se afișează? Răspuns: D	6 puncte
A.2. Evaluare. Răspuns: A, B	6 puncte
A.3. Ce valori sunt necesare? Răspuns: B, D	6 puncte
A.4. Oare ce face? Răspuns: C	6 puncte
A.5. Generare șir de numere speciale. Răspuns: C	6 puncte
A.6. Produs de cifre. Răspuns: A, B	6 puncte
A.7. Prelucrare șir. Răspuns: A, C	6 puncte
A.8. Magie. Răspuns: orice variantă (vezi nota finală)	6 puncte
A.9. Completați. Răspuns: A, D	6 puncte
A.10. Cavaleri și mincinoși. Răspuns: B	6 puncte

Partea B Banane **30 puncte**

B.1. (241 * 8 - 65) / 81 = 23 banane.....	2 puncte
B.2. (81 * 15 + 65) / 8 + (81 * 31 + 65) / 8 = 482 banane.....	2 puncte
B.3. Algoritmul & formula	14 puncte
○ Identificare corectă a formulei $79 + ((k - 79) / 81) * 81$	10 puncte
▪ Expresia formulei	4 puncte
▪ Justificarea	6 puncte
○ Implementare	
▪ Respectarea parametrilor (doar cel de intrare)	2 puncte
▪ Algoritm	
• V1 pe baza formulei $79 + ((k - 79) / 81) * 81$	2 puncte
• V2 (structură repetitivă ”smart” în care se verifică cu formula $(8 * n - 65) \text{ MOD } 81 = 0$ dacă valoarea curentă a lui n este corectă sau nu).....	7 puncte
• V3 simulare (se determină mărimile grămezilor intermediare)	5 puncte
B.4. Algoritmul & formula	12 puncte
○ Respectarea parametrilor	2 puncte
○ Algoritm	
▪ Structura repetitivă pentru iterarea insulelor.....	3 puncte
▪ Valori distincte pentru numărul de banane de pe fiecare insulă.....	5 puncte
▪ Însurarea valorilor	2 puncte

```

int bananeV1(int k){
    return 79 + (k - 79) / 81 * 81;
}

int bananeV2(int k){
    while ((8 * k - 65) % 81 != 0)
        k--;
    return k;
}

int bananeV3(int k){
    int n = k;
    while (n >= 4){
        if (n % 3 == 1){
            int n1 = 2 * n / 3;
            if (n1 % 3 == 1){
                int n2 = 2 * n1 / 3;
                if (n2 % 3 == 1){
                    int n3 = 2 * n2 / 3;
                    if (n3 % 3 == 1){ return n;}
                }
            }
        }
        n--;
    }
}

```

```

int bananeToateInsulele(int k, int nr){
    int s = 0;
    for(int i = 1; i <= nr; i++){
        int ni = bananeV1(k);
        s += ni; k = ni - 1;
    }
    return s;
}

```

Notă: În cazul problemei A.8. subalgoritmul nrCifre(nr) ar fi trebuit să prelucreze inclusiv valori nule (aspect omis în enunțul problemei) pentru ca algoritmul magie(x, z) să funcționeze conform cerințelor. În consecință, punctajul obținut pentru această problemă va fi de 6 puncte (indiferent de răspunsurile indicate pe foaia de examen).