

Subiect de concurs la disciplina Matematică-2012

SUBIECTUL I (30p)

Fie $G = (1, +\infty) \subset \mathbb{R}$ și operația

$$x \circ y := \sqrt{x^2 y^2 - x^2 - y^2 + 2}, \text{ oricare ar fi } x, y \in G.$$

- Să se arate că (G, \circ) este grup comutativ;
- Să se arate că între grupurile (\mathbb{R}_+^*, \cdot) și (G, \circ) există un izomorfism de grupuri $f : \mathbb{R}_+^* \rightarrow (1, +\infty)$ de forma $f(x) = \sqrt{x+m}$, unde $m \in \mathbb{R}$ este un parametru ce trebuie determinat;
- Să se rezolve în G ecuația $x \circ \circ \dots \circ x = 1$, unde operația \circ se ia de 100 de ori.

SUBIECTUL II (30p)

Fie $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{ax+b}{x^2+1}$, $a, b \in \mathbb{R}$.

- Să se determine a, b știind că funcția f admite în $x = 1$ un extrem de valoare $\frac{1}{2}$;
- Pentru $a = 1$ și $b = 0$ să se precizeze intervalele de monotonie și intervalele de convexitate și concavitate pentru funcția f .
- Pentru $a = 1$ și $b = 0$ se notează cu $A(u)$ aria mulțimii plane determinată de axa Ox, axa Oy, graficul funcției f și dreapta $x = u$, $u > 0$. Să se determine $u > \frac{1}{2}$ pentru care $A(u) < \ln(2u - 1)$.

SUBIECTUL III (30p)

- În triunghiul ABC se notează cu M mijlocul laturii BC. Demonstrați că $2\vec{AM} = \vec{AB} + \vec{AC}$;
- Determinați elementele triunghiului ABC în care $BC = 13$, $AC = 14$, $C = \arccos \frac{5}{13}$;
- Se dă dreapta de ecuație

$$(a-1)x + (a-2)y - a + 3 = 0, \text{ unde } a \in \mathbb{R}.$$

Notăm cu A, B intersecțiile dreptei cu axa Ox, respectiv Oy. Să se determine parametrul real a astfel ca să avem

$$\frac{1}{OA^2} + \frac{1}{OB^2} = 10.$$

Notă.

- Toate subiectele sunt obligatorii.
- Se acordă 10 puncte din oficiu.
- Timpul efectiv de lucru este de 3 ore.
- La toate subiectele se cer rezolvări cu soluții complete.

Baremul pentru subiectul de concurs la disciplina Matematică
Sesiunea iulie 2012

SUBIECTUL I (30p)

- a) Demonstrarea axiomelor grupului comutativ - 10 puncte
- b) Determinarea parametrului - 3 puncte
Demonstrarea morfismului - 3 puncte
Demonstrarea bijectivității - 4 puncte
- c) Aflarea formei lui $x \circ \dots \circ x$ - 6 puncte
Rezolvarea ecuației - 4 puncte

SUBIECTUL II (30p)

- a) Scrierea sistemului pentru aflarea parametrilor - 6 puncte
Rezolvarea sistemului - 4 puncte
- b) Precizarea intervalele de monotonie - 4 puncte
Precizarea intervalele de convexitate și concavitate - 6 puncte
- c) Aflarea ariei $A(u)$ - 6 puncte
Rezolvarea inecuației - 4 puncte.

SUBIECTUL III (30p)

- a) Demonstrarea inegalității - 10 puncte
- b) Determinarea elementelor triunghiului ABC - 10 puncte.
- c) Determinarea coordonatelor punctelor A și B - 5 puncte
Rezolvarea ecuației și aflarea valorilor lui a - 5 puncte.