

(Nem)determinisztikus görbe- és felületmodellezési eszközök
Riemann- és Finsler-geometriában, variációszámításban és
számítógépes grafikában

– 2008 – 2012/2013 –

Róth Ágoston

Matematika és Informatika Intézet, Babeş-Bolyai Tudományegyetem, Kolozsvár, Románia

2013. március 20.

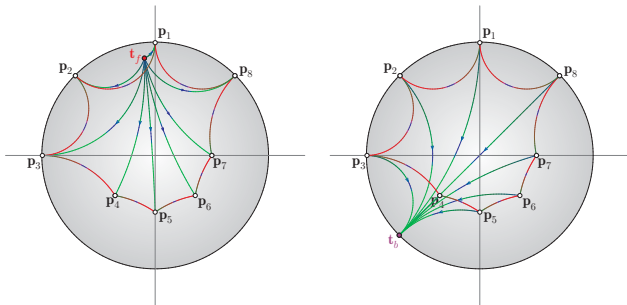


Torricelli-féle pont általánosítása

Riemann- és Finsler-terek



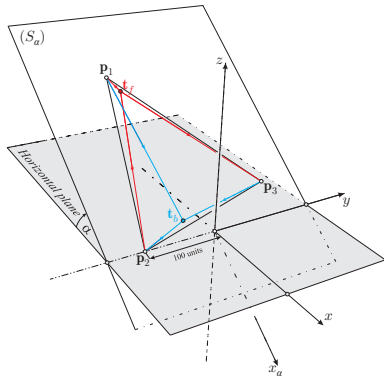
- ① Alexandru Kristály, Gheorghe Moroşanu, **Ágoston Róth**, 2008. *Optimal placement of a deposit between markets: a Riemann-Finsler geometrical approach*, *Journal of Optimization Theory and Applications*, **139**(2):263-276, $IF_{2008} = 0.860$, $RIS \approx 1.1188589540412$.



Torricelli-féle pont általánosítása

Riemann- és Finsler-terek

Matsumoto-féle sík/lejtő



$$F_{\alpha}(y_1, y_2) = \frac{y_1^2 + y_2^2}{v \sqrt{y_1^2 + y_2^2 + \frac{g}{2} y_1 \sin(\alpha)}},$$

$$(y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}.$$

$$d_{\alpha}(\mathbf{p}, \mathbf{p}_i) = F_{\alpha}(\mathbf{p}_i^1 - \mathbf{p}^1, \mathbf{p}_i^2 - \mathbf{p}^2),$$

$$d_{\alpha}(\mathbf{p}_i, \mathbf{p}) = F_{\alpha}(\mathbf{p}^1 - \mathbf{p}_i^1, \mathbf{p}^2 - \mathbf{p}_i^2),$$

$$i = 1, 2, 3.$$

$$C_f(\mathbf{p}) = \sum_{i=1}^3 d_{\alpha}(\mathbf{p}, \mathbf{p}_i),$$

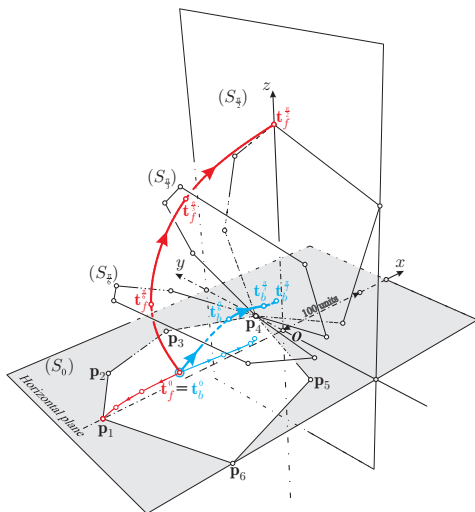
$$C_b(\mathbf{p}) = \sum_{i=1}^3 d_{\alpha}(\mathbf{p}_i, \mathbf{p}).$$



Torricelli-féle pont általánosítása

Riemann- és Finsler-terek

Matsumoto-féle sík/lejtő



Torricelli-féle pont általánosítása

Riemann- és Finsler-terek

Értelmezés (Finsler-sokaság)

- Tekintsük az összefüggő, m -dimenziós, C^∞ simaságú M sokaságot és ennek a $TM = \cup_{\mathbf{p} \in M} T_{\mathbf{p}}M$ érintő vektornyalábját!
- Ha az $F : TM \rightarrow [0, \infty)$ folytonos függvény
 - C^∞ -osztályú a $TM \setminus \{0\}$ halmazon,
 - elsőfokúan pozitív homogén, azaz

$$F(\mathbf{p}, t\mathbf{y}) = tF(\mathbf{p}, \mathbf{y}), \quad \forall t \geq 0, \forall \mathbf{y} \in T_{\mathbf{p}}M,$$

•

$$g_{ij}(\mathbf{y}) := \left[\frac{1}{2} F_{y^i y^j} \right](\mathbf{y})$$

Hesse-mátrixa pozitív definit minden $\mathbf{y} \in T_{\mathbf{p}}M$ esetén,
akkor az (M, F) párost **Finsler-sokaság**nak nevezzük.

Megjegyzés

Ha az (M, F) Finsler-sokaság esetén az F függvény abszolút homogén ($F(\mathbf{p}, t\mathbf{y}) = |t| F(\mathbf{p}, \mathbf{y}), \forall t \in \mathbb{R}, \forall \mathbf{y} \in T_{\mathbf{p}}M$), akkor a sokaságot reverzibilisnek (megfordíthatónak) nevezzük.



Értelmezés (Integrálhossz)

- A $c : [0, r] \rightarrow M$ szakaszonként C^∞ -osztályú görbe **integrálhosszát** az

$$L_F [c] = \int_0^r F(c(t), \dot{c}(t)) dt$$

funkcionál értéke adja.

Jelölés (Ugyanazokra a végpontokra illeszkedő, szakaszonként végtelenül sima görbecsalád)

$$\Gamma_{[0,r]}(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = \{c \in C^\infty([0, r], M) : c(0) = \mathbf{p}, c(r) = \mathbf{q}\}$$

Értelmezés (Kvázimetrika)

A

$$d_F : M \times M \rightarrow [0, \infty), \quad d_F(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = \inf_{c \in \Gamma_{[0,r]}(\mathbf{p}, \mathbf{q})} L_F [c]$$

leképezés teljesíti a $d_F(\mathbf{p}, \mathbf{q}) \geq 0$ és $d_F(\mathbf{p}, \mathbf{r}) \leq d_F(\mathbf{p}, \mathbf{q}) + d_F(\mathbf{q}, \mathbf{r})$ egyenlőtlenségeket minden $\mathbf{p}, \mathbf{q}, \mathbf{r} \in M$ pont esetén, általában viszont **nem teljesíti a $d_F(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = d_F(\mathbf{q}, \mathbf{p})$ szimmetriát**, mert F csak pozitív homogén függvény.



Megvalósított célkitűzések

Szükséges és elégséges feltételeket szerkesztettünk a

$$C_f(\mathbf{p}_i, n, s)(\mathbf{p}) = \sum_{i=1}^n d_F^s(\mathbf{p}, \mathbf{p}_i), \mathbf{p} \in M$$

$$C_b(\mathbf{p}_i, n, s)(\mathbf{p}) = \sum_{i=1}^n d_F^s(\mathbf{p}_i, \mathbf{p}), \mathbf{p} \in M$$

költségfüggvények minimumpontjainak létezésére és elhelyezkedésére nézve, ahol $n \in \mathbb{N}$, $s \geq 1$, $[\mathbf{p}_i]_{i=1}^n \in \mathcal{M}_{1,n}(M)$ rögzített adatok.



Torricelli-féle pont általánosítása

Riemann- és Finsler-terek

Finsler-Poincaré körmodell

$$M = \{(x_1, x_2) : x_1^2 + x_2^2 < 4\},$$

$$x_1 = r \cos \theta, \quad x_2 = r \sin \theta,$$

$$\mathbf{v} = p \frac{\partial}{\partial r} + q \frac{\partial}{\partial \theta} \in T_{(r, \theta)} M,$$

$$F((r, \theta), \mathbf{v}) = \frac{1}{1 - \frac{r^2}{4}} \sqrt{p^2 + r^2 q^2} + \frac{pr}{1 - \frac{r^4}{16}},$$

$$\mathbf{p}_1 = (1.6, 170^\circ),$$

$$\mathbf{p}_2 = (1.3, 250^\circ),$$

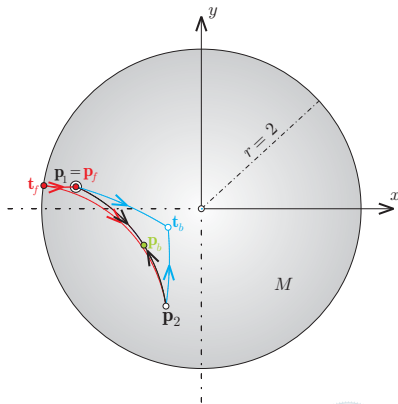
$$\mathbf{p}_f = \mathbf{p}_1 \neq \mathbf{t}_f \approx (1.9999, 171.5237^\circ),$$

$$C_f(\mathbf{p}_i, 2, 1)(\mathbf{p}_f) \approx 2.32507 > C_f(\mathbf{p}_i, 2, 1)(\mathbf{t}_f) \approx 2.32079,$$

$$\mathbf{p}_b \approx (0.8541, 212.2545^\circ)$$

$$\neq \mathbf{t}_b \approx (0.4472, 212.5589^\circ),$$

$$C_b(\mathbf{p}_i, 2, 1)(\mathbf{p}_b) \approx 1.26 > C_b(\mathbf{p}_i, 2, 1)(\mathbf{t}_f) \approx 0.950825.$$



Busemann-összefüggéssel kapcsolatos rigiditási sejtés

Nempozitív görbületű Finsler-terek

- Alexandru Kristály, **Ágoston Róth, 2009–2013**. *From metric properties to a rigidity conjecture on Finsler manifolds via a geodesic detecting algorithm, manuscript.*

Nyitott kérdés

Ha a nem feltétlenül reverzibilis (M, F) Finsler-sokaság esetén az (M, d_F) Finsler-tér Busemann értelemben nempozitív görbületű, akkor (M, F) kötelezően Berwald-tér.

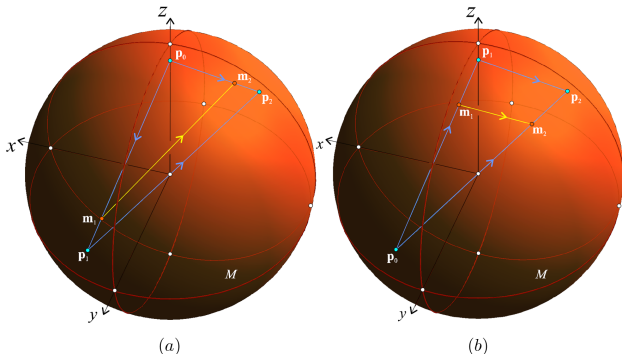


Busemann-összefüggéssel kapcsolatos rigiditási sejtés

Nempozitív görbületű Finsler-terek

$\varepsilon \in [-1, 1)$, $\mathbf{p} \in M = B^m(\mathbf{0}, 1) = \{\mathbf{p} \in \mathbb{R}^m : |\mathbf{p}| < 1\}$, $\mathbf{y} \in T_{\mathbf{p}}B^m(\mathbf{0}, 1)$

$$F_{\varepsilon}(\mathbf{p}, \mathbf{y}) = \frac{1}{2} \left(\frac{\sqrt{|\mathbf{y}|^2 - (|\mathbf{p}|^2 |\mathbf{y}|^2 - \langle \mathbf{p}, \mathbf{y} \rangle^2)} + \langle \mathbf{p}, \mathbf{y} \rangle}{1 - |\mathbf{p}|^2} - \frac{\varepsilon \sqrt{|\mathbf{y}|^2 - \varepsilon^2 (|\mathbf{p}|^2 |\mathbf{y}|^2 - \langle \mathbf{p}, \mathbf{y} \rangle^2)} + \varepsilon^2 \langle \mathbf{p}, \mathbf{y} \rangle}{1 - \varepsilon^2 |\mathbf{p}|^2} \right)$$



- $\varepsilon = 0.1$, $\mathbf{p}_0(0.0, 0.0, 0.9)$, $\mathbf{p}_1(0.5, 0.5, -0.5)$, $\mathbf{p}_2(-0.5, -0.5, 0.5)$,
- (a) $d_{F_{\varepsilon}}(\mathbf{p}_0, \mathbf{p}_1) = 1.14416728$, $d_{F_{\varepsilon}}(\mathbf{p}_0, \mathbf{p}_2) = 0.679288454$, $d_{F_{\varepsilon}}(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2) = 1.23015501$,
 $d_{F_{\varepsilon}}(\mathbf{m}_1, \mathbf{m}_2) = 0.921800308$,
- (b) $d_{F_{\varepsilon}}(\mathbf{p}_0, \mathbf{p}_1) = 1.28109422$, $d_{F_{\varepsilon}}(\mathbf{p}_0, \mathbf{p}_2) = 1.23015501$, $d_{F_{\varepsilon}}(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2) = 0.679288454$,
 $d_{F_{\varepsilon}}(\mathbf{m}_1, \mathbf{m}_2) = 0.312663329$.

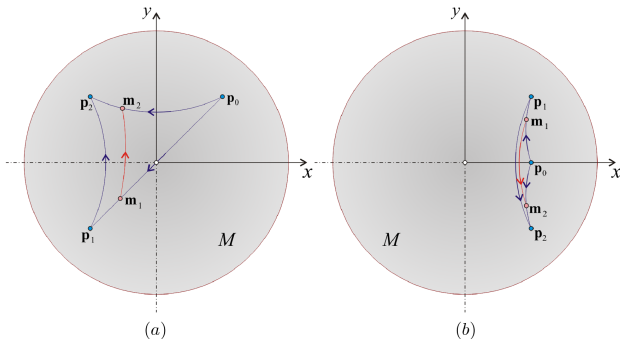


Busemann-összefüggéssel kapcsolatos rigiditási sejtés

Nempozitív görbületű Finsler-terek

$$M = \left\{ (x_1, x_2) : x_1^2 + x_2^2 < 4 \right\}, \quad x_1 = r \cos \theta, \quad x_2 = r \sin \theta,$$

$$\mathbf{v} = p \frac{\partial}{\partial r} + q \frac{\partial}{\partial \theta} \in T_{(r,\theta)}M, \quad F((r, \theta), \mathbf{v}) = \frac{1}{1 - \frac{r^2}{4}} \sqrt{p^2 + r^2 q^2} + \frac{pr}{1 - \frac{r^2}{16}}$$



$$(a) \quad \mathbf{p}_0(1, 1), \quad \mathbf{p}_1(-1, -1), \quad \mathbf{p}_2(-1, 1),$$

$$d_F(\mathbf{p}_0, \mathbf{p}_1) = 3.5254963, \quad d_F(\mathbf{p}_0, \mathbf{p}_2) = 2.88728397, \quad d_F(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2) = 2.88728399,$$

$$d_F(\mathbf{m}_1, \mathbf{m}_2) = 1.71860536,$$

$$(b) \quad \mathbf{p}_0(1, 0), \quad \mathbf{p}_1(1, 1), \quad \mathbf{p}_2(1, -1),$$

$$d_F(\mathbf{p}_0, \mathbf{p}_1) = 2.07878347, \quad d_F(\mathbf{p}_0, \mathbf{p}_2) = 2.07878333, \quad d_F(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2) = 2.88728393,$$

$$d_F(\mathbf{m}_1, \mathbf{m}_2) = 1.70407783.$$

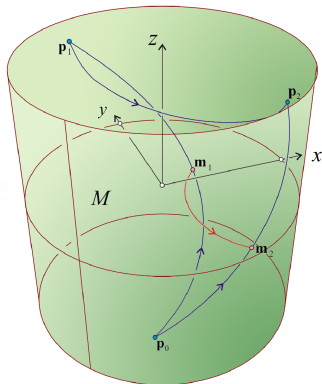


Busemann-összefüggéssel kapcsolatos rigiditási sejtés

Nempozitív görbületű Finsler-terek

$$M = \left\{ \mathbf{p} = ((x_1, x_2), \tilde{\mathbf{x}}_3) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^{m-2} : x_1^2 + x_2^2 < 1 \right\},$$

$$\mathbf{y} = ((y_1, y_2), \tilde{\mathbf{y}}_3) \in T_{\mathbf{p}}M = \mathbb{R}^m, F(\mathbf{p}, \mathbf{y}) = \frac{\sqrt{(-x_2 y_1 + x_1 y_2)^2 + |\mathbf{y}|^2 (1 - x_1^2 - x_2^2)} - (-x_2 y_1 + x_1 y_2)}{1 - x_1^2 - x_2^2}$$



$$m = 3,$$

$$\mathbf{p}_0(-0.25, -0.5, -1.0),$$

$$\mathbf{p}_1(-0.4975, 0.5, 1.0),$$

$$\mathbf{p}_2(0.995, 0.0, 0.5),$$

$$d_F(\mathbf{p}_0, \mathbf{p}_1) = 2.28325263,$$

$$d_F(\mathbf{p}_0, \mathbf{p}_2) = 1.59552717,$$

$$d_F(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2) = 1.63538395,$$

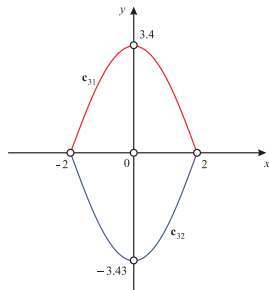
$$d_F(\mathbf{m}_1, \mathbf{m}_2) = 1.03707673.$$



Elliptikus egyenletek megoldásainak közelítése

Kritikuspont-analízis

- **Ágoston Róth**, Alexandru Kristály, **2005–2013**. *Multiple solutions of elliptic equations by means of stochastic algorithms*, manuscript¹.



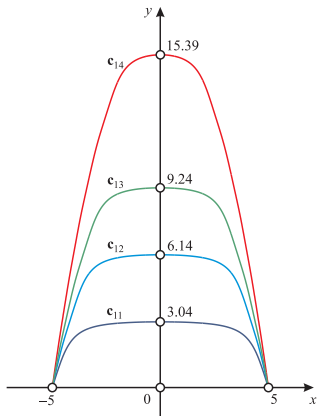
$$\begin{cases} u''(x) = -\frac{17}{20} \cdot \sqrt{|u(x)|} \cdot \arctan(u(x)), & x \in [-2, 2] \\ u(-2) = u(2) = 0 \end{cases}$$

¹. . .további bevont személyek: Bodó Zalán, Farkas Csaba



Elliptikus egyenletek megoldásainak közelítése

Kritikuspont-analízis



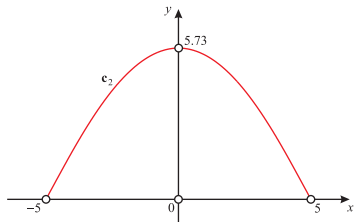
$$\begin{cases} u''(x) = -\frac{16}{5} \cdot \sin^2(u(x)), & x \in [-5, 5] \\ u(-5) = u(5) = 0 \end{cases}$$



Elliptikus egyenletek megoldásainak közelítése

Kritikuspont-analízis

$$\begin{cases} u''(x) = -\frac{3}{20} \cdot \ln(1 + u^2(x)), x \in [-5, 5] \\ u(-5) = u(5) = 0 \end{cases}$$



Elliptikus egyenletek megoldásainak közelítése

Kritikuspont-analízis

- Adott az $\emptyset \neq \Omega \subset \mathbb{R}^d$ korlátos tartomány ($d \geq 1$),
- a $\lambda > 0$ valós paraméter,
- továbbá az $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ folytonos függvény, mely esetén:
 - léteznek $\alpha > 0$ és $\beta \in (0, 1)$ skalárok úgy, hogy teljesül az

$$|f(t)| \leq \alpha (1 + |t|^\beta), \forall t \in \mathbb{R}$$

egyenlőtlenség (másképpen fogalmazva, **f szublineáris növekedésű a végtelenben**),

- igaz a

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(t)}{t} = 0$$

határérték (azaz **f szuperlineáris az origóban**).

- Ekkor létezik a $\Lambda \subset (0, \infty)$ nyílt intervallum úgy, hogy bármely $\lambda \in \Lambda$ paraméter esetén a

$$\begin{cases} \Delta u(x) &= -\lambda \cdot f(u(x)), x \in \Omega, \\ u|_{\partial\Omega} &\equiv 0 \end{cases}$$

elliptikus egyenletnek van legalább három gyenge megoldása.



Elliptikus egyenletek megoldásainak közelítése

Kritikuspont-analízis

- Az említett gyenge megoldások bizonyos **stabilitási feltétellel** rendelkeznek: valójában az

$$\mathbb{E}_\lambda [u] = \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla u(x)|^2 dx - \lambda \cdot \int_{\Omega} \left(\int_0^{u(x)} f(t) dt \right) dx$$

energiafukcionál kritikus pontjainak felelnek meg (kettő közülük lokális minimum, míg a harmadik mountain pass típusú kritikus pont).



Számítógéppel segített geometriai tervezésben (CAGD-ben) a görbék legelterjedtebb megadási módja

$$\begin{cases} \mathbf{c} : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^\delta, \delta \geq 2, \\ \mathbf{c}(u) = \sum_{i=0}^n \mathbf{d}_i F_i(u), \end{cases}$$

alakú, ahol a $\mathbf{d}_i \in \mathbb{R}^\delta$ vektorokat a

$$[\mathbf{d}_i]_{i=0}^n \in \mathcal{M}_{1, n+1}(\mathbf{d}_i)$$

kontrollpoligont meghatározó **kontrollpontoknak nevezzük**, míg az $F_i : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ függvények általában egy függvénytér normalizált bázisát alkotják.

- Ha az F_i függvényeket megfelelően választjuk meg, akkor a generált görbe követi a kontrollpoligonjának alakját, azaz a kontrollpoligon egy intuitív tervezési eszközt biztosít a modellező számára.
- A legismertebb ilyen görbék a Bézier, a racionális Bézier, a B-spline és a NURBS görbék.



Számítógéppel segített tervezésben a felületek általános leírása az

$$\begin{cases} \mathbf{s} : [a, b] \times [c, d] \rightarrow \mathbb{R}^3, \\ \mathbf{s}(u, v) = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m \mathbf{d}_{ij} F_i(u) G_j(v), \end{cases}$$

képlettel történik, ahol a $\mathbf{d}_{ij} \in \mathbb{R}^3$ pontok egy **kontrollháló**t határoznak meg.

- Az

$$\{F_i : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}\}_{i=0}^n$$

és

$$\{G_j : [c, d] \rightarrow \mathbb{R}\}_{j=0}^m$$

függvényrendszerek ugyanazokat az előnyös tulajdonságokat teljesítik, mint amelyeket a görbék esetében vázoltunk – annak ellenére, hogy különböző függvényterek bázisai is lehetnek, gyakorlatban szinte mindig azonos típusúak.

- Az ilyen előállítású felületeket **tenzor szorzattal** leírt felületeknek nevezzük.



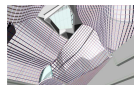
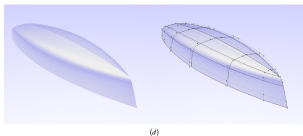
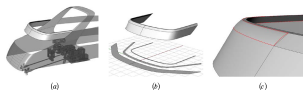
Bézier vonalfelületek interaktív előállítása

Kontrollpont-alapú szükséges és elégséges feltételek



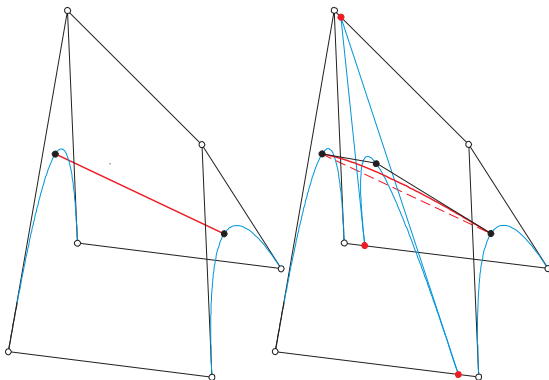
- ② Imre Juhász, Ágoston Róth, 2008. *Bézier surfaces with linear isoparametric lines*, *Computer Aided Geometric Design*, 25(6):385-396,

$IF_{2008} = 1.512$, $RIS \approx 1.54403$.



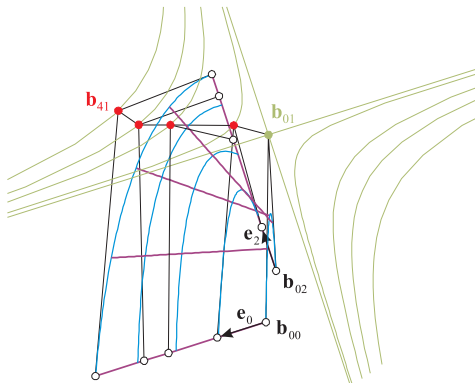
Bézier vonalfelületek interaktív előállítása

Kontrollpont-alapú szükséges és elégséges feltételek



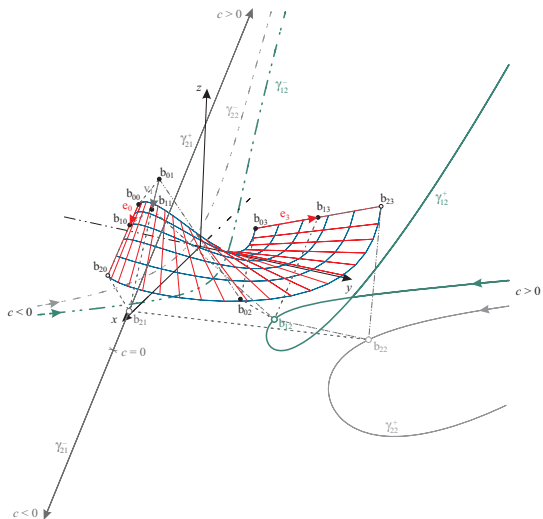
Bézier vonalfelületek interaktív előállítása

Kontrollpont-alapú szükséges és elégséges feltételek



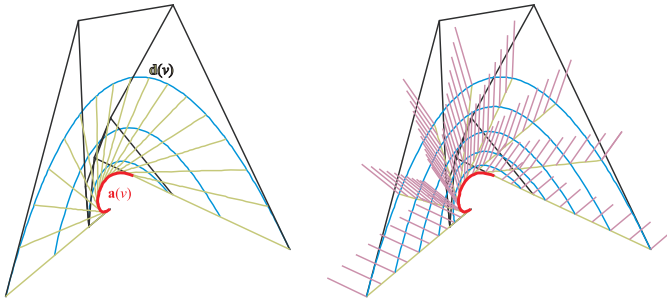
Bézier vonalfelületek interaktív előállítása

Kontrollpont-alapú szükséges és elégséges feltételek



Bézier vonalfelületek interaktív előállítása

Kontrollpont-alapú szükséges és elégséges feltételek



A csonkolt Fourier-sorok terének ciklikus bázisa

2009 – 2010



- 3 **Ágoston Róth**, Imre Juhász, Josef Schicho, Miklós Hoffmann, 2009. *A cyclic basis for closed curve and surface modeling*, Computer Aided Geometric Design, 26(5):528-546, $IF_{2009} = 1.330$, $RIS \approx 1.54403$.
- 4 **Ágoston Róth**, Imre Juhász, 2010. *Control point based exact description of a class of closed curves and surfaces*, Computer Aided Geometric Design, 27(2):179-201, $IF_{2010} = 0.859$, $RIS \approx 1.54403$.



- 5 Imre Juhász, **Ágoston Róth**, 2010. *Closed rational trigonometric curves and surfaces*, Journal of Computational and Applied Mathematics, 234(8):2390-2404, $IF_{2010} = 1.029$, $RIS \approx 0.93261$.



Ciklikus bázisfüggvények (2009)

A

$$C = \left\{ C_{i,n}(u) = \frac{c_n}{2^n} (1 + \cos(u + i\lambda_n))^n : u \in [\mu, \mu + 2\pi] \right\}_{i=0}^{2^n}, n \geq 1$$

függvényrendszer a

$$\mathcal{V}_n = \langle 1, \cos(u), \sin(u), \dots, \cos(nu), \sin(nu) \rangle$$

függvénytérnek (azaz a legfeljebb n -edfokú trigonometrikus polinomok terének) bázisát alkotja, ahol:

- $\lambda_n = \frac{2\pi}{2n+1}$ egy fáziseltolás;
- a c_n normalizáló szerepet betöltő konstans teljesíti a

$$\begin{cases} c_1 &= \frac{2}{3}, \\ c_n &= \frac{2n}{2n+1} c_{n-1}, \quad n \geq 2 \end{cases}$$

rekurziót;

- $\mu \in \mathbb{R}$ egy rögzített valós paraméter.



Új tervezési eszköz zárt görbék modellezésére (2009)

A

$$\mathbf{d} = [\mathbf{d}_i]_{i=0}^{2n} \in \mathcal{M}_{1,2n+1}(\mathbb{R}^\delta), \delta \geq 2$$

kontrollpoligon és a

$$C = \{C_{i,n}(u) : u \in [\mu, \mu + 2\pi]\}_{i=0}^{2n}, n \geq 1$$

ciklikus bázis az

$$\mathbf{a}_n(u) = \sum_{i=0}^{2n} \mathbf{d}_i C_{i,n}(u), u \in [\mu, \mu + 2\pi]$$

n -edfokú ciklikus görbét határozzák meg.



Kontrollpont-alapú modellezés

Ciklikus görbék főbb tulajdonságai

Ciklikus szimmetria

A görbe alakja nem változik, ha a kontrollpontjait ciklikusan permutáljuk.

Szingularitás nélküli paraméterezés

A görbe minden reguláris pontban C^∞ -osztályú, míg szinguláris pontokban a jobb és bal deriváltak léteznek és szintén nem válnak nullvektorokká.

Affin transzformációkkal szembeni zártság

A görbe alakja invariáns a kontrollpoligonjának affin transzformációira nézve.

Konvex burok tulajdonság

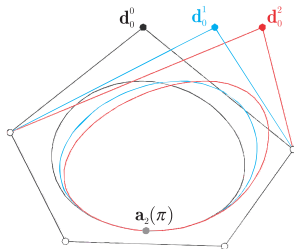
A görbe a kontrollpontjainak konvex burkában van.



Kontrollpont-alapú modellezés

Ciklikus görbék főbb tulajdonságai

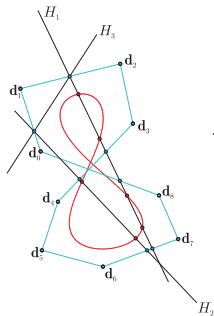
Pseudo-lokális változtathatóság



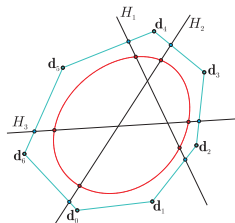
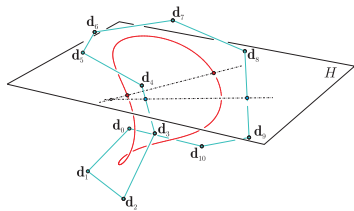
Kontrollpont-alapú modellezés

Ciklikus görbék főbb tulajdonságai

Hullámzáscsökkentő tulajdonság



Konvexitás megőrzés



Kontrollpont-alapú modellezés

Ciklikus görbék főbb tulajdonságai

Fokszámnövelés

(a)

(b)



Kontrollpont-alapú modellezés

Véges fokszámú trigonometrikus polinomokkal leírt zárt görbék ciklikus reprezentációja

Kontrollpont-alapú egzakt leírás

(a)

(b)



Új tervezési eszköz zárt felületek modellezésére (2009)

A

$$\mathbf{d} = [\mathbf{d}_{ij}]_{i=0, j=0}^{2n, 2m} \in \mathcal{M}_{2n+1, 2m+1}(\mathbb{R}^3)$$

kontrollháló és a

$$C_u = \{C_{i,n}(u) : u \in [\mu, \mu + 2\pi]\}_{i=0}^{2n}, n \geq 1$$

$$C_v = \{C_{j,m}(v) : v \in [\nu, \nu + 2\pi]\}_{j=0}^{2m}, m \geq 1$$

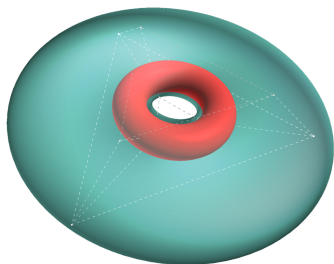
ciklikus bázisok az

$$\mathbf{s}_{n,m}(u, v) = \sum_{i=0}^{2n} \sum_{j=0}^{2m} \mathbf{d}_{ij} C_{i,n}(u) C_{j,m}(v), (u, v) \in [\mu, \mu + 2\pi] \times [\nu, \nu + 2\pi]$$

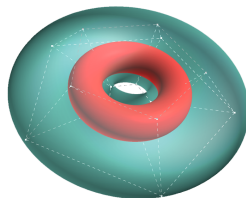
(n, m) fokszámú **ciklikus felületet** határozzák meg. **A hullámzáscsökkentés** kivételével a ciklikus felületek öröklik a ciklikus görbék összes előnyös tulajdonságát.



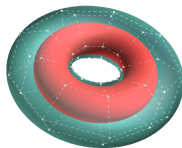
Ciklikus felületek fokszám növelése



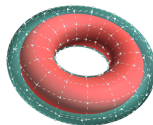
$$n = m = 1$$



$$n = 1, m = 2$$



$$n = 2, m = 4$$



$$n = 4, m = 8$$

Kontrollpont-alapú modellezés

Véges fokszámú, szétválasztható változójú trigonometrikus polinomokkal leírt felületek ciklikus reprezentációja

(a)

(b)



Kontrollpont-alapú modellezés

Véges fokszámú, szétválasztható változójú trigonometrikus polinomokkal leírt felületek ciklikus reprezentációja

(a)

(b)



Racionális trigonometrikus bázisfüggvények (2010)

A

$$\mathbf{w} = [w_i]_{i=0}^{2n}$$

nemnegatív súlyvektor és a C ciklikus bázis az

$$R = \left\{ R_{i,n}(u) = \frac{w_i C_{i,n}(u)}{\sum_{j=0}^{2n} w_j C_{j,n}(u)} : u \in [\mu, \mu + 2\pi] \right\}_{i=0}^{2n}.$$

racionális trigonometrikus bázist határozzák meg.



Kontrollpont-alapú modellezés

Zárt racionális trigonometrikus görbék

Új tervezési eszköz zárt racionális trigonometrikus görbék modellezésére
(2010)

A

$$\mathbf{d} = [\mathbf{d}_i]_{i=0}^{2n} \in \mathcal{M}_{1,2n+1}(\mathbb{R}^\delta), \quad n \geq 1, \delta \geq 2$$

kontrollpoligon, a

$$\mathbf{w} = [w_i]_{i=0}^{2n}$$

nemnegatív súlyvektor, és az

$$R = \{R_{i,n}(u) : u \in [\mu, \mu + 2\pi]\}_{i=0}^{2n}$$

racionális trigonometrikus bázis, az

$$\mathbf{r}_n(u) = \sum_{i=0}^{2n} \mathbf{d}_i R_{i,n}(u), \quad u \in [\mu, \mu + 2\pi]$$

n-edfokú zárt trigonometrikus görbét határozzák meg. A ciklikus szimmetria kivételével, ezek a görbék öröklik a ciklikus görbék előnyös tulajdonságait.



Kontrollpont-alapú modellezés

Zárt racionális trigonometrikus felületek

Új tervezési eszköz zárt racionális trigonometrikus felületek modellezésére
(2010)

A

$$\mathbf{d} = [\mathbf{d}_{k\ell}]_{k=0, \ell=0}^{2n, 2m} \in \mathcal{M}_{2n+1, 2m+1}(\mathbb{R}^3),$$

kontrollháló, a

$$\mathbf{w}^u = [w_k^u]_{k=0}^{2n}, \mathbf{w}^v = [w_\ell^v]_{\ell=0}^{2m}$$

nemnegatív súlyvektorok, és az

$$R_u = \{R_{k,n}(u) : u \in [\mu, \mu + 2\pi]\}_{k=0}^{2n}, n \geq 1$$

$$R_v = \{R_{\ell,m}(v) : v \in [\nu, \nu + 2\pi]\}_{\ell=0}^{2m}, m \geq 1$$

racionális bázisok az

$$\mathbf{s}_{n,m}(u, v) = \sum_{k=0}^{2n} \sum_{\ell=0}^{2m} \mathbf{d}_{k\ell} R_{k,n}(u) R_{\ell,m}(v), (u, v) \in [\mu, \mu + 2\pi] \times [\nu, \nu + 2\pi]$$

(n, m) fokszámú **zárt racionális trigonometrikus felületet** határozzák meg.



Kontrollpont-alapú modellezés

Zárt racionális trigonometrikus felületek

Rugalmas tervezési eszköz zárt racionális felületek modellezésére (2010)

A

$$\mathbf{d} = [\mathbf{d}_{k\ell}]_{k=0, \ell=0}^{2n, 2m} \in \mathcal{M}_{2n+1, 2m+1}(\mathbb{R}^3)$$

kontrollháló, a

$$\mathbf{w} = [\mathbf{w}_{k\ell}]_{k=0, \ell=0}^{2n, 2m} \in \mathcal{M}_{2n+1, 2m+1}(\mathbb{R}_+),$$

nemnegatív súlymátrix az

$$\mathbf{s}_{n,m}(u, v) = \sum_{k=0}^{2n} \sum_{\ell=0}^{2m} \mathbf{d}_{k\ell} \frac{w_{k\ell} C_{k,n}(u) C_{\ell,m}(v)}{\sum_{i=0}^{2n} \sum_{j=0}^{2m} w_{ij} C_{i,n}(u) C_{j,m}(v)},$$
$$(u, v) \in [\mu, \mu + 2\pi] \times [\nu, \nu + 2\pi],$$
$$n \geq 1, m \geq 1$$

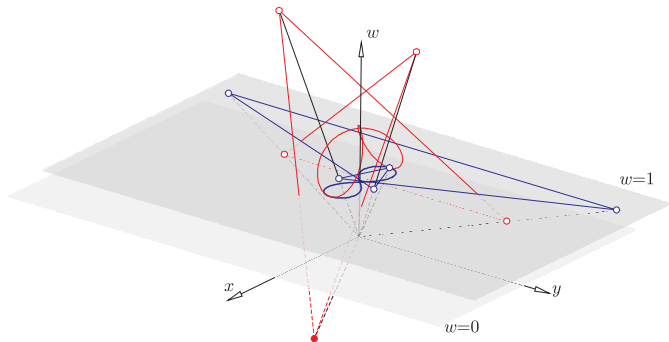
(n, m) fokszámú **zárt racionális trigonometrikus felületet** határozzák meg.



Kontrollpont-alapú modellezés

Véges fokszámú, szétválasztható változójú, racionális trigonometrikus polinomokkal leírt zárt görbék/felületek kontrollpont-alapú reprezentációja

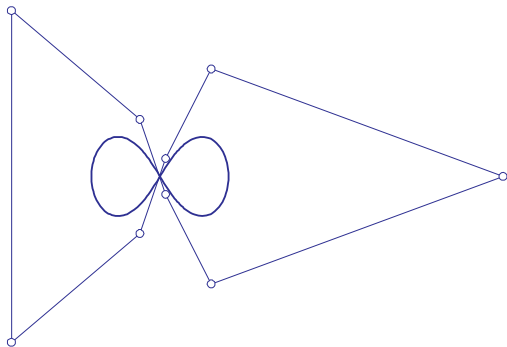
Kontrollpont-alapú egzakt leírás (projektív geometriai szemlélet)



Kontrollpont-alapú modellezés

Véges fokszámú, szétválasztható változójú, racionális trigonometrikus polinomokkal leírt zárt görbék/felületek kontrollpont-alapú reprezentációja

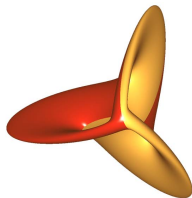
Kontrollpont-alapú egzakt leírás (projektív geometriai szemlélet)



Kontrollpont-alapú modellezés

Véges fokszámú, szétválasztható változójú, racionális trigonometrikus polinomokkal leírt zárt görbék/felületek kontrollpont-alapú reprezentációja

Kontrollpont-alapú egzakt leírás (projektív geometriai szemlélet)



(a)



(b)



(c)

Kontrollpont-alapú modellezés

Véges fokszámú, szétválasztható változójú, racionális trigonometrikus polinomokkal leírt zárt görbék/felületek kontrollpont-alapú reprezentációja

Kontrollpont-alapú egzakt leírás (projektív geometriai szemlélet)

(a)

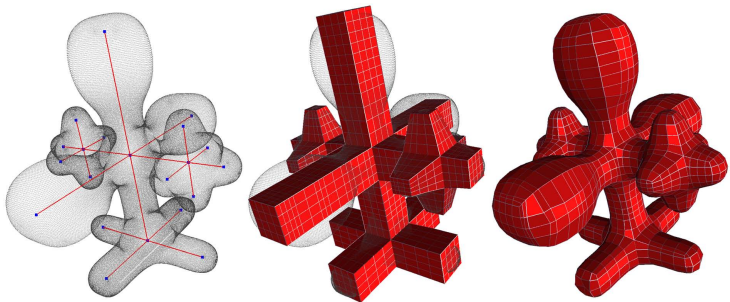
(b)



Felületi rekonstrukció Monte Carlo módszerekkel

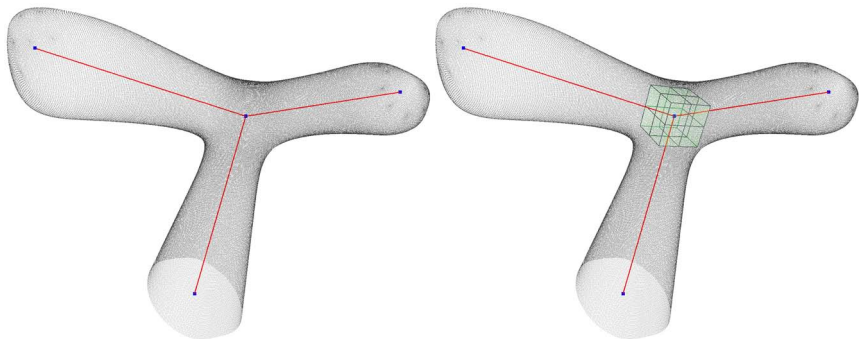
Négyszöghálók generálása pontfelhők alapján

- 6 **Ágoston Róth**, Imre Juhász, 2009. *Quadrilateral mesh generation from point clouds by a Monte Carlo Method*, In The 17th International Conference in Central Europe on Computer Graphics, Visualization and Computer Vision (eds. Min Chen, Vaclav Skala), 97–104, ISBN 978-80-86943-93-0, Publisher University of West Bohemia in Pilsen (indexed by SCIE Thomson-Reuters).



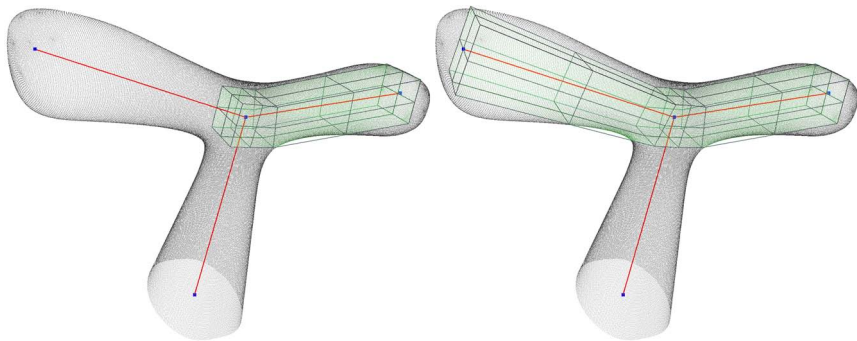
Felületi rekonstrukció Monte Carlo módszerekkel

Négyszöghálók generálása pontfelhők alapján



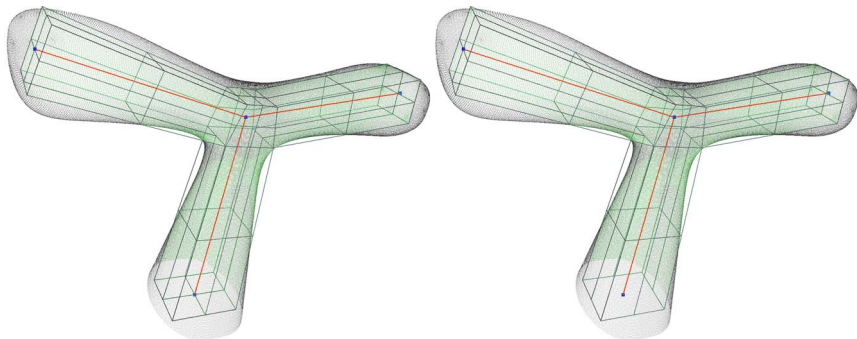
Felületi rekonstrukció Monte Carlo módszerekkel

Négyszöghálók generálása pontfelhők alapján



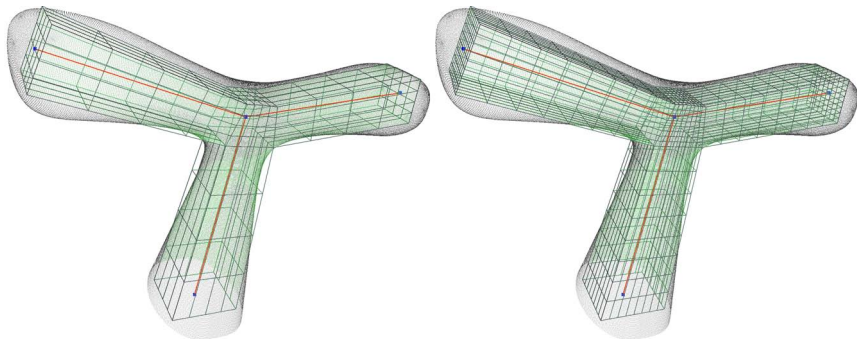
Felületi rekonstrukció Monte Carlo módszerekkel

Négyszöghálók generálása pontfelhők alapján



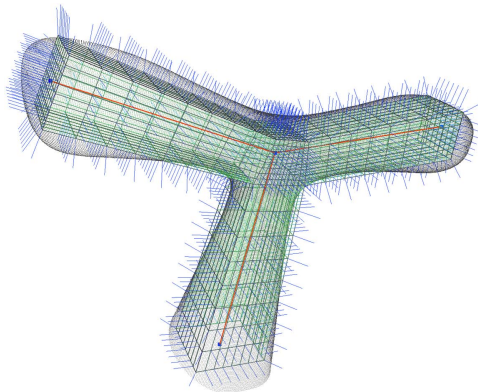
Felületi rekonstrukció Monte Carlo módszerekkel

Négyszöghálók generálása pontfelhők alapján



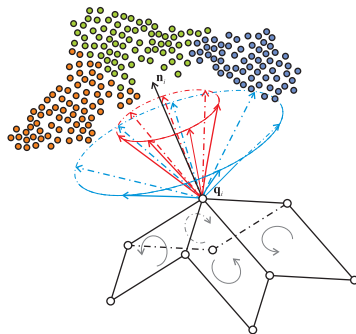
Felületi rekonstrukció Monte Carlo módszerekkel

Négyszöghálók generálása pontfelhők alapján



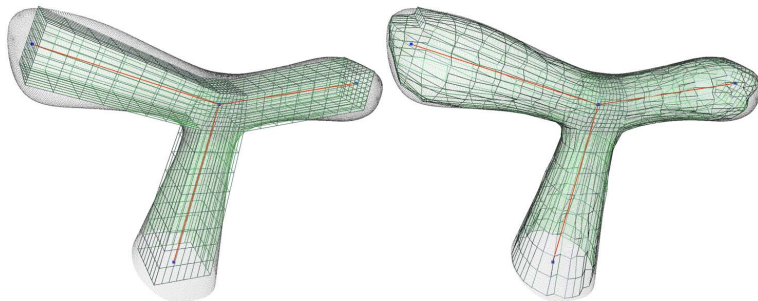
Felületi rekonstrukció Monte Carlo módszerekkel

Négyszöghálók generálása pontfelhők alapján



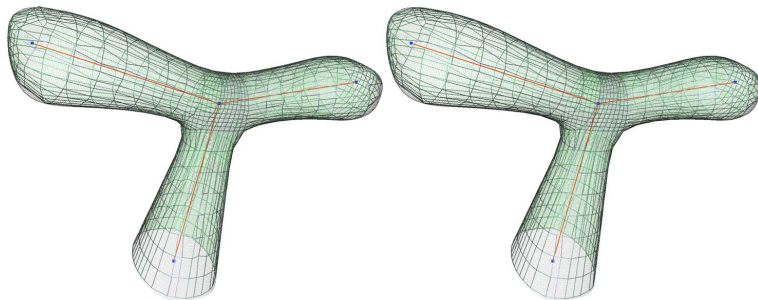
Felületi rekonstrukció Monte Carlo módszerekkel

Négyszöghálók generálása pontfelhők alapján



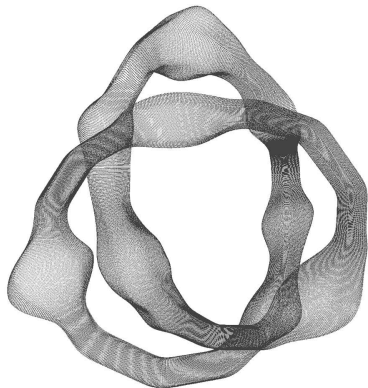
Felületi rekonstrukció Monte Carlo módszerekkel

Négyszöghálók generálása pontfelhők alapján



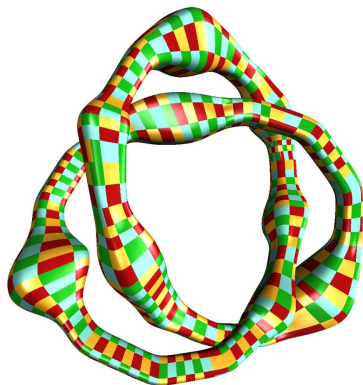
Felületi rekonstrukció Monte Carlo módszerekkel

Négyszöghálók generálása pontfelhők alapján



Felületi rekonstrukció Monte Carlo módszerekkel

Négyszöghálók generálása pontfelhők alapján

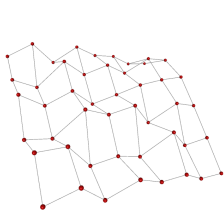


Sima interpoláló felületek funkcionális optimalizálása

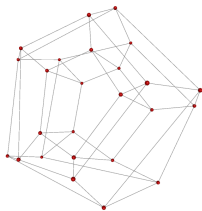


- 7 **Ágoston Róth**, Imre Juhász, 2011. *Constrained surface interpolation by means of a genetic algorithm*, *Computer-Aided Design*, **43(9)**:1194–1210,

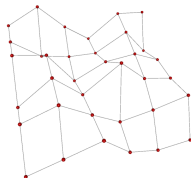
$IF_{2011} = 1.234$, $RIS \approx 1.31898$.



(a)



(b)

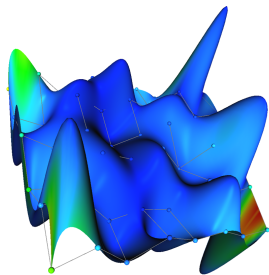


(c)

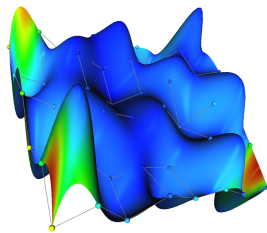


Sima interpoláló felületek funkcionális optimalizálása

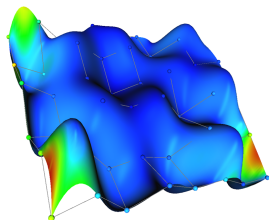
NURBS bázisfüggvények



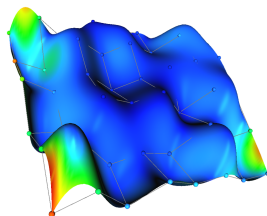
(a)



(b)



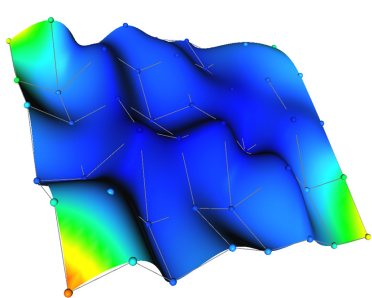
(c)



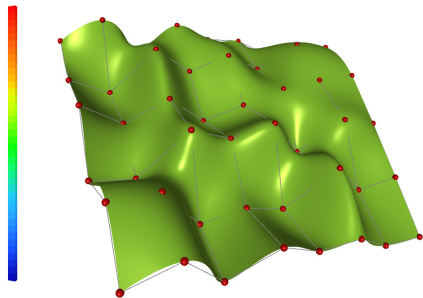
(d)

Sima interpoláló felületek funkcionális optimalizálása

NURBS bázisfüggvények. Minimális felszín



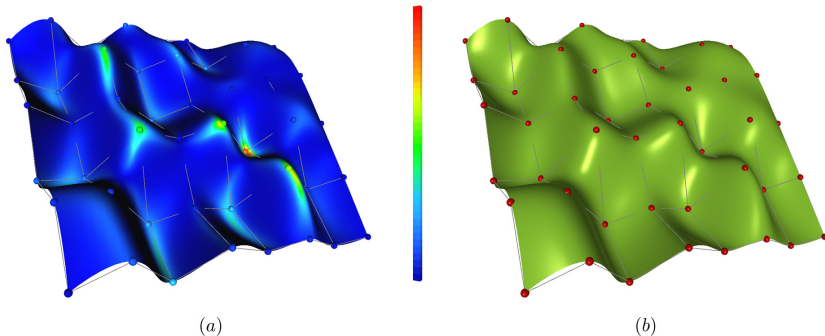
(a)



(b)

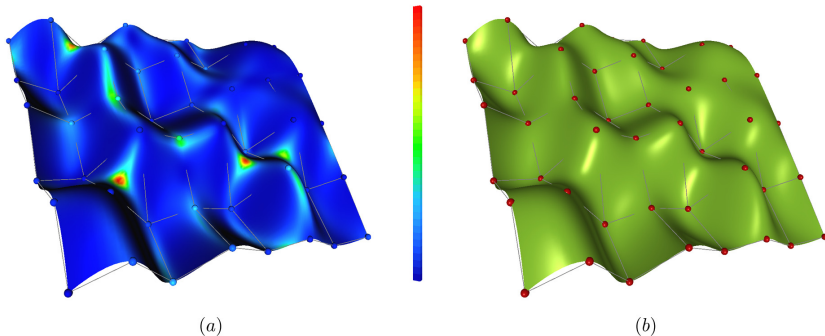
Sima interpoláló felületek funkcionális optimalizálása

NURBS bázisfüggvények. Minimális Willmore-energia



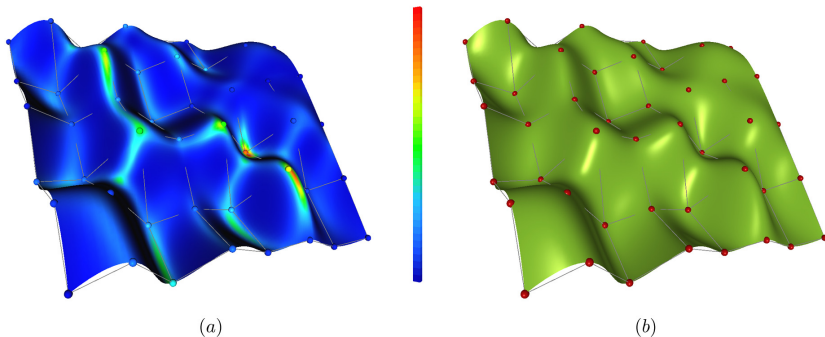
Sima interpoláló felületek funkcionális optimalizálása

NURBS bázisfüggvények. Minimális umbilikus eltérés



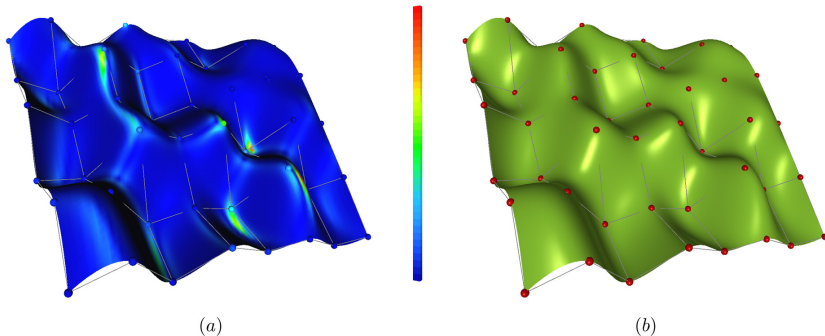
Sima interpoláló felületek funkcionális optimalizálása

NURBS bázisfüggvények. Minimális teljes görbületi energia



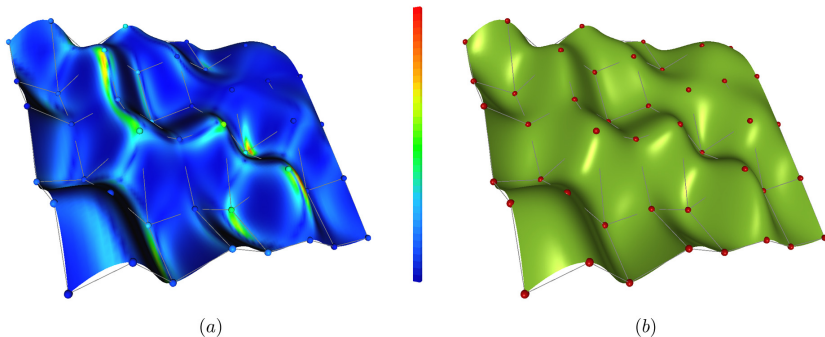
Sima interpoláló felületek funkcionális optimalizálása

NURBS bázisfüggvények. Minimális súlyozott Mehlum–Tarrou energia



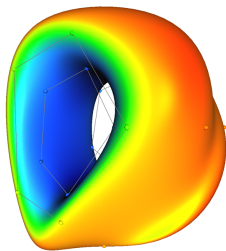
Sima interpoláló felületek funkcionális optimalizálása

NURBS bázisfüggvények. Minimális $\sqrt{\text{súlyozott Mehlum–Tarró energia}}$

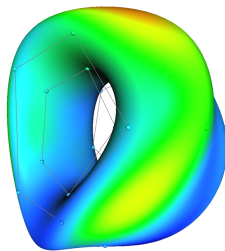


Sima interpoláló felületek funkcionális optimalizálása

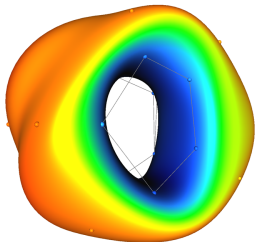
Ciklikus bázisfüggvények. Izoperimetrikus probléma



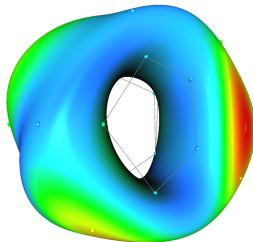
(a)



(b)



(c)

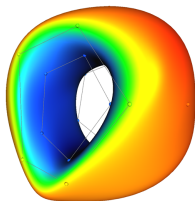


(d)

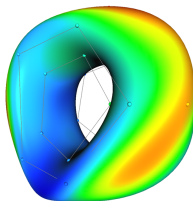


Sima interpoláló felületek funkcionális optimalizálása

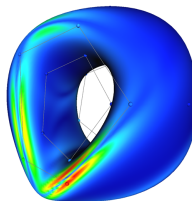
Ciklikus bázisfüggvények. Izoperimetrikus probléma ötvözése minimális $\sqrt{\text{súlyozott Mehlum–Tarrou energiával}}$



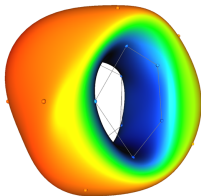
(a)



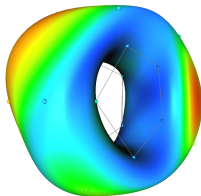
(b)



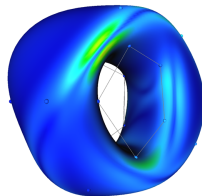
(c)



(d)



(e)

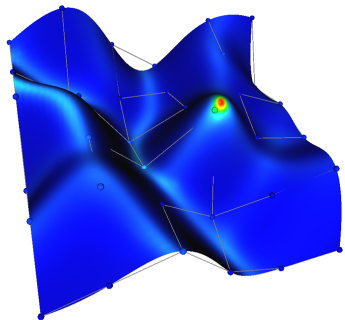


(f)

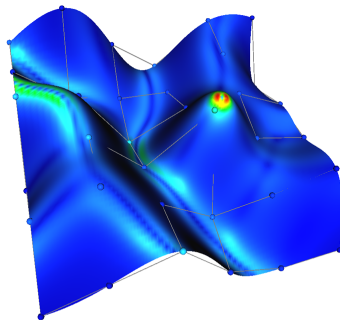


Sima interpoláló felületek funkcionális optimalizálása

Algebrai trigonometrikus B-bázisfüggvények



(a)

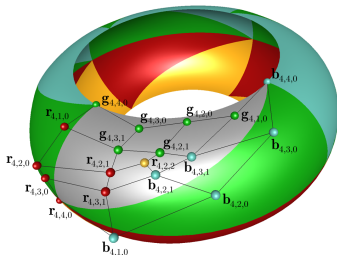


(b)



Háromszögű (racionális) trigonometrikus foltok

- **Ágoston Róth**, Imre Juhász, Alexandru Kristály, **2010–2013**. *Triangular (rational) trigonometric patches*, manuscript².



²...további bevont személyek: András Szilárd, Lukács Andor, Somogyi Ildikó

Háromszögű (racionális) trigonometrikus foltok

Célkitűzések

Célkitűzések

- Tekintsük a maximálisan n -edfokú ($n \geq 0$) trigonometrikus polinomok (másképpen csonkolt Fourier-sorok)

$$\mathcal{F}_{2n}^\alpha = \text{span} \{ \cos(iu), \sin(iu) : u \in [0, \alpha] \}_{i=0}^n,$$

terét, ahol $\alpha \in (0, \pi)$ tetszőleges rögzített alakparaméter!

- Sánchez-Reyes igazolta³, hogy az \mathcal{F}_{2n}^α függvénytér normalizált B-bázisát a

$$\left\{ A_{2n,i}^\alpha(u) : u \in [0, \alpha] \right\}_{i=0}^{2n} = \left\{ c_{2n,i}^\alpha \sin^{2n-i} \left(\frac{\alpha - u}{2} \right) \sin^i \frac{u}{2} : u \in [0, \alpha] \right\}_{i=0}^{2n}$$

függvényrendszer adja, ahol a

$$c_{2n,i}^\alpha = \frac{1}{\sin^{2n} \frac{\alpha}{2}} \sum_{r=0}^{\lfloor \frac{i}{2} \rfloor} \binom{n}{i-r} \binom{i-r}{r} \left(2 \cos \frac{\alpha}{2} \right)^{i-2r}, \quad i = 0, 1, \dots, 2n$$

konstansok egyrészt normalizációs szerepet töltenek be, másrészt pedig a

$$c_{2n,i}^\alpha = c_{2n,2n-i}^\alpha, \quad i = 0, 1, \dots, n$$

szimmetriát is teljesítik.

³Sánchez-Reyes, J., 1998. *Harmonic rational Bézier curves, p-Bézier curves and trigonometric polynomials*. *Computer Aided Geometric Design*, 15(9), 909–923.



Célkitűzések – folytatás

- Célunk, hogy meghatározzuk az \mathcal{F}_{2n}^α függvénytér megszorításos háromváltozós kiterjesztését az

$$\Omega^\alpha = \{u, v, w \in [0, \alpha] : u + v + w = \alpha\}$$

tartomány felett, azaz, hogy megszerkesszük a

$$\mathcal{V}_n^\alpha = \text{span } V_n^\alpha$$

függvénytér nemnegatív normalizált bázisát, ahol a V_n^α függvényrendszer a

$$\{\cos(ru + gv + bw), \sin(ru + gv + bw) : (u, v, w) \in \Omega^\alpha\}_{r=0, g=0, b=0}^{n, n, n}$$

függvényrendszer legnagyobb lineárisan független részalalmazát jelöli.



Háromszögű (racionális) trigonometrikus foltok

Eddigi eredmények

Előzmények...

- W.-Q. Shen és G.-Z. Wang az $n = 1$ és 2 sajátos esetekhez tartozó

$$\mathcal{F}_2^\alpha = \text{span} \{1, \cos(u), \sin(u) : u \in [0, \alpha]\},$$

illetve

$$\mathcal{F}_4^\alpha = \text{span} \{1, \cos(u), \sin(u), \cos(2u), \sin(2u) : u \in [0, \alpha]\}$$

függvényterek háromszögű kiterjesztését határozták^{4,5} meg az Ω^α tartomány felett.

- A szerzők dolgozataikban mindenfajta magyarázat nélkül az $n = 1$ és 2 esetekben $\delta_1 = 7$, illetve $\delta_2 = 19$ darab háromváltozós függvényt vezettek be...
- ...mi több, a bevezetett függvényrendszerek tulajdonságait nagyon mesterkélten, komputeralgebrai programokra épített bizonyítások során látják be, és meg is jegyzik, hogy egyrészt az általános esetben a feladat ilyenfajta kezelését reménytelennek tartják, másrészt hangsúlyozzák, hogy a szakirodalomban nem találunk idevágó fogalmakat, eszköztárat.

⁴Shen, W.-Q., Wang, G.Z., 2010. *Triangular domain extension of linear Bernstein-like trigonometric polynomial basis*. *Journal of Zhejiang University Science C (Computers & Electronics)*, **11**(5), 356–364.

⁵Shen, W.-Q., Wang, G.Z., 2010. *The triangular domain extension of Bézier-like basis for 5-order trigonometric polynomial space*. *Journal of Computer-Aided Design and Computer Graphics*, **22**(5), 833–837.



Háromszögű (racionális) trigonometrikus foltok

Általános eset: a függvényrendszer megszerkesztése

Multiplikatíván súlyozott irányított gráf

$$\blacklozenge = \sin^{2n} \frac{\mu}{2}$$

$$\star = \frac{1}{\sin \frac{\mu}{2}} \cdot \sin \frac{\mu}{2} \cdot \cos \frac{\mu}{2}$$

$$\star = \frac{1}{\sin \frac{\mu}{2}} \cdot \sin \frac{\mu}{2} \cdot \cos \frac{\nu}{2}$$

$$\star = \tan \frac{\mu}{2}$$

$$\blacklozenge = \sin^{2n} \frac{\mu}{2}$$

$$\blacktriangleleft = \frac{1}{\sin \frac{\nu}{2}} \cdot \sin \frac{\nu}{2} \cdot \cos \frac{\mu}{2}$$

$$\blacktriangleright = \frac{1}{\sin \frac{\mu}{2}} \cdot \sin \frac{\mu}{2} \cdot \cos \frac{\nu}{2}$$

$$\star = \tan \frac{\mu}{2}$$

$$\blacktriangle = \sin^{2n} \frac{\nu}{2}$$

$$\star = \frac{1}{\sin \frac{\mu}{2}} \cdot \sin \frac{\nu}{2} \cdot \cos \frac{\mu}{2}$$

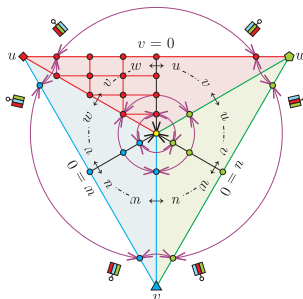
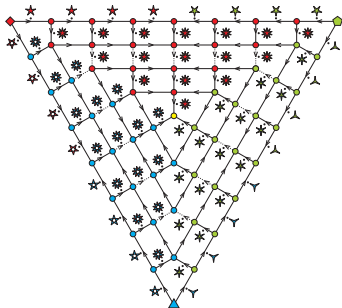
$$\star = \frac{1}{\sin \frac{\nu}{2}} \cdot \sin \frac{\mu}{2} \cdot \cos \frac{\mu}{2}$$

$$\star = \tan \frac{\mu}{2}$$

(a)

$$\bullet = \sin^n \frac{\mu}{2} \sin^n \frac{\nu}{2} \sin^n \frac{\mu}{2}$$

(b)



Háromszögű (racionális) trigonometrikus foltok

Általános eset: a függvényrendszer megszerkesztése

Az R_{2n}^α , G_{2n}^α és B_{2n}^α alrendszerek

$$\left\{ R_{2n,2n-i,j}^\alpha(u, v, w) \right\}_{j=0,i=j}^{n,n} = \left\{ \sin^{2n-i} \frac{u}{2} \sin^i \frac{w}{2} \cos^{i-j} \frac{v}{2} \sin^j \frac{v}{2} \right\}_{j=0,i=j}^{n,n}$$

$$\left\{ R_{2n,2n-i,j}^\alpha(u, v, w) \right\}_{j=0,i=n+1}^{n-1,2n-j} = \left\{ R_{2n,i,j}^\alpha(w, v, u) \right\}_{j=0,i=n+1}^{n-1,2n-j} = \left\{ \sin^i \frac{w}{2} \sin^{2n-i} \frac{u}{2} \cos^{2n-i-j} \frac{v}{2} \sin^j \frac{v}{2} \right\}_{j=0,i=n+1}^{n-1,2n-j},$$

$$\begin{aligned} \left\{ G_{2n,2n-i,j}^\alpha(u, v, w) \right\}_{j=0,i=j}^{n,n} &= \left\{ R_{2n,2n-i,j}^\alpha(w, u, v) \right\}_{j=0,i=j}^{n,n} \\ &= \left\{ \sin^{2n-i} \frac{w}{2} \sin^i \frac{v}{2} \cos^{i-j} \frac{u}{2} \sin^j \frac{u}{2} \right\}_{j=0,i=j}^{n,n}, \end{aligned}$$

$$\left\{ G_{2n,2n-i,j}^\alpha(u, v, w) \right\}_{j=0,i=n+1}^{n-1,2n-j} = \left\{ G_{2n,i,j}^\alpha(u, w, v) \right\}_{j=0,i=n+1}^{n-1,2n-j} = \left\{ \sin^i \frac{v}{2} \sin^{2n-i} \frac{w}{2} \cos^{2n-i-j} \frac{u}{2} \sin^j \frac{u}{2} \right\}_{j=0,i=n+1}^{n-1,2n-j},$$

$$\begin{aligned} \left\{ B_{2n,2n-i,j}^\alpha(u, v, w) \right\}_{j=0,i=j}^{n,n} &= \left\{ R_{2n,2n-i,j}^\alpha(v, w, u) \right\}_{j=0,i=j}^{n,n} \\ &= \left\{ \sin^{2n-i} \frac{v}{2} \sin^i \frac{u}{2} \cos^{i-j} \frac{w}{2} \sin^j \frac{w}{2} \right\}_{j=0,i=j}^{n,n}, \end{aligned}$$

$$\left\{ B_{2n,2n-i,j}^\alpha(u, v, w) \right\}_{j=0,i=n+1}^{n-1,2n-j} = \left\{ B_{2n,i,j}^\alpha(v, u, w) \right\}_{j=0,i=n+1}^{n-1,2n-j} = \left\{ \sin^i \frac{u}{2} \sin^{2n-i} \frac{v}{2} \cos^{2n-i-j} \frac{w}{2} \sin^j \frac{w}{2} \right\}_{j=0,i=n+1}^{n-1,2n-j}.$$



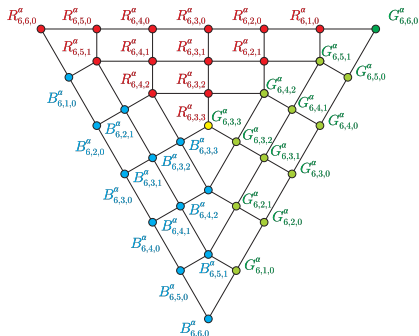
Háromszögű (racionális) trigonometrikus foltok

Általános eset: a függvényrendszer megszerkesztése

Az R_{2n}^α , G_{2n}^α és B_{2n}^α alrendszerek megfelelő egyesítése

$$T_{2n}^\alpha = \left\{ R_{2n,2n-i,j}^\alpha(u, v, w), G_{2n,2n-i,j}^\alpha(u, v, w), B_{2n,2n-i,j}^\alpha(u, v, w) : (u, v, w) \in \Omega^\alpha \right\}_{j=0,i=j}^{n-1,2n-1-j}$$

$$\cup \left\{ R_{2n,n,n}^\alpha(u, v, w) = G_{2n,n,n}^\alpha(u, v, w) = B_{2n,n,n}^\alpha(u, v, w) = \sin^n \frac{u}{2} \sin^n \frac{v}{2} \sin^n \frac{w}{2} : (u, v, w) \in \Omega^\alpha \right\}.$$



Háromszögű (racionális) trigonometrikus foltok

Kontrollpontok elrendezése

$$\blacklozenge = \sin \frac{2n}{2} \frac{v}{2}$$

$$\star = \frac{1}{\sin \frac{v}{2}} \cdot \sin \frac{w}{2} \cdot \cos \frac{v}{2}$$

$$\star = \frac{1}{\sin \frac{v}{2}} \cdot \sin \frac{w}{2} \cdot \cos \frac{v}{2}$$

$$\star = \tan \frac{v}{2}$$

$$\blacklozenge = \sin \frac{2n}{2} \frac{w}{2}$$

$$\blacktriangleright = \frac{1}{\sin \frac{w}{2}} \cdot \sin \frac{v}{2} \cdot \cos \frac{w}{2}$$

$$\blacktriangledown = \frac{1}{\sin \frac{w}{2}} \cdot \sin \frac{v}{2} \cdot \cos \frac{w}{2}$$

$$\star = \tan \frac{w}{2}$$

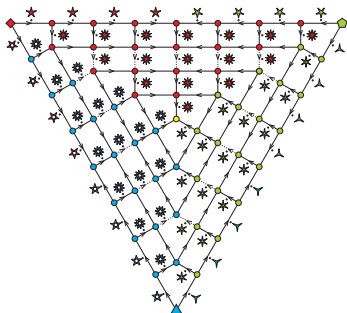
$$\blacktriangle = \sin \frac{2n}{2} \frac{v}{2}$$

$$\star = \frac{1}{\sin \frac{v}{2}} \cdot \sin \frac{w}{2} \cdot \cos \frac{w}{2}$$

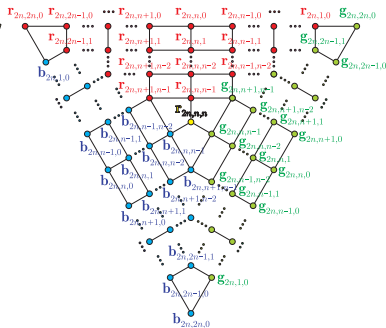
$$\star = \frac{1}{\sin \frac{v}{2}} \cdot \sin \frac{w}{2} \cdot \cos \frac{w}{2}$$

$$\star = \tan \frac{w}{2}$$

(a)



(b)



Háromszögű (racionális) trigonometrikus foltok

Háromszögű n -edfokú trigonometrikus foltok értelmezése

Értelmezés (n -edfokú trigonometrikus háromszögfoltok)

Az $\mathbf{s}_n^\alpha : \Omega^\alpha \rightarrow \mathbb{R}^3$,

$$\begin{aligned} \mathbf{s}_n^\alpha(u, v, w) = & \mathbf{r}_{2n,n,n} \overline{\mathbf{R}}_{2n,n,n}^\alpha(u, v, w) + \sum_{j=0}^{n-1} \sum_{i=j}^{2n-1-j} \mathbf{r}_{2n,2n-i,j} \overline{\mathbf{R}}_{2n,2n-i,j}^\alpha(u, v, w) \\ & + \sum_{j=0}^{n-1} \sum_{i=j}^{2n-1-j} \mathbf{g}_{2n,2n-i,j} \overline{\mathbf{G}}_{2n,2n-i,j}^\alpha(u, v, w) + \sum_{j=0}^{n-1} \sum_{i=j}^{2n-1-j} \mathbf{b}_{2n,2n-i,j} \overline{\mathbf{B}}_{2n,2n-i,j}^\alpha(u, v, w) \end{aligned}$$

megszorításos háromváltozós vektorfüggvényt n -edfokú ($n \geq 1$) **trigonometrikus háromszögfoltoknak** nevezzük, ahol az

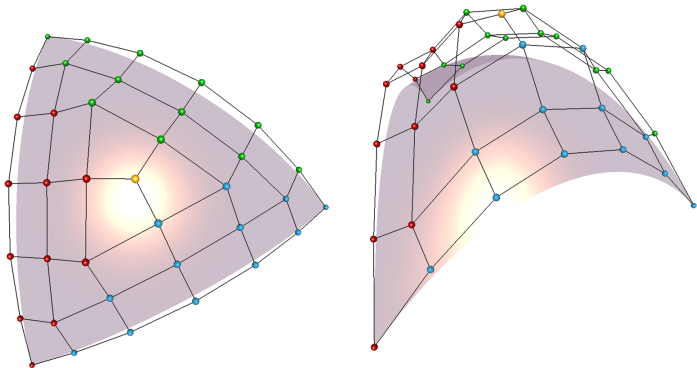
$$\{\mathbf{r}_{2n,2n-i,j}\}_{j=0,i=j}^{n,2n-1-j} \cup \{\mathbf{g}_{2n,2n-i,j}\}_{j=0,i=j}^{n-1,2n-1-j} \cup \{\mathbf{b}_{2n,2n-i,j}\}_{j=0,i=j}^{n-1,2n-1-j} \subset \mathbb{R}^3$$

vektorok a folt kontrollhálóját határozzák meg.



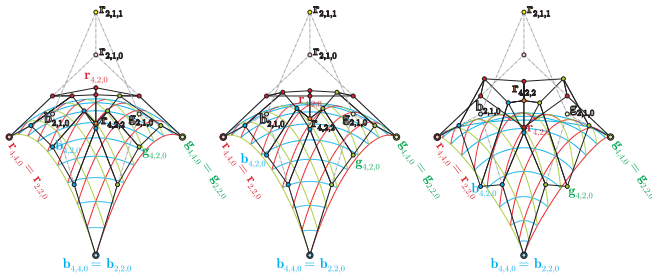
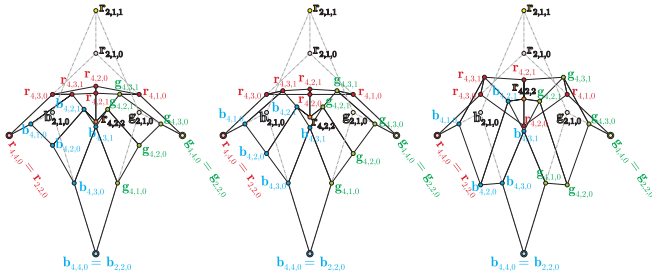
Háromszögű (racionális) trigonometrikus foltok

Példa harmadfokú trigonometrikus háromszögfaltra



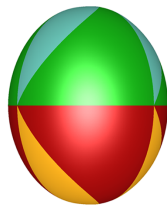
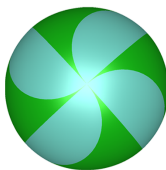
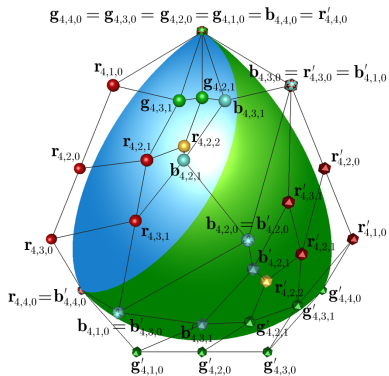
Háromszögű (racionális) trigonometrikus foltok

Fokszámnövelés



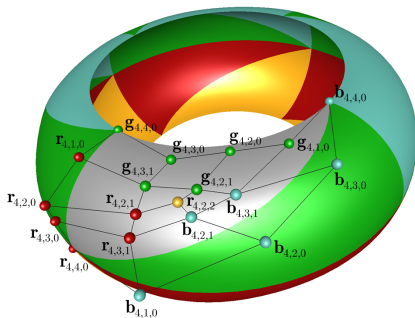
Háromszögű (racionális) trigonometrikus foltok

Kontrollpont-alapú egzakt leírás



Háromszögű (racionális) trigonometrikus foltok

Kontrollpont-alapú egzakt leírás



Háromszögű (racionális) trigonometrikus foltok

n -edfokú racionális trigonometrikus háromszögfoltok értelmezése

Értelmezés (n -edfokú racionális trigonometrikus háromszögfoltok)

- A nemnegatív és azonosan nem nulla $\rho_{2n,n,n}, \{\rho_{2n,2n-i,j}\}_{j=0,i=j}^{n-1,2n-1-j}, \{\gamma_{2n,2n-i,j}\}_{j=0,i=j}^{n-1,2n-1-j}, \{\beta_{2n,2n-i,j}\}_{j=0,i=j}^{n-1,2n-1-j}$ skalárok (súlyok) használatával racionális általánosításhoz jutunk.
- A $\mathbf{q}_n^\alpha : \Omega^\alpha \rightarrow \mathbb{R}^3$,

$$\begin{aligned} \mathbf{q}_n^\alpha(u, v, w) = & \rho_{2n,n,n} \frac{\bar{R}_{2n,n,n}^\alpha(u, v, w)}{\bar{\tau}_n^\alpha(u, v, w)} + \sum_{j=0}^{n-1} \sum_{i=j}^{2n-1-j} \rho_{2n,2n-i,j} \frac{\bar{R}_{2n,2n-i,j}^\alpha(u, v, w)}{\bar{\tau}_n^\alpha(u, v, w)} \\ & + \sum_{j=0}^{n-1} \sum_{i=j}^{2n-1-j} \gamma_{2n,2n-i,j} \frac{\bar{G}_{2n,2n-i,j}^\alpha(u, v, w)}{\bar{\tau}_n^\alpha(u, v, w)} \\ & + \sum_{j=0}^{n-1} \sum_{i=j}^{2n-1-j} \beta_{2n,2n-i,j} \frac{\bar{B}_{2n,2n-i,j}^\alpha(u, v, w)}{\bar{\tau}_n^\alpha(u, v, w)} \end{aligned}$$

megszorításos háromváltozós vektorfüggvényt n -edfokú ($n \geq 1$) racionális trigonometrikus háromszögfoltnak nevezük, ahol az

$$\{\mathbf{r}_{2n,2n-i,j}\}_{j=0,i=j}^{n,2n-1-j} \cup \{\mathbf{g}_{2n,2n-i,j}\}_{j=0,i=j}^{n-1,2n-1-j} \cup \{\mathbf{b}_{2n,2n-i,j}\}_{j=0,i=j}^{n-1,2n-1-j} \subset \mathbb{R}^3$$

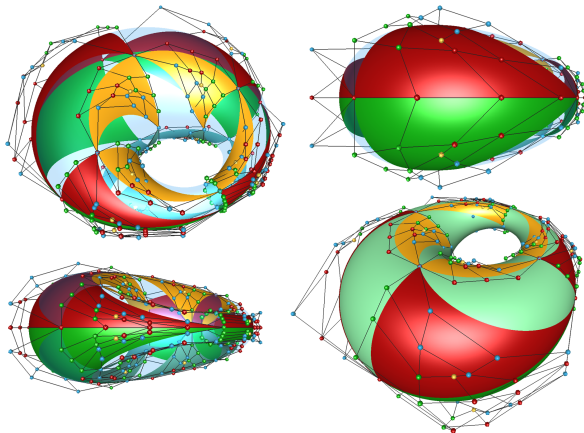
vektorok a folt kontrollhálóját határozzák meg, míg

$$\begin{aligned} \bar{\tau}_n^\alpha(u, v, w) = & \rho_{2n,n,n} \bar{R}_{2n,n,n}^\alpha(u, v, w) + \sum_{\ell=0}^{n-1} \sum_{k=\ell}^{2n-1-\ell} \rho_{2n,2n-k,\ell} \bar{R}_{2n,2n-k,\ell}^\alpha(u, v, w) \\ & + \sum_{\ell=0}^{n-1} \sum_{k=\ell}^{2n-1-\ell} \gamma_{2n,2n-k,\ell} \bar{G}_{2n,2n-k,\ell}^\alpha + \sum_{\ell=0}^{n-1} \sum_{k=\ell}^{2n-1-\ell} \beta_{2n,2n-k,\ell} \bar{B}_{2n,2n-k,\ell}^\alpha(u, v, w). \end{aligned}$$



Háromszögű (racionális) trigonometrikus foltok

Kontrollpont-alapú egzakt leírás



Pillanatnyilag megválaszolatlan kérdések

- 1 Az n -edfokú normalizációs együtthatók általános alakja.
- 2 Általános fokszámnövelés egzakt vagy rekurzív képlete.
- 3 Sorozatos felosztásos algoritmus kidolgozása.
- 4 A multiplikatívan súlyozott irányított gráf kiterjesztése (racionális) trigonometrikus térfogatmodellek (pl. inhomogén tömör testek) leírásához.



Köszönöm a figyelmet!

