

CONCURS DE ADMITERE, 15 iulie 2018
Proba scrisă la MATEMATICĂ

NOTĂ IMPORTANTĂ:

1) Problemele tip grilă (Partea A) pot avea unul sau mai multe răspunsuri corecte. Acestea trebuie indicate de candidat pe foaia de concurs. Obținerea punctajului aferent problemei este condiționată de identificarea tuturor variantelor de răspuns corecte și numai a acestora.

2) Pentru problemele din Partea B se cer rezolvări complete pe foaia de concurs. Acestea sunt evaluate în detaliu conform baremului.

PARTEA A

1. (5 puncte) Fie $a = (1 + \sqrt{2})^7 + (1 - \sqrt{2})^7$. Stabiliți care dintre următoarele afirmații sunt adevărate:

A $a \notin \mathbb{R}$; B $a \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$; C $a \in \mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z}$; D $a \in \mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}$; E $a \in \mathbb{N}$.

2. (5 puncte) Fie A o mulțime cu 4 elemente și B o mulțime cu 5 elemente. Numărul funcțiilor definite pe A cu valori în B este:

A 0; B 4^5 ; C 5^4 ; D A_5^4 ; E C_5^4 .

3. (5 puncte) Fie m un parametru real. Numărul rădăcinilor reale ale ecuației $x^3 - 12x = m$ este:

A 0; B 1 pentru $m < -16$; C 1 pentru $m > 16$; D 3 pentru $-16 < m < 16$; E 3 pentru orice $m \in \mathbb{R}$.

4. (5 puncte) Aria unui triunghi ABC este egală cu 5 unități. Vârfurile A și B au coordonatele $(2, 1)$, respectiv $(3, -2)$, în timp ce vârful C se află pe dreapta $y = x + 3$. Atunci coordonatele vârfului C pot fi:

A $(-3/2, 3/2)$; B $(3/4, -3/2)$; C $(7/2, 13/2)$;
 D $(11/2, -1/2)$; E $(2, 5)$.

5. (5 puncte) Care dintre următoarele mulțimi poate fi o submulțime a soluției generale a ecuației

$$1 + \cos 3x = 2 \cos 2x ?$$

A $\left\{ n\pi + \frac{\pi}{3} \mid n \in \mathbb{Z} \right\}$; B $\left\{ n\pi + \frac{\pi}{6} \mid n \in \mathbb{Z} \right\}$; C $\left\{ n\pi - \frac{\pi}{6} \mid n \in \mathbb{Z} \right\}$; D $\{ 2n\pi \mid n \in \mathbb{Z} \}$;
 E $\left\{ n\pi - \frac{\pi}{3} \mid n \in \mathbb{Z} \right\}$.

6. (5 puncte) Fie a un număr real strict pozitiv diferit de 1. Valoarea limitei $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x^2)^{\ln a} - 1}{\operatorname{tg}^2 x}$ este

A 0; B 1; C $\frac{\ln a}{|\ln a|}$; D $\ln a$; E $2 \ln a$.

PARTEA B

1. Considerăm inelul $(\mathbb{R}[X], +, \cdot)$ definit pe mulțimea $\mathbb{R}[X]$ a polinoamelor cu coeficienți reali de operațiile uzuale de adunare și înmulțire a polinoamelor și

$$A = \{f \in \mathbb{R}[X] \mid \operatorname{grad} f \leq 3\}.$$

a) (8 puncte) Să se arate că A este un subgrup al grupului $(\mathbb{R}[X], +)$.

b) (5 puncte) Să se arate că A nu este parte stabilă a lui $\mathbb{R}[X]$ în raport cu înmulțirea polinoamelor.

c) (7 puncte) Câte polinoame divizibile cu $X^2 - 4$ din mulțimea A dau prin împărțire la $X^2 - 4X + 3$ restul $X + 1$? Justificați răspunsul.

2. a) (7 puncte) Fie a și b două numere reale strict pozitive. Punctele $B(a, 0)$ și $D(0, b)$ sunt două vârfuri (opuse) ale unui pătrat $ABCD$. Determinați coordonatele celorlalte două vârfuri.

b) (8 puncte) Demonstrați că dacă $\alpha + \beta - \gamma = \pi$, atunci

$$\sin^2 \alpha + \sin^2 \beta - \sin^2 \gamma = 2 \sin \alpha \sin \beta \cos \gamma.$$

3. Fie $a > 0$. Considerăm funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definită prin

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2^x}, & x \leq a \\ \sqrt{x}, & x > a \end{cases}.$$

a) (10 puncte) Determinați numărul a pentru care f este continuă pe \mathbb{R} .

b) (8 puncte) Determinați primitivele funcției f în cazul valorilor a pentru care acestea există.

c) (7 puncte) Calculați integrala $\int_0^1 f(x) dx$ în funcție de a .

NOTĂ:

Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.

Timpul efectiv de lucru este de 3 ore.

Răspunsuri și soluții

PARTEA A

1. **E**; 2. **C**; 3. **B**, **C**, **D**; 4. **A**, **C**; 5. **B**, **C**, **D**; 6. **D**.

PARTEA B

1. a) Precizăm că putem rescrie A astfel $A = \{f = a_0 + a_1X + a_2X^2 + a_3X^3 \mid a_0, a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}\}$. Polinomul nul 0 are gradul $-\infty$, prin urmare $0 \in A$ și astfel $A \neq \emptyset \forall f, g \in A, f + g \in A$ deoarece $\forall f, g \in A, \exists a_i, b_i \in \mathbb{R} (i = 0, 1, 2, 3) : f = a_0 + a_1X + a_2X^2 + a_3X^3, g = b_0 + b_1X + b_2X^2 + b_3X^3$ prin urmare $f + g = (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)X + (a_2 + b_2)X^2 + (a_3 + b_3)X^3 \in A$ (**Altfel:** Știind că $\text{grad}(f + g) \leq \max\{\text{grad } f, \text{grad } g\}$, din $\text{grad } f \leq 3$ și $\text{grad } g \leq 3$ rezultă $\text{grad}(f + g) \leq 3$ și astfel $f + g \in A$) $\forall f \in A, -f \in A$ deoarece $\forall f \in A, \exists a_i \in \mathbb{R} (i = 0, 1, 2, 3) : f = a_0 + a_1X + a_2X^2 + a_3X^3$ și $-f = (-a_0) + (-a_1)X + (-a_2)X^2 + (-a_3)X^3 \in A$

1. b) Luând $f = X^3 \in A$ avem $f \cdot f = X^6 \notin A$ deoarece $f \cdot f$ are gradul 6 (**sau:** dacă $f, g \in A$ au ambele gradul egal cu 3, cum $\text{grad}(f \cdot g) = \text{grad } f + \text{grad } g = 6, f \cdot g \notin A$).

Observație: Simpla scriere a faptului că produsul a două polinoame de grad cel mult 3 poate avea grad mai mare decât 3 se notează doar cu 0,5 puncte dacă nu este însoțită de un exemplu sau de enunțarea corectă a proprietății ce leagă gradul produsului a 2 polinoame de gradele celor 2 polinoame.

1. c) **Soluția 1:** Fie $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ și $f = a + bX + cX^2 + dX^3$.

Conform teoremei împărțirii cu rest pentru polinoamele din $\mathbb{R}[X]$, există $q_1 \in \mathbb{R}[X]$ astfel încât

$$f = (X^2 - 4X + 3)q_1 + (X + 1) = (X - 1)(X - 3)q_1 + (X + 1) \quad (1)$$

De asemenea, din $(X^2 - 4) \mid f$ rezultă că există $q_2 \in \mathbb{R}[X]$ astfel încât

$$f = (X^2 - 4)q_2 = (X - 2)(X + 2)q_2 \quad (2)$$

Calculăm $f(1)$ și $f(3)$ folosind (1) și obținem:

$$a + b + c + d = 2 \quad (3)$$

$$a + 3b + 3^2c + 3^3d = 4 \quad (4)$$

Calculăm $f(2)$ și $f(-2)$ folosind (2) și obținem:

$$a + 2b + 2^2c + 2^3d = 0 \quad (5)$$

$$a + (-2)b + (-2)^2c + (-2)^3d = 0 \quad (6)$$

Polinomul f satisface condițiile din enunț dacă și numai dacă (a, b, c, d) este o soluție a sistemului de 4 ecuații cu 4 necunoscute (S) format cu ecuațiile (3), (4), (5), (6). Determinantul acestui sistem este (determinantul de tip Vandermonde)

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 3^2 & 3^3 \\ 1 & 2 & 2^2 & 2^3 \\ 1 & -2 & (-2)^2 & (-2)^3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 2 & -2 \\ 1 & 3^2 & 2^2 & (-2)^2 \\ 1 & 3^3 & 2^3 & (-2)^3 \end{vmatrix} = 120 \neq 0, \text{ prin urmare sistemul } (S) \text{ este}$$

compatibil determinat, deci există un singur polinom f care satisface condițiile din problemă.

Observație: Calculul lui Δ poate fi efectuat și fără a îl recunoaște ca fiind un determinant de tip Vandermonde, iar rezolvarea sistemului (S) nu este necesară pentru stabilirea răspunsului la întrebare.

Soluția 2: Din $(X^2 - 4) \mid f$ rezultă că există $q \in \mathbb{R}[X]$ astfel încât

$$f = (X^2 - 4)q \quad (1)$$

Gradul lui q este cel mult 1, prin urmare există $a, b \in \mathbb{R}$ astfel încât $q = aX + b$ și atunci (1) devine

$$f = (X^2 - 4)(aX + b) \quad (2)$$

Conform teoremei împărțirii cu rest pentru polinoamele din $\mathbb{R}[X]$, există $q_1 \in \mathbb{R}[X]$ astfel încât

$$f = (X^2 - 4X + 3)q_1 + (X + 1) = (X - 1)(X - 3)q_1 + (X + 1) \quad (3)$$

de unde rezultă $f(1) = 2$ și $f(3) = 4$. Folosind (2), acum rezultă

$$2 = f(1) = -3(a + b) \Leftrightarrow a + b = -\frac{2}{3} \quad (4)$$

$$4 = f(3) = 5(3a + b) \Leftrightarrow 3a + b = \frac{4}{5} \quad (5)$$

Cum sistemul format cu ecuațiile (4) și (5) are o soluție unică $\left(a = \frac{11}{15}, b = -\frac{7}{5}\right)$, există un singur polinom f care satisface condițiile din problemă.

Observație: Nici această soluție nu necesită aflarea lui f , dar conduce mai ușor la determinarea sa:

$$f = (X^2 - 4) \left(\frac{11}{15}X - \frac{7}{5} \right) = \frac{11}{15}X^3 - \frac{7}{5}X^2 - \frac{44}{15}X + \frac{28}{5}.$$

(Avem astfel și forma soluției sistemului (S) din **Soluția 1.**)

2. a) BD este una dintre diagonalele pătratului. Panta dreptei BD este $k = -\frac{b}{a}$, iar ecuația dreptei este $bx + ay - ab = 0$. Lungimea laturii pătratului este $BD/\sqrt{2} = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{a^2 + b^2}$. A doua diagonală a pătratului, AC , trece prin mijlocul E al segmentului $[BD]$ și e perpendiculară pe prima. Coordonatele lui E sunt $\left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}\right)$, iar panta dreptei AC este $\frac{a}{b}$. Ecuația dreptei AC este $y - \frac{b}{2} = \frac{a}{b} \left(x - \frac{a}{2}\right)$. Fie $C(x_C, y_C)$ unul dintre cele două vârfuri rămase ale pătratului. C se află pe dreapta A , iar $CD^2 = BD^2/2$, deci coordonatele sale verifică sistemul

$$\begin{cases} y_C - \frac{b}{2} = \frac{a}{b} \left(x_C - \frac{a}{2}\right), \\ 2[x_C^2 + (y_C - b)^2] = a^2 + b^2 \end{cases}$$

Sistemul de mai sus ne conduce la ecuația $4x_C^2 - 4ax_C + a^2 - b^2 = 0$, cu soluțiile $x_C = \frac{1}{2}(a \pm b)$. Dacă alegem semnul $+$, obținem unul dintre vârfuri, de exemplu, $C\left(\frac{a+b}{2}, \frac{a+b}{2}\right)$, iar dacă alegem semnul $-$, obținem vârful opus, $A\left(\frac{a-b}{2}, \frac{b-a}{2}\right)$.

2. b) Fie MS membrul stâng al identității de demonstrat și MD membrul drept. Atunci avem

$$MS = \sin^2 \alpha + \sin^2 \beta - \sin^2 \gamma = \sin^2 \alpha + \sin(\beta + \gamma) \sin(\beta - \gamma)$$

Conform condiției din enunț, $\beta - \gamma = \pi - \alpha$, așadar

$$MS = \sin^2 \alpha + \sin(\beta + \gamma) \sin(\pi - \alpha) = \sin^2 \alpha + \sin(\beta + \gamma) \sin \alpha = \sin \alpha [\sin \alpha + \sin(\beta + \gamma)]$$

Folosind din nou condiția din enunț, avem $\alpha = \pi - (\beta - \gamma)$, deci

$$MS = \sin \alpha [\sin(\pi - (\beta - \gamma)) + \sin(\beta + \gamma)] = \sin \alpha [\sin(\beta - \gamma) + \sin(\beta + \gamma)]$$

sau

$$MS = \sin \alpha [2 \sin \beta \cos \gamma] = 2 \sin \alpha \sin \beta \cos \gamma = MD.$$

3. a) Funcția este continuă în punctele $x \neq a$ (fiind exponențială sau de tip putere într-o vecinătate a lui x , și $a > 0$ garantează că \sqrt{x} este definit pentru $x > a$). În punctul $x = a$ avem

$$\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x < a}} f(x) = \frac{1}{2^a} \text{ și}$$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x > a}} f(x) = \sqrt{a},$$

deci condiția necesară și suficientă pentru continuitatea lui f este $\frac{1}{2^a} = \sqrt{a}$. Membrul drept al acestei ecuații este o funcție strict crescătoare, iar membrul stâng o funcție descrescătoare (ca și funcție de a), deci ecuația poate avea cel mult o soluție. Pe de altă parte $a = \frac{1}{2}$ este o soluție, deci f este continuă dacă și numai dacă $a = \frac{1}{2}$.

3. b) Dacă există o primitivă a lui f , atunci f are proprietatea lui Darboux, deci nu are discontinuitate de speța I. Pentru $a \neq \frac{1}{2}$, f ar avea însă o astfel de discontinuitate, deci f este primitivabilă dacă și numai dacă $a = \frac{1}{2}$. Dacă $a = \frac{1}{2}$, atunci primitivele lui f au forma

$$F(x) = \begin{cases} -\frac{1}{2^x} \cdot \frac{1}{\ln 2} + c_1, & x \leq \frac{1}{2} \\ \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + c_2, & x > \frac{1}{2} \end{cases}.$$

Acestea trebuie să fie continue, deci

$$-\frac{1}{\sqrt{2} \ln 2} + c_1 = \frac{1}{3\sqrt{2}} + c_2.$$

Astfel primitivele au forma

$$F(x) = \begin{cases} -\frac{1}{2^x} \cdot \frac{1}{\ln 2} + c, & x \leq \frac{1}{2} \\ \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{\sqrt{2} \ln 2} - \frac{1}{3\sqrt{2}} + c, & x > \frac{1}{2} \end{cases}.$$

Acestea sunt și derivabile datorită consecinței teoremei lui Lagrange, și are loc $F'(x) = f(x)$ pentru orice $x \in \mathbb{R}$.

3. c) Dacă $0 < a < 1$, atunci $\int_0^1 f(x) dx = \int_0^a f(x) dx + \int_a^1 f(x) dx = \int_0^a \frac{1}{2^x} dx + \int_a^1 \sqrt{x} dx = -\frac{1}{2^x \ln 2} \Big|_0^a +$

$$\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} \Big|_a^1 = \frac{2}{3} - \frac{2}{3}a^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{2^a \ln 2} + \frac{1}{\ln 2}.$$

$$\text{Dacă } 1 \leq a, \text{ atunci } \int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 \frac{1}{2^x} dx = -\frac{1}{2^x \ln 2} \Big|_0^1 = \frac{1}{2 \ln 2}.$$

BAREM DE CORECTARE

PARTEA A

1. E 5 p
2. C 5 p
3. B, C, D 5 p
4. A, C 5 p
5. B, C, D 5 p
6. D 5 p

PARTEA B

1. a) Precizăm că putem rescrie A astfel

$$A = \{f = a_0 + a_1X + a_2X^2 + a_3X^3 \mid a_0, a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}\}.$$

a) Polinomul nul 0 are gradul $-\infty$, prin urmare $0 \in A$ și astfel $A \neq \emptyset$ 2 p

$\forall f, g \in A, f + g \in A$ 3 p

deoarece $\forall f, g \in A, \exists a_i, b_i \in \mathbb{R} (i = 0, 1, 2, 3)$:

$$f = a_0 + a_1X + a_2X^2 + a_3X^3, g = b_0 + b_1X + b_2X^2 + b_3X^3$$

prin urmare $f + g = (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)X + (a_2 + b_2)X^2 + (a_3 + b_3)X^3 \in A$

(**Altfel:** Știind că $\text{grad}(f + g) \leq \max\{\text{grad } f, \text{grad } g\}$, din $\text{grad } f \leq 3$ și $\text{grad } g \leq 3$ rezultă

$$\text{grad}(f + g) \leq 3 \text{ și astfel } f + g \in A)$$

$\forall f \in A, -f \in A$ 3 p

deoarece $\forall f \in A, \exists a_i \in \mathbb{R} (i = 0, 1, 2, 3) : f = a_0 + a_1X + a_2X^2 + a_3X^3$ și

$$-f = (-a_0) + (-a_1)X + (-a_2)X^2 + (-a_3)X^3 \in A$$

1. b) Luând $f = X^3 \in A$ avem $f \cdot f = X^6 \notin A$ deoarece $f \cdot f$ are gradul 6. 5 p

(**sau:** dacă $f, g \in A$ au ambele gradul egal cu 3, cum $\text{grad}(f \cdot g) = \text{grad } f + \text{grad } g = 6, f \cdot g \notin A$)

Observație: Simpla scriere a faptului că produsul a două polinoame de grad cel mult 3 poate avea grad mai mare decât 3 se notează doar cu 0,5 puncte dacă nu este însoțită de un exemplu sau de enunțarea corectă a proprietății ce leagă gradul produsului a 2 polinoame de gradele celor 2 polinoame.

1. c) **Soluția 1:** Fie $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ și $f = a + bX + cX^2 + dX^3$.

Conform teoremei împărțirii cu rest pentru polinoamele din $\mathbb{R}[X]$, există $q_1 \in \mathbb{R}[X]$ astfel încât

$$f = (X^2 - 4X + 3)q_1 + (X + 1) = (X - 1)(X - 3)q_1 + (X + 1) \quad (1) \quad \dots\dots\dots 1 \text{ p}$$

De asemenea, din $(X^2 - 4) \mid f$ rezultă că există $q_2 \in \mathbb{R}[X]$ astfel încât

$$f = (X^2 - 4)q_2 = (X - 2)(X + 2)q_2 \quad (2) \quad \dots\dots\dots 1 \text{ p}$$

Calculăm $f(1)$ și $f(3)$ folosind (1) și obținem:

$$a + b + c + d = 2 \quad (3) \quad \dots\dots\dots 0,5 \text{ p}$$

$$a + 3b + 3^2c + 3^3d = 4 \quad (4) \quad \dots\dots\dots 0,5 \text{ p}$$

Calculăm $f(2)$ și $f(-2)$ folosind (2) și obținem:

$$a + 2b + 2^2c + 2^3d = 0 \quad (5) \quad \dots\dots\dots 0,5 \text{ p}$$

$$a + (-2)b + (-2)^2c + (-2)^3d = 0 \quad (6) \quad \dots\dots\dots 0,5 \text{ p}$$

Polinomul f satisface condițiile din enunț dacă și numai dacă (a, b, c, d) este o soluție a sistemului de 4 ecuații cu 4 necunoscute (S) format cu ecuațiile (3), (4), (5), (6). 1 p

Determinantul acestui sistem este (determinantul de tip Vandermonde)

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 3^2 & 3^3 \\ 1 & 2 & 2^2 & 2^3 \\ 1 & -2 & (-2)^2 & (-2)^3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 2 & -2 \\ 1 & 3^2 & 2^2 & (-2)^2 \\ 1 & 3^3 & 2^3 & (-2)^3 \end{vmatrix} = 120 \neq 0, \dots\dots\dots 1 \text{ p}$$

prin urmare sistemul (S) este compatibil determinat, deci există un singur polinom f care satisface condițiile din problemă. 1 p

Observație: Calculul lui Δ poate fi efectuat și fără a îl recunoaște ca fiind un determinant de tip Vandermonde, iar rezolvarea sistemului (S) nu este necesară pentru stabilirea răspunsului la întrebare.

Soluția 2: Din $(X^2 - 4) \mid f$ rezultă că există $q \in \mathbb{R}[X]$ astfel încât

$f = (X^2 - 4)q$ (1) 1 p
 Gradul lui q este cel mult 1, prin urmare există $a, b \in \mathbb{R}$ astfel încât $q = aX + b$ 1 p
 și atunci (1) devine

$$f = (X^2 - 4)(aX + b) \quad (2).$$

Conform teoremei împărțirii cu rest pentru polinoamele din $\mathbb{R}[X]$, există $q_1 \in \mathbb{R}[X]$ astfel încât

$$f = (X^2 - 4X + 3)q_1 + (X + 1) = (X - 1)(X - 3)q_1 + (X + 1) \quad (3) \dots\dots\dots 1 p$$

de unde rezultă $f(1) = 2$ și $f(3) = 4$ 1 p

Folosind (2), acum rezultă

$$2 = f(1) = -3(a + b) \Leftrightarrow a + b = -\frac{2}{3} \quad (4) \dots\dots\dots 1 p$$

$$4 = f(3) = 5(3a + b) \Leftrightarrow 3a + b = \frac{4}{5} \quad (5) \dots\dots\dots 1 p$$

Cum sistemul format cu ecuațiile (4) și (5) are o soluție unică $\left(a = \frac{11}{15}, b = -\frac{7}{5}\right)$, există un singur polinom f care satisface condițiile din problemă. 1 p

Observație: Nici această soluție nu necesită aflarea lui f , dar conduce mai ușor la determinarea sa:

$$f = (X^2 - 4) \left(\frac{11}{15}X - \frac{7}{5}\right) = \frac{11}{15}X^3 - \frac{7}{5}X^2 - \frac{44}{15}X + \frac{28}{5}.$$

(Avem astfel și forma soluției sistemului (S) din **Soluția 1.**)

2. a) BD este una dintre diagonalele pătratului.

(i) Panta dreptei BD este $k = -\frac{b}{a}$, iar ecuația dreptei este $bx + ay - ab = 0$ 1 p

(ii) Lungimea laturii pătratului este $BD/\sqrt{2} = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{a^2 + b^2}$ 1 p

(iii) A doua diagonală a pătratului, AC , trece prin mijlocul E al segmentului $[BD]$ și e perpendiculară pe prima. Coordonatele lui E sunt $\left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}\right)$, iar panta dreptei AC este $\frac{a}{b}$ 1 p

(iv) Ecuația dreptei AC este $y - \frac{b}{2} = \frac{a}{b} \left(x - \frac{a}{2}\right)$ 1 p

(v) Fie $C(x_C, y_C)$ unul dintre cele două vârfuri rămase ale pătratului. C se află pe dreapta A , iar $CD^2 = BD^2/2$, deci coordonatele sale verifică sistemul

$$\begin{cases} y_C - \frac{b}{2} = \frac{a}{b} \left(x_C - \frac{a}{2}\right), \\ 2[x_C^2 + (y_C - b)^2] = a^2 + b^2 \end{cases}$$

..... 1 p

(vi) Sistemul de mai sus ne conduce la ecuația $4x_C^2 - 4ax_C + a^2 - b^2 = 0$, cu soluțiile $x_C = \frac{1}{2}(a \pm b)$ 1 p

(vii) Dacă alegem semnul $+$, obținem unul dintre vârfuri, de exemplu, $C\left(\frac{a+b}{2}, \frac{a+b}{2}\right)$, iar dacă alegem semnul $-$, obținem vârful opus, $A\left(\frac{a-b}{2}, \frac{b-a}{2}\right)$ 1 p

2. b)

Fie MS membrul stâng al identității de demonstrat și MD membrul drept. Atunci avem

(i) $MS = \sin^2 \alpha + \sin^2 \beta - \sin^2 \gamma = \sin^2 \alpha + \sin(\beta + \gamma) \sin(\beta - \gamma)$ 2 p

(ii) Conform condiției din enunț, $\beta - \gamma = \pi - \alpha$, așadar
 $MS = \sin^2 \alpha + \sin(\beta + \gamma) \sin(\pi - \alpha) = \sin^2 \alpha + \sin(\beta + \gamma) \sin \alpha = \sin \alpha [\sin \alpha + \sin(\beta + \gamma)]$ 2 p

- (iii) Folosind din nou condiția din enunț, avem $\alpha = \pi - (\beta - \gamma)$, deci
 $MS = \sin \alpha [\sin(\pi - (\beta - \gamma)) + \sin(\beta + \gamma)] = \sin \alpha [\sin(\beta - \gamma) + \sin(\beta + \gamma)]$ sau 2 p
- (iv) $MS = \sin \alpha [2 \sin \beta \cos \gamma] = 2 \sin \alpha \sin \beta \cos \gamma = MD$ 2 p

3. a) Funcția este continuă în punctele $x \neq a$ (fiind exponențială sau de tip putere într-o vecinătate a lui x , și $a > 0$ garantează că \sqrt{x} este definit pentru $x > a$). 2 p

În punctul $x = a$ avem $\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x < a}} f(x) = \frac{1}{2^a}$ și 2 p

$\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x > a}} f(x) = \sqrt{a}$, 2 p

deci condiția necesară și suficientă pentru continuitatea lui f este $\frac{1}{2^a} = \sqrt{a}$ 1 p

Membrul drept al acestei ecuații este o funcție crescătoare, iar membrul stâng o funcție descrescătoare (ca și funcție de a), deci ecuația poate avea cel mult o soluție. 2 p

Pe de altă parte $a = \frac{1}{2}$ este o soluție, deci f este continuă dacă și numai dacă $a = \frac{1}{2}$ 1 p

3. b) Dacă există o primitivă a lui f , atunci f are proprietatea lui Darboux, deci nu are discontinuitate de speța I. Pentru $a \neq \frac{1}{2}$, f ar avea însă o astfel de discontinuitate, deci f este primitivabilă dacă și numai dacă $a = \frac{1}{2}$ 1 p

Dacă $a = \frac{1}{2}$, atunci primitivele lui f au forma $F(x) = \begin{cases} -\frac{1}{2^x} \cdot \frac{1}{\ln 2} + c_1, & x \leq \frac{1}{2} \\ \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + c_2, & x > \frac{1}{2} \end{cases}$ 4 p

Acestea trebuie să fie continue, deci $-\frac{1}{\sqrt{2} \ln 2} + c_1 = \frac{1}{3\sqrt{2}} + c_2$ 2 p

Astfel primitivele au forma $F(x) = \begin{cases} -\frac{1}{2^x} \cdot \frac{1}{\ln 2} + c, & x \leq \frac{1}{2} \\ \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{\sqrt{2} \ln 2} - \frac{1}{3\sqrt{2}} + c, & x > \frac{1}{2} \end{cases}$ 1 p

3. c) Dacă $0 < a < 1$, atunci $\int_0^1 f(x) dx = \int_0^a f(x) dx + \int_a^1 f(x) dx = \int_0^a \frac{1}{2^x} dx + \int_a^1 \sqrt{x} dx = -\frac{1}{2^x \ln 2} \Big|_0^a + \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} \Big|_a^1 = \frac{2}{3} - \frac{2}{3}a^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{2^a \ln 2} + \frac{1}{\ln 2}$ 4 p

Dacă $1 \leq a$, atunci $\int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 \frac{1}{2^x} dx = -\frac{1}{2^x \ln 2} \Big|_0^1 = \frac{1}{2 \ln 2}$ 3 p

NOTĂ: La toate problemele din partea B orice altă soluție corectă va fi punctată corespunzător.