

Proba scrisă a concursului de admitere - septembrie 2013
Subiectul de Matematică

I. (30 puncte) Considerăm matricea $A(x) = \begin{pmatrix} 1 & x & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3^x \end{pmatrix}$, $x \in \mathbb{R}$.

1) (10 puncte) Calculați determinantul matricei $A(x)$ și rezolvați ecuația $\det(A(x)) = 81$.

2) (15 puncte) Arătați că perechea (G, \cdot) formează o structură de grup comutativ, unde $G := \{A(x) : x \in \mathbb{R}\}$ și " \cdot " este operația de înmulțire a matricelor.

3) (5 puncte) Determinați $A^n(2)$, $n \in \mathbb{N}^*$.

II. (30 puncte) Se consideră funcția $f : D \rightarrow \mathbb{R}$, definită prin $f(x) = \frac{1}{x-2}e^{|x|}$.

1) (10 puncte) Să se determine domeniul maxim de definiție D , să se studieze derivabilitatea funcției și să se afle derivatele laterale în punctele în care funcția nu este derivabilă.

2) (10 puncte) Să se studieze monotonia și să se determine punctele de extrem local ale funcției f .

3) (10 puncte) Să se calculeze

$$\int_{-1}^1 x^2(x-2)f(x) dx.$$

III. (30 puncte) 1) În sistemul cartezian xOy se consideră punctele: $O(0,0)$, $A(3,4)$ și $B(5,a)$, unde $a \in \mathbb{R}$.

(a) (7 puncte) Determinați valoarea lui a astfel încât cele trei puncte date să fie coliniare.

(b) (7 puncte) Determinați valoarea lui a astfel încât punctul $M(7,2)$ să fie simetricul lui A față de B .

(c) (8 puncte) Determinați valoarea lui a astfel încât triunghiul OAB să fie isoscel.

2) (8 puncte) Să se rezolve și să se discute în funcție de parametrul real a ecuația

$$\sin x + a \sin 2x + \sin 3x = 0.$$

Notă.

- 1) Toate subiectele sunt obligatorii.
- 2) Se cer soluții complete (pe foaia de concurs) la toate subiectele.
- 3) Se acordă 10 puncte din oficiu.
- 4) Timpul efectiv de lucru este de 3 ore.

Barem de corectare - Matematică

I.

1) Calculul determinantului.....	5 p.
Rezolvarea ecuației.....	5 p.
2) $A(x) A(y)=A(x+y)$	5 p.
Asociativitatea.....	2 p.
Comutativitatea.....	2 p.
Elementul neutru.....	3p.
Simetrizabilitatea.....	3 p.
3) Inducția matematică.....	4 p.
Determinarea cerinței.....	1 p.

II.

1) Domeniul de definiție D.....	2 p.
Aflarea mulțimii punctelor de derivabilitate pentru f.....	5 p.
Determinarea limitelor laterale in $x=0$	3 p.
2) Studiul monotoniei.....	6 p.
Aflarea coordonatelor celor 2 puncte de extreme local ale funcției.....	4 p.
3) Prima integrare prin părți.....	5 p.
A doua integrare prin părți.....	3 p.
Soluția.....	2 p.

III.

1)	
a) Determinarea lui a	7 p.
b) Determinarea lui a.....	7 p.
c) Calculul lungimilor laturilor	2 p.
Studiul celor trei cazuri posibile.....	6 p.
2) Aflarea soluțiilor independente de parametrul a....	4 p.
Aflarea soluțiilor dependente de parametru a și discuție	4 p.