MATEMATIKAI ANALÍZIS

a 2013-2014-es tanévi záróvizsgára

Matematika-informatika szak

1. fejezet

Valós számsorozatok

A valós számsorozat fogalmát a következőképpen értelmezzük.

1. Értelmezés. *Legyen X tetszőleges nem üres halmaz. Az $f : \mathbb{N} \to X$ leképzést* ***sorozatnak*** *nevezzük. Az $a_n = f(n) \in X$ elem a sorozat* ***általános tagja****. A sorozat jelölése: (a_n). Ha $X = \mathbb{R}$, akkor* ***valós számsorozatról****, ha X az $(A_i)_{i \in I} := \{A_i \mid i \in I\}$ halmazcsalád, akkor* ***halmazsorozatról*** *beszélünk. Jelölése: (A_n).*

2. Értelmezés. *Az (a_n) sorozat* ***határértéke*** a $\in \mathbb{R}$, *ha* a *bármely V környezete esetén létezik $n_V \in \mathbb{N}$ úgy, hogy $a_n \in V$, bármely $n > n_V$ esetén. Azt mondjuk, hogy az (a_n) sorozat* ***konvergens****, ha van határértéke. Ellenkező esetben a sorozatot* ***divergensnek*** *nevezzük. Konvergens sorozat határértékének jelölése: $\lim\limits_{n \to \infty} a_n$.*

A környezet értelmezése és az abszolút érték segítségével a határérték fogalmát másképpen is megfogalmazhatjuk.

1. Tulajdonság. $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = a$ *akkor és csak akkor, ha minden $\varepsilon > 0$ valós számhoz létezik olyan n_ε természetes szám, hogy minden $n > n_\varepsilon$ esetén $|a_n - a| < \varepsilon$.*

3. Értelmezés. *Az (a_n) sorozat* ***határértéke*** $+\infty(-\infty)$, *ha bármely* $c \in \mathbb{R}$ *számhoz létezik* $n_c \in \mathbb{N}$ *úgy, hogy minden* $n > n_c$ *esetén* $a_n > c$ $(a_n < c)$. *Jelölése:* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$ $\left(\lim\limits_{n\to\infty} a_n = -\infty\right)$.

1. Példa. $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + \frac{(-1)^n}{n}\right) = 1$, mert

$$\left|1 + \frac{(-1)^n}{n} - 1\right| = \frac{1}{n} < \varepsilon, \text{ ha } n > n_\varepsilon,$$

ahol $n_\varepsilon = [1/\varepsilon]$ ($[x]$ az x egész részét jelöli).

2. Példa. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sin n}{n} = 0$, mert $\left|\frac{\sin n}{n} - 0\right| \le \frac{1}{n} < \varepsilon$, ha $n > [1/\varepsilon]$.

3. Példa. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{q^n} = 0$, ha $|q| > 1$.

Először igazoljuk azt, hogy az $\{|q|^k : k \in \mathbb{N}\}$ halmaz felülről nem korlátos. Ellenkező esetben létezik a $\sup\{|q|^k : k \in \mathbb{N}\} = s \in \mathbb{R}$. A felső határ értelmezése alapján létezik $m \in \mathbb{N}$ úgy, hogy $\frac{s}{|q|} < |q|^m \le s$. Ekkor $s < |q|^{m+1}$, ami ellentmond az s értelmezésének. Ezért bármely $\varepsilon > 0$ számhoz létezik $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ úgy, hogy $\left|\frac{1}{q^n} - 0\right| = \frac{1}{|q|^n} < \frac{1}{|q|^{n_\varepsilon}} < \varepsilon$, ha $n > n_\varepsilon$.

4. Értelmezés. *Az (a_n) sorozat* ***korlátos****, ha létezik $M > 0$ úgy, hogy $|a_n| \le M$, bármely $n \in \mathbb{N}$ esetén. Az (a_n) sorozat* ***felülről (alulról) korlátos****, ha létezik $M \in \mathbb{R}$ úgy, hogy $a_n \le M$ $(M \le a_n)$, bármely $n \in \mathbb{N}$ esetén.*

5. Értelmezés. *Az (a_n) sorozat* ***növekvő (szigorúan növekvő)****, ha $a_n \le a_{n+1}$, bármely $n \in \mathbb{N}$ esetén (ha $a_n < a_{n+1}$, bármely $n \in \mathbb{N}$ esetén). Az (a_n) sorozat* ***csökkenő (szigorúan csökkenő)****, ha $a_{n+1} \le a_n$, bármely $n \in \mathbb{N}$ esetén (ha $a_{n+1} < a_n$, bármely $n \in \mathbb{N}$ esetén).*

2. Tulajdonság. *a) Konvergens sorozatnak csak egy határértéke van.*

b) Minden konvergens sorozat korlátos.

c) Bármely növekvő és felülről korlátos sorozat konvergens; bármely csökkenő és alulról korlátos sorozat konvergens.

Bizonyítás. a) Feltételezzük, hogy $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ és $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a'$, ahol $a \neq a'$. A 1. Tulajdonság alapján bármely $\varepsilon > 0$ esetén léteznek az $n'_\varepsilon, n''_\varepsilon \in \mathbb{N}$ úgy, hogy minden $n > \max\{n'_\varepsilon, n''_\varepsilon\}$ természetes számra $|a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}$ és $|a_n - a'| < \frac{\varepsilon}{2}$. Így $|a - a'| \leq |a_n - a| + |a_n - a'| < \varepsilon$, ha $n > \max\{n'_\varepsilon, n''_\varepsilon\}$. Mivel $\varepsilon > 0$ tetszőleges, ezért $0 < \varepsilon < |a - a'|$ esetén ellentmondáshoz jutunk.

b) Legyen $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$. A 1. Tulajdonságot alkalmazzuk $\varepsilon = 1$ esetén. Így létezik $n_1 \in \mathbb{N}$, amelyre $|a_n - a| < 1$, bármely $n > n_1$ esetén. Innen $|a_n| \leq |a_n - a| + |a| < 1 + |a|$, ha $n > n_1$. Legyen $M \geq \max\{|a_1|, \ldots, |a_{n_1}|, 1 + |a|\}$. Ekkor $|a_n| \leq M$ minden n-re, tehát (a_n) korlátos.

c) Legyen (a_n) növekvő és felülről korlátos. Ekkor az $\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ halmaz felülről korlátos, tehát létezik $\sup\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\} =: a \in \mathbb{R}$. Így bármely $\varepsilon > 0$ esetén létezik $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ úgy, hogy $a - \varepsilon < a_{n_\varepsilon}$. Mivel (a_n) növekvő, ezért $n_\varepsilon < n$ esetén $a_{n_\varepsilon} \leq a_n$. Így $a - \varepsilon < a_{n_\varepsilon} \leq a_n \leq a < a + \varepsilon$, vagyis $|a_n - a| < \varepsilon$, ha $n > n_\varepsilon$. Innen, a 1. Tulajdonság miatt (a_n) konvergens és $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$. $\square$

6. Értelmezés. *Ha (a_n) és (b_n) adott számsorozatok, akkor az $(a_n + b_n)$ sorozatot a két sorozat **összegének**, az $(a_n \cdot b_n)$ sorozatot a két sorozat **szorzatának**, és az $\left(\frac{a_n}{b_n}\right)$ sorozatot a két sorozat **hányadosának** nevezzük (feltételezve, hogy $b_n \neq 0$, bármely $n \in \mathbb{N}$ esetén).*

3. Tulajdonság. *Adottak az (a_n) és (b_n) sorozatok úgy, hogy $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ és $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$. Ekkor*

a) $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n + b_n) = a + b$;
b) $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n \cdot b_n) = a \cdot b$;
c) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{a}{b}$, *ha* $b_n \neq 0$ $(n \in \mathbb{N})$ *és* $b \neq 0$.

4. Tulajdonság. *a) Adottak az (a_n) és (b_n) konvergens sorozatok: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ és $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$. Ha létezik $n_0 \in \mathbb{N}$ úgy, hogy $a_n \leq b_n$, bármely $n > n_0$ esetén, akkor $a \leq b$.*

b) Ha (a_n) *és* (b_n) *konvergens sorozatok:* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$ *úgy, hogy* $a < b$, *akkor létezik* $n_0 \in \mathbb{N}$, *amelyre* $a_n < b_n$, *bármely* $n > n_0$ *esetén.*

c) Az (a_n), (b_n) *és* (c_n) *sorozatok esetén létezik* $n_0 \in \mathbb{N}$ *úgy, hogy* $a_n \leq b_n \leq c_n$, *bármely* $n > n_0$ *természetes számra. Ha* (a_n) *és* (c_n) *konvergens sorozatok, és* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} c_n$, *akkor a* (b_n) *sorozat is konvergens és* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n = \lim\limits_{n\to\infty} c_n$.

Megjegyezzük, ha a 4. Tulajdonság, a) pontjában az $a_n < b_n$ $(n > n_0)$ feltétel teljesül, akkor is $a \leq b$ a következtetés.

4. Példa. A valós számok halmaza bijektíven leképezhető azon p-adikus törtek halmazára, amelyeknek a 0 nem periódusa.

Egy olyan (s_n) sorozatot, amelynek általános tagja

$$s_n = c_0 + \frac{c_1}{p} + \ldots + \frac{c_n}{p^n}$$

alakú, ahol $c_0 \in \mathbb{Z}$, $c_n \in \{0, 1, \ldots, p-1\}$, $p > 1$ természetes szám, p**-adikus törtnek** nevezzük, és a $(c_0, c_1 c_2 \ldots c_n \ldots)_p$ szimbólummal jelöljük.

Azonnal látható, hogy (s_n) növekvő és felülről korlátos:

$$s_{n+1} = s_n + \frac{c_{n+1}}{p^{n+1}} \geq s_n$$

és

$$s_n < c_0 + 1 + \frac{1}{p} + \ldots + \frac{1}{p^{n-1}} = c_0 + \frac{1 - \frac{1}{p^n}}{1 - \frac{1}{p}} < c_0 + \frac{p}{p-1},$$

bármely $n \in \mathbb{N}$ esetén. Így a 2. Tulajdonság, c) pontja szerint (s_n) konvergens. Jelölje $\alpha = \lim\limits_{n\to\infty} s_n$. Ezért a 2. Tulajdonság, a) pontja alapján minden $(c_0, c_1 c_2 \ldots c_n \ldots)_p$ p-adikus törthöz hozzárendelhető az egyértelműen meghatározott α szám.

Fordítva, legyen $\alpha \in \mathbb{R}$ tetszőleges, és jelölje

$$]\alpha[:= \begin{cases} [\alpha]-1, & \text{ha} \quad \alpha \in \mathbb{Z} \\ [\alpha], & \text{ha} \quad \alpha \notin \mathbb{Z}. \end{cases}$$

Legyen $c_0 =]\alpha[$ és $c_n =]p^n(\alpha - c_0) - p^{n-1}c_1 - p^{n-2}c_2 - \ldots - pc_{n-1}[$, $n \in \mathbb{N}$. Nyilván $c_n \in \mathbb{Z}$, $0 \leq c_n \leq p-1$ és

$$c_0 + \frac{c_1}{p} + \ldots + \frac{c_n}{p^n} < \alpha \leq c_0 + \frac{c_1}{p} + \ldots + \frac{c_n}{p^n} + \frac{1}{p^n}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Ekkor

$$\alpha = \lim_{n\to\infty} \left(c_0 + \frac{c_1}{p} + \ldots + \frac{c_n}{p^n} \right),$$

így az α-hoz hozzárendelhetjük a $(c_0, c_1c_2 \ldots c_n \ldots)_p$ p-adikus törtet.

Végül igazoljuk, hogy a $(c_0, c_1c_2 \ldots c_n \ldots)_p$ p-adikus törtnek 0 nem periódusa, vagyis nem létezik olyan $k \in \mathbb{N}$, amelyre $0 = c_{k+1} = c_{k+2} = \ldots$

Valóban, ez utóbbi egyenlőségekből azt kapjuk, hogy $s_k = s_{k+1} = \ldots$, ahonnan

$$s_{k+m} = s_k < \alpha \leq s_{k+m} + \frac{1}{p^{k+m}} = s_k + \frac{1}{p^{k+m}}.$$

Tehát $0 < \alpha - s_k \leq \frac{1}{p^k} \cdot \frac{1}{p^m}$, minden $m \in \mathbb{N}$ esetén. Innen

$$0 < \alpha - s_k \leq \frac{1}{p^k} \cdot \lim_{m\to\infty} \frac{1}{p^m} = 0,$$

ellentmondás.

Ugyanakkor a valós számoknak olyan p-adikus törtek alakjában való meg-adása, melyeknek a 0 nem periódusa, egyértelmű.

Valóban, ha $(c_0, c_1c_2 \ldots c_n \ldots)_p = (c'_0, c'_1c'_2 \ldots c'_n \ldots)_p$ és a legkisebb k indexre $c_k > c'_k$, akkor $s_k < \alpha \leq s'_k + \frac{1}{p^k} \leq s_k$, ellentmondás. Hasonlóan jutunk ellentmondásra akkor is, ha $c_k < c'_k$.

5. Példa. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n}{q^n} = 0$, ha $q > 1$.

Legyen $x_n = \frac{n}{q^n}$, $n \in \mathbb{N}$. Ekkor $\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{n+1}{nq}$; mivel $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n+1}{nq} = \frac{1}{q} < 1$, ezért létezik $n_0 \in \mathbb{N}$ úgy, hogy $\frac{x_{n+1}}{x_n} < 1$, bármely $n > n_0$ esetén. Így $(x_n)_{n>n_0}$ szigorúan csökkenő sorozat. Másrészt $x_n > 0$, bármely n-re. A 2. Tulajdonság, c) pontja szerint $(x_n)_{n>n_0}$ konvergens sorozat. Legyen $x = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$. Az $x_{n+1} = \frac{n+1}{nq} x_n$ összefüggés alapján $x = \frac{1}{q} x$ vagyis $x = 0$.

Hasonló ötlettel igazolható, hogy

$$\lim_{n\to\infty} \frac{q^n}{n!} = 0$$

is teljesül, ahol $q \in \mathbb{R}$.

6. Példa. $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$.

Legyen $\varepsilon > 0$. A 5. Példa szerint $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n}{(1+\varepsilon)^n} = 0$. Így létezik $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ úgy, hogy $1 \le n < (1+\varepsilon)^n$, bármely $n > n_\varepsilon$ esetén. Innen $1 \le \sqrt[n]{n} < 1 + \varepsilon$ vagy $|\sqrt[n]{n} - 1| < \varepsilon$, ha $n > n_\varepsilon$. Tehát $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$.

7. Példa. Az (e_n) sorozat konvergens, ahol $e_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$, $n \ge 1$.

Azt igazoljuk, hogy $e_n < e_{n+1}$ $(n \in \mathbb{N})$ és $e_n < 3$ $(n \in \mathbb{N})$. Ekkor a 2. Tulajdonság, c) pontja alapján létezik $\lim\limits_{n\to\infty} e_n$. Vezessük be az $e := \lim\limits_{n\to\infty} e_n$ jelölést (Euler szerint).

A számtani és mértani középarányosok közötti egyenlőtlenség alkalmazásából az $a_1 = \ldots = a_n = 1 + \frac{1}{n}$ és $a_{n+1} = 1$ számok esetén kapjuk, hogy

$$\frac{n\left(1 + \frac{1}{n}\right) + 1}{n+1} > \sqrt[n+1]{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n}$$

vagy $\left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1} > \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$. Így az (e_n) sorozat szigorúan növekvő.

Továbbá,

$$\begin{aligned} e_n &= \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 1+\sum_{k=1}^{n} \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{k!}\cdot\frac{1}{n^k} = \\ &= 1+\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k!}\cdot\left(1-\frac{1}{n}\right)\dots\left(1-\frac{k-1}{n}\right) < \\ &< 1+\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k!} \le 1+\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2^{k-1}} = 2+\frac{1}{2}+\dots+\frac{1}{2^{n-1}} < 3. \end{aligned}$$

Így az (e_n) sorozat felülről korlátos.

7. Értelmezés. *Az (a_n) sorozatot* ***fundamentálisnak*** *vagy* ***Cauchy-sorozatnak*** *nevezzük, ha bármely $\varepsilon > 0$ számhoz létezik $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ úgy, hogy minden $m > n_\varepsilon$ és $n > n_\varepsilon$ esetén $|a_m - a_n| < \varepsilon$.*

5. Tétel. *(Cauchy). Az (a_n) valós számsorozat akkor és csak akkor konvergens, ha (a_n) fundamentális.*

Bizonyítás. Szükségesség. Feltételezzük, hogy $\lim_{n\to\infty} a_n = a$. A 1. Tulajdonság szerint bármely $\varepsilon > 0$ számhoz létezik $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ úgy, hogy minden $m > n_\varepsilon$ és $n > n_\varepsilon$ esetén $|a_m - a| < \frac{\varepsilon}{2}$ és $|a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}$. Innen

$$|a_m - a_n| \le |a_m - a| + |a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

vagyis (a_n) fundamentális sorozat.

Elégségesség. Legyen (a_n) fundamentális sorozat, és $\varepsilon > 0$ adott. A 7. Értelmezés alapján létezik $k_\varepsilon \in \mathbb{N}$ úgy, hogy $|a_m - a_k| < \frac{\varepsilon}{3}$, ha $m \ge k_\varepsilon$ és $k \ge k_\varepsilon$. Rögzítsük az $m = k_\varepsilon$ értéket; a $k \ge k_\varepsilon$ esetén

$$a_{k_\varepsilon} - \frac{\varepsilon}{3} < a_k < a_{k_\varepsilon} + \frac{\varepsilon}{3}. \tag{1.0.1}$$

Így az (a_k) sorozat korlátos. Az $n \in \mathbb{N}$ esetén jelölje: $x_n := \inf\{a_k \mid k \ge n\}$ és $y_n := \sup\{a_k \mid k \ge n\}$. Mivel (a_n) korlátos sorozat, ezért

$x_n, y_n \in \mathbb{R}$, bármely n-re. Továbbá, az x_n és y_n értelmezése alapján $x_n \leq x_{n+1} \leq y_{n+1} \leq y_n$, $n \in \mathbb{N}$. Egy ismert tulajdonság alapján létezik $a \in \mathbb{R}$, amelyre $x_n \leq a \leq y_n$, bármely n-re. Másrészt $x_n = \inf\{a_k \mid k \geq n\} \leq a_k \leq \sup\{a_k \mid k \geq n\} = y_n$, ha $k \geq n$. Innen

$$|a_k - a| \leq y_n - x_n, \quad k \geq n. \tag{1.0.2}$$

Viszont (1.0.1) alapján

$$a_{k_\varepsilon} - \frac{\varepsilon}{3} \leq \inf\{a_k \mid k \geq n\} = x_n \leq y_n = \sup\{a_k \mid k \geq n\} \leq a_{k_\varepsilon} + \frac{\varepsilon}{3},$$

ha $n > k_\varepsilon$. Így $y_n - x_n \leq \frac{2\varepsilon}{3} < \varepsilon$, ha $n > k_\varepsilon$. Ekkor az (1.0.2) alapján $|a_k - a| < \varepsilon$, ha $k > k_\varepsilon$. Következésképpen (a_k) konvergens sorozat. □

8. Példa. A 4. Példában bevezetett (s_n) sorozatról igazoljuk, hogy fundamentális.

Valóban, $s_n = (c_0, c_1 \dots c_n)_p = c_0 + \frac{c_1}{p} + \dots + \frac{c_n}{p^n}$. Ha $m > n$, akkor

$$\begin{aligned} |s_m - s_n| &= \left|\frac{c_{n+1}}{p^{n+1}} + \dots + \frac{c_m}{p^m}\right| \leq (p-1) \cdot \left(\frac{1}{p^{n+1}} + \dots + \frac{1}{p^m}\right) = \\ &= (p-1) \cdot \frac{\left(\frac{1}{p}\right)^{n+1} - \left(\frac{1}{p}\right)^{m+1}}{1 - \frac{1}{p}} < \frac{1}{p^n}. \end{aligned}$$

Ha adott az $\varepsilon > 0$, akkor létezik $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ úgy, hogy $\frac{1}{p^{n_\varepsilon}} < \varepsilon$. Így $|s_m - s_n| < \frac{1}{p^n} < \frac{1}{p^{n_\varepsilon}} < \varepsilon$, ahol $n > n_\varepsilon$. Tehát (s_n) fundamentális. A 5. Tétel alapján (s_n) konvergens $\mathbb{R}$-ben.

9. Példa. Az (a_n) sorozat nem konvergens, ha $a_n = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}$, $n \in \mathbb{N}$. Így $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$.

Mivel

$$|a_{2n} - a_n| = \frac{1}{n+1} + \dots + \frac{1}{n+n} > n \cdot \frac{1}{2n} = \frac{1}{2},$$

bármely $n \in \mathbb{N}$ esetén, ezért a 5. Tétel alapján az (a_n) sorozat divergens.

8. Értelmezés. *Adott az (a_n) sorozat és az $n_1 < n_2 < \ldots < n_k < \ldots$ természetes számok szigorúan növekvő sorozata. Ekkor az (a_{n_k}) sorozatot az (a_n) sorozat **részsorozatának** nevezzük.*

10. Példa. Az $1, 3, 5, \ldots$ páratlan természetes számok sorozata az $1, 2, 3, \ldots$ természetes számok sorozatának részsorozata, viszont a $3, 1, 5, 7, 9, \ldots$ sorozat már nem részsorozata a természetes számok sorozatának.

6. Tétel. *(Cesaro; Bolzano-Weierstrass). Minden korlátos valós számsorozatnak van konvergens részsorozata.*

Bizonyítás. Legyen $E := \{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$, ahol (a_n) korlátos sorozat. Ha E véges halmaz, akkor létezik $a \in E$ és $n_1 < n_2 < \ldots < n_k < \ldots, n_k \in \mathbb{N}$ úgy, hogy $a_{n_1} = a_{n_2} = \ldots = a$. Így az (a_{n_k}) részsorozat konvergens. Ha E végtelen, akkor $E' \neq \emptyset$. Legyen $a \in E'$. Ekkor létezik $n_1 \in \mathbb{N}$ úgy, hogy $|a_{n_1} - a| < 1$. Ha $n_k \in \mathbb{N}$ úgy, hogy $|a_{n_k} - a| < \frac{1}{k}$, akkor a torlódási pont értelmezése alapján létezik $n_{k+1} \in \mathbb{N}$, $n_k < n_{k+1}$ úgy, hogy $|a_{n_{k+1}} - a| < \frac{1}{k+1}$. Mivel $\lim\limits_{k\to\infty} \frac{1}{k} = 0$, ezért az (a_{n_k}) részsorozat konvergens és $\lim\limits_{k\to\infty} a_{n_k} = a$. □

7. Tulajdonság. *Minden valós számsorozatnak van vagy konvergens részsorozata vagy olyan részsorozata, amely $(+\infty)$-be vagy $(-\infty)$-be tart.*

Bizonyítás. Ha (a_n) korlátos sorozat, akkor a 6. Tétel szerint van konvergens részsorozata. Ha (a_n) felülről (alulról) nem korlátos, akkor bármely $k \in \mathbb{N}$ esetén létezik $n_k \in \mathbb{N}$ úgy, hogy $a_{n_k} > k$ $(a_{n_k} < -k)$ és $n_k < n_{k+1}$. Így az (a_{n_k}) részsorozat $(+\infty)$-be ($(-\infty)$-be) tart. □

9. Értelmezés. *Tekintsük az (a_k) sorozatot. Ha (a_k) alulról korlátos sorozat, akkor értelmezzük az $i_n = \inf\{a_k \mid k \geq n\}$ számokat. Mivel $i_n \leq$*

i_{n+1}, *bármely* $n \in \mathbb{N}$ *esetén, ezért vagy* $\lim\limits_{n\to\infty} i_n$ *véges vagy* $\lim\limits_{n\to\infty} i_n = +\infty$. *A* $\lim\limits_{n\to\infty} i_n$ *határértéket az* (a_k) *sorozat* ***alsó határértékének*** *nevezzük. Jelölése:* $\varliminf\limits_{k\to\infty} a_k$. *Ha az* (a_k) *sorozat alulról nem korlátos, akkor értelmezés szerint* $\varliminf\limits_{k\to\infty} a_k = -\infty$.

Hasonlóan értelmezzük a ***felső határértéket:*** $\varlimsup\limits_{k\to\infty} a_k := \lim\limits_{n\to\infty} s_n$, *ahol* $s_n = \sup\{a_k \mid k \geq n\}$, *ha* (a_k) *felülről korlátos. Ha az* (a_k) *sorozat felülről nem korlátos, akkor értelmezés szerint* $\varlimsup\limits_{k\to\infty} a_k = +\infty$.

Azonnal látható, hogy $\varliminf\limits_{k\to\infty} a_k \leq \varlimsup\limits_{k\to\infty} a_k$.

11. Példa. Ha $a_k = (-1)^k$, $k \in \mathbb{N}$, akkor

$$\varliminf_{k\to\infty} a_k = \lim_{n\to\infty} \inf\{(-1)^k \mid k \geq n\} = \lim_{n\to\infty}(-1) = -1$$

és

$$\varlimsup_{k\to\infty} a_k = \lim_{n\to\infty} \sup\{(-1)^k \mid k \geq n\} = \lim_{n\to\infty} 1 = 1.$$

12. Példa. Ha $a_k = k^{(-1)^k}$, $k \in \mathbb{N}$, akkor

$$\varliminf_{k\to\infty} a_k = \lim_{n\to\infty} \inf\{k^{(-1)^k} \mid k \geq n\} = \lim_{n\to\infty} 0 = 0$$

és

$$\varlimsup_{k\to\infty} a_k = \lim_{n\to\infty} \sup\{k^{(-1)^k} \mid k \geq n\} = \lim_{n\to\infty}(+\infty) = +\infty.$$

13. Példa. Ha $a_k = \frac{(-1)^k}{k}$, $k \in \mathbb{N}$, akkor

$$\varliminf_{k\to\infty} a_k = \lim_{n\to\infty} \inf\left\{\frac{(-1)^k}{k} \mid k \geq n\right\} = \lim_{n\to\infty} \begin{cases} -\frac{1}{n}, & \text{ha } n \text{ páratlan} \\ -\frac{1}{n+1}, & \text{ha } n \text{ páros} \end{cases} = 0$$

és

$$\varlimsup_{k\to\infty} a_k = \lim_{n\to\infty} \sup\left\{\frac{(-1)^k}{k} \mid k \geq n\right\} = \lim_{n\to\infty} \begin{cases} \frac{1}{n}, & \text{ha } n \text{ páros} \\ \frac{1}{n+1}, & \text{ha } n \text{ páratlan} \end{cases} = 0.$$

14. Példa. Ha $a_k = (-1)^k k$, $k \in \mathbb{N}$, akkor

$$\underline{\lim_{k\to\infty}}\, a_k = \lim_{n\to\infty} \inf\{(-1)^k k \mid k \geq n\} = \lim_{n\to\infty}(-\infty) = -\infty \quad \text{és}$$
$$\overline{\lim_{k\to\infty}}\, a_k = \lim_{n\to\infty} \sup\{(-1)^k k \mid k \geq n\} = \lim_{n\to\infty}(+\infty) = +\infty.$$

Az alsó és felső határérték jobb megértéséhez vezessük be a következő fogalmat:

10. Értelmezés. *Egy valós szám (vagy $+\infty$ vagy $-\infty$) egy sorozat **parciális határértéke**, ha a sorozatnak van az adott számhoz konvergens részsorozata.*

8. Tulajdonság. *Egy korlátos sorozat alsó határértéke illetve felső határértéke a sorozat legkisebb illetve legnagyobb parciális határértéke.*

Bizonyítás. Legyen (a_k) korlátos sorozat és $i = \underline{\lim_{k\to\infty}}\, a_k$. Az (i_n), $i_n = \inf\{a_k \mid k \geq n\}$ sorozatról tudjuk, hogy $i_n \leq i_{n+1}$ és $i = \lim_{n\to\infty} i_n$. Az alsó határ értelmezése alapján minden n-re létezik $k_n \in \mathbb{N}$ úgy, hogy $i_n \leq a_{k_n} < i_n + \frac{1}{n}$ és $k_n < k_{n+1}$. Mivel $\lim_{n\to\infty} i_n = \lim_{n\to\infty}\left(i_n + \frac{1}{n}\right) = i$, ezért a 4. Tulajdonság, c) pontja szerint $\lim_{n\to\infty} a_{k_n} = i$. Ezzel igazoltuk, hogy i parciális határérték.

Most igazoljuk, hogy i a legkisebb parciális határérték. Valóban, a $\lim_{n\to\infty} i_n = i$ miatt bármely $\varepsilon > 0$ esetén létezik $n \in \mathbb{N}$ úgy, hogy $i - \varepsilon < i_n = \inf\{a_k \mid k \geq n\} \leq a_k$, ha $k \geq n$. Az $i - \varepsilon < a_k$, $k \geq n$, egyenlőtlenség azt jelenti, hogy az (a_k) sorozatnak minden parciális határértéke $\geq i - \varepsilon$. Viszont ε tetszőleges, ezért az (a_k) sorozat parciális határértékei $\geq i$. Következésképp i a legkisebb parciális határérték.

Hasonlóan járunk el a felső határérték esetében is. □

Tekintettel a 10. Értelmezésre és a 8. Tulajdonságra kijelenthető a következő tulajdonság:

9. Tulajdonság. *Bármely sorozat esetén az alsó határérték a legkisebb parciális határérték, míg a felső határérték a legnagyobb parciális határérték.*

10. Következmény. *Egy sorozat akkor és csak akkor konvergens vagy tart $(+\infty)$-be vagy $(-\infty)$-be, ha a sorozat alsó határértéke egyenlő a felső határértékével.*

Bizonyítás. Ha $\underline{\lim}_{k\to\infty} a_k = \overline{\lim}_{k\to\infty} a_k = a \in \mathbb{R}$, akkor

$$i_n = \inf\{a_k \mid k \geq n\} \leq a_n \leq \sup\{a_k \mid k \geq n\} = s_n$$

alapján $\lim_{n\to\infty} a_n = a$. Ha $\underline{\lim}_{k\to\infty} a_k = \overline{\lim}_{k\to\infty} a_k = -\infty$, akkor

$$a_n \leq \sup\{a_k \mid k \geq n\} = s_n \to -\infty,$$

tehát $\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty$. Ha $\underline{\lim}_{k\to\infty} a_k = \overline{\lim}_{k\to\infty} a_k = +\infty$, akkor

$$a_n \geq \inf\{a_k \mid k \geq n\} = i_n \to +\infty,$$

tehát $\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$. □

11. Következmény. *Konvergens sorozat minden részsorozata konvergens, és határértéke egyenlő az eredeti sorozat határértékével.*

Bizonyítás.
Valóban, a sorozat bármely részsorozatának alsó határértéke és felső határértéke az adott sorozat alsó határértéke és felső határértéke között található. Mivel a sorozat konvergens, ezért alsó határértéke egyenlő a felső határértékével. Következésképp a részsorozat alsó határértéke is egyenlő a felső határértékével, ami a 30. Következmény alapján azt jelenti, hogy a részsorozat konvergens. Mi több, a részsorozat határértéke egyenlő az adott sorozat határértékével. □

2. fejezet

Valós számsorok, végtelen szorzatok

2.1. A számsorokról általában

A számsor fogalma az ókori görög matematikusok munkáiban is megtalálható az infinitezimális módszerek kidolgozásával kapcsolatosan. Az ókori Görögországban korán felfigyeltek az olyan sajátos problémákra, melyek meg-oldásához határátmenet, végtelen folyamat, folytonosság stb. vizsgálatára volt szükség. Már az összemérhetetlen mennyiségek felfedezése felvetette a hasonló problémák racionális magyarázatának feladatát.

A problémák e csoportját rövidesen a geometria oldaláról közelítették meg. Azonban itt is hasonló nehézségekkel ütköztek (távolságok, térfogatok nagyságának meghatározása). Az ókori tudósok egyes csoportjai úgy kerestek kiutat ezekből a nehézségekből, hogy az atomista filozófusok nézeteit a matematikára is alkalmazták. Elgondolásaik Démokritosz (i.e. kb. 460-370) természetfilozófiai iskolájában jutottak kifejezésre, amely szerint minden test végtelen kicsiny atomokból tevődik össze. A testek atomjainak alakjában, elhelyezkedésében és összekapcsolódásuk módjában különböznek egymástól. Ez az atomisztikus szemlélet a matematikában is elterjedt annak ellenére, hogy több kifogás is megfogalmazódott ezen szemlélettel szemben. Ezek az ún. Zénón aporiái; ezekhez a logikai paradoxonokhoz akkor jutott, amikor a folytonos mennyiségeket végtelen kis részecskék végtelen halmazából próbálta megkapni. Az aporiák közül a legismertebbek:

a) felezés (dichotomia), vagyis a mozgás megvalósíthatatlansága; mivel az utat végtelen sok részre lehet osztani (felezések vég nélküli ismétlésével), ezért az útszakaszok végtelen egymásutánját kell leküzdeni (matematikailag kifejezve, ez a $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} = 1$ tény tagadásához vezet);

b) Akhilleusz nem tudja utolérni a teknősbékát; mivel egymás után el kell érnie azokat a helyeket, ahol a teknősbéka pillanatnyilag tartózkodik, vagyis az útszakaszok végtelen sorozatát kell kimerítenie (matematikailag ez ellentmond annak az akkor már imert ténynek, hogy $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{1}{n^k} = \frac{n}{n-1}\Big)$;

c) a nyíl repülése lehetetlen, ha az időt diszkrét pillanatok, a teret pedig diszkrét pontok összességének tekintjük.

Zénón aporiái meggyőzően igazolták, hogy ha feladatok pontos bizonyítását és logikailag kimerítő megoldását keressük, nem szabad a végtelent a naiv atomista felfogásra támaszkodva használni. Hasonló célok eléréséhez ki kell dolgozni és a kutatásba be kell vonni olyan módszereket, amelyek a végtelen kicsiny elemek különféle fajtáival együtt a határátmenetükre vonatkozó következtetéseket is tartalmazzák. Az egyik legkorábbi ilyen módszer a kimerítés módszere volt. Felfedezőjének általában Eudokszoszt tartják. Alkalmazására példákat találhatunk Euklidész *Elemek* című művében, továbbá Arkhimédész egész sor művében. Arkhimédész főként levél alakjában írta műveit. Tíz, aránylag nagy és néhány kisebb matematikai jellegű műve maradt fenn. Matematikai műveinek alapvető tulajdonsága a szigorú matematikai módszerek alkalmazása a mechanika és fizika területéről vett kisérleti-elméleti anyag kidolgozásában. Ez a tulajdonság avatja Arkhimédész munkáit az alkalmazott matematikai ismeretek, a számolási technika, az új matematikai - különösen az infinitezimális - módszerek fejlődésének alighanem legfényesebb példaképévé a késő antik korban.

A kimerítés módszerét síkidomok területének, testek térfogatának, görbe vonalak hosszúságának kiszámítására, görbékhez húzott érintők meghatározására stb. használták. A módszer matematikai lényege a következő műveletek egymásutáni végrehajtásából áll:

a) Ha például a B alakzatot kell négyszögesíteni, akkor első lépésként beírják ebbe az alakzatba a $A_1, A_2, \dots, A_n, \dots$ alakzatok sorozatát, amelyek területei monoton növekednek, és a terület a sorozat minden egyes tagjára meghatározható (2.1. ábra).

b) Az A_k $(k = 1, 2, 3, \dots)$ alakzatokat oly módon választják ki, hogy a pozitív $B \setminus A_k$ különbség tetszőlegesen kicsivé tehető legyen.

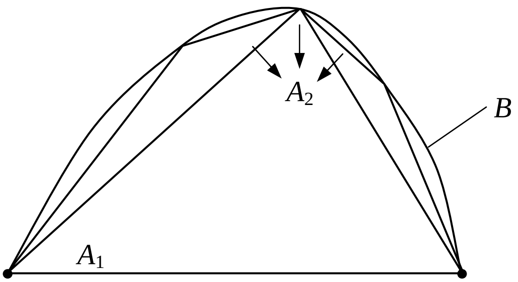
c) Abból a tényből, hogy létezik körülírt alakzat, továbbá ennek a körülírt alakzatnak a felépítéséből arra következtetnek, hogy a "kimerítő" beírt alakzatok sorozata felülről korlátos.

d) Burkolt formában, rendszerint más elméleti és gyakorlati megfontolások segítségével, megkeresik a beírt alakzatok sorozatának A határértékét.

e) Bebizonyítják, minden feladatra külön-külön, hogy $A = B$. A bizonyítás rendszerint indirekt.

A kimerítés módszerével ily módon igazolják a határérték egyértelműségét. Más eljárásokkal kombinálva e módszer alkalmas a határérték megkeresésére is. Azonban a határérték létezésének kérdésére e módszer nem tud választ adni.

A kimerítés módszerének logikai szigorúságát évszázadokon át nem tudták felülmúlni. Lényegében csak a XIX. század hozta meg ezt. Ekkor kezdtek megoldódni azok a problémák, amelyek a kimerítés an-



A_2
B
A_1

tik módszerének logikai lényegéből közvetlenül következtek. Azonban a kimerítés mód-szerének formája még igen tökéletlen volt. A módszert csak a konkrét feladatokkal kapcsolatban fejtették ki, tehát még nem érte el a fejlett alapfogalmak rendszerével és egységes algoritmusokkal rendelkező absztrakt módszer rangját. A határérték egyértelműségét minden feladatban újra bebizonyították. E negatívumok fennállása nem valami különös véletlen. Az a helyzet, hogy minden erre vonatkozó kísérlet, hogy a feladatok elég széles osztályára ezt a bizonyítást egyszer s mindenkorra bevezessék, elkerülhetetlenül maga után vonta annak szükségességét, hogy egy sor infinitezimális természetű fogalmat megmagyarázzanak. Racionális magyarázatot kellett volna adni az olyan fogalmakra, mint végtelen kicsiny fogalma, minden határon túli megközelítés stb. Az ezekkel kapcsolatos nehézségeket az ókori matematika nem tudta legyőzni.

2.2. Valós számsorok

1. Értelmezés. *Tekintsük az (a_n) valós számsorozatot, és értelmezzük az (s_n) sorozatot úgy, hogy $s_n = a_1 + \ldots + a_n$ $(n \in \mathbb{N})$. Ekkor az $((a_n), (s_n))$ sorozatpárt **valós számsornak** nevezzük. Jelölése: $\sum\limits_{n\geq 1} a_n$ vagy $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$. Az (s_n) sorozat a **részletösszeg sorozat**, s_n az n-**ed rendű részletösszeg**, míg a_n a sor **általános tagja**.*

2. Értelmezés. *A $\sum\limits_{n\geq a} a_n$ sor **konvergens**, ha az (s_n) sorozat konvergens; ebben az esetben a sor **összege** a $\lim\limits_{n\to\infty} s_n$ határérték. Ellenkező esetben a $\sum\limits_{n\geq 1} a_n$ sor **divergens**.*

1. Példa. A $\sum\limits_{n\geq 1} \frac{1}{n}$ *harmonikus sor* divergens.

Valóban, az 1. Fejezet, 9. Példája szerint az (s_n), $s_n = 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n}$ sorozat divergens. Így a harmonikus sor is divergens.

2. Példa. A $\sum\limits_{n\geq 1} \frac{1}{n(n+1)}$ sor konvergens.

Mivel

$$\begin{aligned} s_n &= \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \ldots + \frac{1}{n(n+1)} = \\ &= 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = 1 - \frac{1}{n+1}, \end{aligned}$$

ezért $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = 1$. Így a sor konvergens és összege 1.

3. Példa. A $\sum\limits_{n\geq 1} q^{n-1}$, $q \in \mathbb{R}$, *mértani sor* akkor és csak akkor konvergens, ha $|q| < 1$.

Azonnal látható, hogy $s_n = \begin{cases} \frac{1-q^n}{1-q}, & \text{ha } q \neq 1 \\ n, & \text{ha } q = 1. \end{cases}$ Ha $|q| < 1$, akkor $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = \frac{1}{1-q}$; ha $q = 1$, akkor $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = +\infty$; ha $q = -1$, akkor (s_n) divergens; ha $q > 1$, akkor $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = +\infty$; ha $q < -1$, akkor (s_n) divergens. Így valóban a mértani sor akkor és csak akkor konvergens, ha $|q| < 1$.

1. Tulajdonság. *A* $\sum\limits_{n\geq 1} a_n$ *sor konvergenciájának szükséges feltétele az, hogy* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

Bizonyítás. Ha $\sum\limits_{n\geq 1} a_n$ konvergens, akkor $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = s$. Ekkor $\lim\limits_{n\to\infty} s_{n-1} = s$. Így

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} (s_n - s_{n-1}) = s - s = 0.$$

□

Megjegyezzük, hogy a tulajdonság nem elégséges: a $\sum\limits_{n\geq 1} \frac{1}{n}$ sor divergens, de $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$ (lásd az 1. Példát). Ellenben, *ha a sor általános tagja nem tart nullához, akkor a sor divergens.*

2. Tétel. *(Cauchy általános konvergencia kritériuma). Annak szükséges és elégséges feltétele, hogy a* $\sum\limits_{n\geq 1} a_n$ *sor konvergens legyen az, hogy* *bármely $\varepsilon > 0$ esetén létezzen $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ úgy, hogy minden $m > n > n_\varepsilon$ esetén*

$$|a_{n+1} + \ldots + a_m| < \varepsilon.$$

Bizonyítás. A bizonyítás azonnali, ha az (s_n) sorozatra alkalmazzuk az 1. Fejezet, 5 Tételét. □

3. Következmény. *a) Ha a sor véges számú tagjának a sorrendjét megváltoztatjuk, akkor a sor természete és összege nem változik meg.*

b) Ha egy sor tagjaihoz hozzáadunk vagy elveszünk véges számú tagot, a sor természete nem változik meg.

Alább értelmezzük a váltakozó előjelű sor fogalmát, és megadjuk a Leibniz-féle elégséges konvergencia kritériumot.

3. Értelmezés. *A* $\sum\limits_{n\geq 1}(-1)^{n-1}a_n = a_1 - a_2 + \ldots + (-1)^{n-1}a_n + \ldots$ *sort, ahol $a_n > 0$, bármely $n \in \mathbb{N}$ esetén,* ***váltakozó előjelű sornak*** *nevezzük.*

4. Tétel. *(Leibniz-féle kritérium). Ha az (a_n) sorozat csökkenő és $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$, akkor a $\sum\limits_{n\geq 1}(-1)^{n-1}a_n$ sor konvergens.*

Bizonyítás. Mivel $s_n = a_1 + \ldots + a_n$, ezért $s_{2n+2} = (a_1 - a_2) + \ldots + (a_{2n-1} - a_{2n}) + (a_{2n+1} - a_{2n+2}) = s_{2n} + (a_{2n+1} - a_{2n+2})$. Viszont (a_n) csökkenő, így $a_{2n+1} - a_{2n+2} \geq 0$. Innen $s_{2n} \leq s_{2n+2}$. Másrészt $s_{2n} = a_1 - (a_2 - a_3) - \ldots - (a_{2n-2} - a_{2n-1}) - a_{2n}$. Mivel (a_n) csökkenő sorozat és $a_{2n} \geq 0$, ezért $s_{2n} \leq a_1$. Így igazoltuk azt, hogy az (s_{2n}) sorozat növekvő és felülről korlátos, tehát (s_{2n}) konvergens. Mivel $s_{2n+1} = s_{2n} + a_{2n+1}$ és $\lim\limits_{n\to\infty} a_{2n+1} = 0$, ezért $\lim\limits_{n\to\infty} s_{2n+1} = \lim\limits_{n\to\infty} s_{2n}$. Így az (s_n) konvergens sorozat, ami azt jelenti, hogy a $\sum\limits_{n\geq 1}(-1)^{n-1}a_n$ sor konvergens. □

4. Példa. A $\sum\limits_{n\geq 1}(-1)^{n-1} \cdot \frac{1}{n}$ sor konvergens (Leibniz-sor).

5. Tétel. *(Dirichlet-Abel-féle kritérium). Ha a* $\sum_{n\geq 1} a_n$ *sor általános tagja* $a_n = \alpha_n x_n$ *alakú, és teljesülnek a következő feltételpárok:*

a) (α_n) *csökkenő sorozat és* $\lim_{n\to\infty} \alpha_n = 0$;

b) a $\sum_{n\geq 1} x_n$ *sor részletösszeg sorozata korlátos,*

vagy

c) (α_n) *monoton és korlátos sorozat;*

d) a $\sum_{n\geq 1} x_n$ *sor konvergens,*

akkor a $\sum_{n\geq 1} a_n$ *sor konvergens.*

Bizonyítás. Feltételezzük, hogy az a) - b) feltételpár teljesül. Legyen $s_n = x_1 + \ldots + x_n$, $n \in \mathbb{N}$. A b) feltétel alapján létezik $M > 0$ úgy, hogy $|s_n| \leq M$, bármely n-re. Az a) feltétel szerint $\lim_{n\to\infty} \alpha_n = 0$, ezért bármely $\varepsilon > 0$ esetén létezik $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ úgy, hogy $|\alpha_n| < \frac{\varepsilon}{2M}$, bármely $n > n_\varepsilon$ esetén. Továbbá, figyelembe véve, hogy $\alpha_n - \alpha_{n+1} \geq 0$ tetszőleges n-re, írható:

$$\begin{aligned}
&|a_{n+1} + \ldots + a_{n+p}| = \\
&\quad = |\alpha_{n+1}x_{n+1} + \ldots + \alpha_{n+p}x_{n+p}| = \\
&\quad = |\alpha_{n+1}(s_{n+1} - s_n) + \ldots + \alpha_{n+p}(s_{n+p} - s_{n+p-1})| = \\
&\quad = |-\alpha_{n+1}s_n + (\alpha_{n+1} - \alpha_{n+2})s_{n+1} + \ldots + \\
&\qquad + (\alpha_{n+p-1} - \alpha_{n+p})s_{n+p-1} + \alpha_{n+p}s_{n+p}| \leq \\
&\quad \leq \alpha_{n+1}|s_n| + (\alpha_{n+1} - \alpha_{n+2})|s_{n+1}| + \ldots + \\
&\qquad + (\alpha_{n+p-1} - \alpha_{n+p})|s_{n+p-1}| + \alpha_{n+p}|s_{n+p}| \leq \\
&\quad \leq M(\alpha_{n+1} + \alpha_{n+1} - \alpha_{n+2} + \ldots + \alpha_{n+p-1} - \alpha_{n+p} + \alpha_{n+p}) = \\
&\quad = 2M\alpha_{n+1} < \varepsilon,
\end{aligned}$$

bármely $n > n_\varepsilon$ esetén. Így minden $\varepsilon > 0$ esetén létezik $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ úgy, hogy $|a_{n+1} + \ldots + a_{n+p}| < \varepsilon$, bármely $n > n_\varepsilon$ és $p \in \mathbb{N}$ esetén, ami a 2. Tétel szerint azt jelenti, hogy $\sum\limits_{n\geq 1} a_n$ konvergens.

Ha a c) - d) feltételpár teljesül, akkor a d) szerint a $\sum\limits_{n\geq 1} x_n$ sor részletösszeg sorozata korlátos és $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = x$, ahol $s_n = x_1 + \ldots + x_n$. Feltételezzük, hogy (α_n) csökkenő sorozat. Ekkor létezik $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n =: \alpha$. Így az $(\alpha_n - \alpha)$ sorozat is csökkenő és $\lim\limits_{n\to\infty}(\alpha_n - \alpha) = 0$. Viszont

$$\sum_{k=1}^{n} \alpha_k x_k = \sum_{k=1}^{n}(\alpha_k - \alpha)x_k + \sum_{k=1}^{n} \alpha x_k = \sum_{k=1}^{n}(\alpha_k - \alpha)x_k + \alpha s_n.$$

Mivel a $\sum\limits_{n\geq 1}(\alpha_n - \alpha)x_n$ sor konvergens az a) - b) feltételpár miatt, ezért a $\sum\limits_{n\geq 1} \alpha_n x_n = \sum\limits_{n\geq 1} a_n$ sor is konvergens.

Ha (α_n) növekvő sorozat, akkor az eljárás hasonló az előbbihez, tekintve az $(\alpha - \alpha_n)$ csökkenő sorozatot. $\square$

Az a) - b) feltételpárt a **Dirichlet-féle feltételeknek**, míg a c) - d) feltételpárt az **Abel-féle feltételeknek** nevezzük.

5. Példa. A $\sum\limits_{n\geq 1}(-1)^{n-1} \cdot \frac{1}{n^2}$ sor konvergens.

Valóban, ha $\alpha_n = \frac{1}{n^2}$ és $x_n = (-1)^{n-1}$, $n \in \mathbb{N}$, akkor az (α_n) sorozat csökkenő és határértéke 0. Viszont

$$s_n = x_1 + \ldots + x_n = 1 + \ldots + (-1)^{n-1} = \begin{cases} 0, & \text{ha } n \text{ páros} \\ 1, & \text{ha } n \text{ páratlan.} \end{cases}$$

Ezért az (s_n) sorozat korlátos. Így a Dirichlet-kritérium biztosítja, hogy a sor konvergens.

6. Példa. A $\sum\limits_{n\geq 1} \frac{1}{n} \sin n$ sor konvergens.

Legyen $\alpha_n = \frac{1}{n}$ és $x_n = \sin n$, $n \in \mathbb{N}$. Az (α_n) sorozat csökkenő és $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n = 0$. Továbbá

$$s_n = x_1 + \ldots + x_n = \sin 1 + \ldots + \sin n = \frac{\sin \frac{n}{2} \sin \frac{n+1}{2}}{\sin \frac{1}{2}},$$

ezért $|s_n| \leq (\sin \frac{1}{2})^{-1}$, bármely n-re. Így a Dirichlet-kritérium alapján a sor konvergens.

A továbbiakban az ún. pozitív tagú sorokat tanulmányozzuk.

4. Értelmezés. *A $\sum\limits_{n\geq 1} a_n$ sor **pozitív tagú**, ha $a_n > 0$, bármely $n \in \mathbb{N}$ esetén.*

6. Tulajdonság. *A pozitív tagú $\sum\limits_{n\geq 1} a_n$ sor akkor és csak akkor konvergens, ha a részletösszeg sorozata felülről korlátos.*

Bizonyítás. Az állítás azonnal következik a 17. Értelmezésből és az $s_{n+1} - s_n = a_{n+1} > 0$, $n \in \mathbb{N}$, egyenlőtlenségből. $\square$

7. Tétel. *(összehasonlítási kritérium). Adottak a $\sum\limits_{n\geq 1} a_n$ és $\sum\limits_{n\geq 1} b_n$ pozitív tagú sorok. Ha létezik $n_0 \in \mathbb{N}$ úgy, hogy $a_n \leq b_n$, bármely $n > n_0$ esetén, akkor a $\sum\limits_{n\geq 1} b_n$ sor konvergenciájából következik, hogy $\sum\limits_{n\geq 1} a_n$ is konvergens, míg ha $\sum\limits_{n\geq 1} a_n$ divergens, akkor $\sum\limits_{n\geq 1} b_n$ is divergens.*

Bizonyítás. Ha a $\sum\limits_{n\geq 1} b_n$ sor konvergens, akkor az $s'_n = b_1 + \ldots + b_n$ általános tagú részletösszeg sorozat felülről korlátos. Az $a_n \leq b_n$, $n > n_0$ feltétel alapján az $s_n = a_1 + \ldots + a_n$ általános tagú részletösszeg sorozat is felülről korlátos. Így a 14. Tulajdonság miatt a $\sum\limits_{n\geq 1} a_n$ sor is konvergens. Továbbá, ha $\sum\limits_{n\geq 1} a_n$ divergens sor, akkor az $s_n = a_1 + \ldots + a_n$ általános tagú sorozat felülről nem korlátos. Tekintettel az $a_n \leq b_n$ $(n > n_0)$ feltételre következik, hogy az $s'_n = b_1 + \ldots + b_n$ általános tagú sorozat sem korlátos felülről. Így a 14. Tulajdonság alapján a $\sum\limits_{n\geq 1} b_n$ sor divergens. $\square$

7. Példa. A $\sum\limits_{n\geq 1} \frac{1}{n^\alpha}$ *általánosított harmonikus sor* divergens, ha $\alpha < 1$.

Mivel $\frac{1}{n} \leq \frac{1}{n^\alpha}$, ha $n \in \mathbb{N}$ és $\alpha < 1$, és $\sum\limits_{n\geq 1} \frac{1}{n}$ divergens (lásd az 1. Példát), ezért az általánosított harmonikus sor divergens a 7. Tétel alapján.

8. Tétel. *(Cauchy-féle kondenzálási kritérium). Ha $a_1 \geq a_2 \geq \ldots \geq a_n \geq \ldots \geq 0$, akkor a $\sum\limits_{n\geq 1} a_n$ sor akkor és csak akkor konvergens, ha a $\sum\limits_{k\geq 1} 2^k a_{2^k}$ sor konvergens.*

Bizonyítás. Jelölje $s_n := a_1 + \ldots + a_n$ és $s'_n := 2a_2 + \ldots + 2^n a_{2^n}$, $n \in \mathbb{N}$. Mivel az (a_n) sorozat csökkenő, ezért $a_2 \leq a_2 \leq a_1$, $2a_4 \leq a_3 + a_4 \leq 2a_2$, $4a_8 \leq a_5 + a_6 + a_7 + a_8 \leq 4a_4, \ldots,$ $2^n a_{2^{n+1}} \leq a_{2^n+1} + \ldots + a_{2^n+2^n} \leq 2^n a_{2^n}$. Összegezve $\frac{1}{2} s'_{n+1} \leq s_{2^{n+1}} - a_1 \leq s'_n + a_1$, $n \in \mathbb{N}$. Innen az következik, hogy ha $\sum\limits_{n\geq 1} a_n$ konvergens, akkor az (s'_n) sorozat korlátos, így a 6. Tulajdonság alapján $\sum\limits_{k\geq 1} 2^k a_{2^k}$ konvergens; ha $\sum\limits_{n\geq 1} a_n$ divergens, akkor $\lim\limits_{n\to\infty} s_{2^{n+1}} = +\infty$, tehát $\lim\limits_{n\to\infty} s'_n = +\infty$, vagyis $\sum\limits_{k\geq 1} 2^k a_{2^k}$ divergens sor. □

8. Példa. A $\sum\limits_{n\geq 1} \frac{1}{n^\alpha}$ általánosított harmonikus sor konvergens, ha $\alpha > 1$.

A 8. Tétel alapján a $\sum\limits_{n\geq 1} \frac{1}{n^\alpha}$ és

$$\sum_{k\geq 1} 2^k \cdot \left(\frac{1}{2^k}\right)^\alpha = \sum_{k\geq 1} (2^{1-\alpha})^k$$

sorok azonos természetűek (egyidőben konvergensek vagy divergensek). De a 3. Példa szerint a $\sum\limits_{k\geq 1} (2^{1-\alpha})^k$ sor konvergens, ha $2^{1-\alpha} < 1$ vagyis ha $\alpha > 1$.

9. Tétel. *(hányados vagy d'Alembert-féle kritérium). Tekintsük a $\sum\limits_{n\geq 1} a_n$ pozitív tagú sort.*

a) *Ha létezik $q \in]0,1[$ és $n_0 \in \mathbb{N}$ úgy, hogy $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq q$, bármely $n > n_0$ esetén, akkor a $\sum\limits_{n\geq 1} a_n$ sor konvergens.*

b) *Ha létezik $n_0 \in \mathbb{N}$ úgy, hogy $\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq 1$, bármely $n \geq n_0$ esetén, akkor a $\sum\limits_{n\geq 1} a_n$ sor divergens.*

Bizonyítás. a) Mivel $a_{n+1} \leq qa_n$, $n > n_0$, ezért $a_n \leq qa_{n-1} \leq q^2 a_{n-2} \leq \ldots \leq q^{n-n_0-1} a_{n_0+1}$, ha $n > n_0$. Mivel $q \in]0,1[$, ezért a $\sum\limits_{n > n_0+1} q^{n-n_0-1}$ sor konvergens (3. Példa), tehát a 7. Tétel biztosítja, hogy a $\sum\limits_{n\geq 1} a_n$ sor konvergens.

b) Ha $a_{n+1} \geq a_n$, $n > n_0$, akkor $a_n \geq a_{n-1} \geq \ldots \geq a_{n_0+1} > 0$. Így a (a_n) sorozat nem tart nullához, tehát az 1. Tulajdonság szerint a $\sum\limits_{n\geq 1} a_n$ sor divergens. □

10. Következmény. *Ha $\sum\limits_{n\geq 1} a_n$ pozitív tagú sor és létezik a $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = l$ határérték, akkor*

a) *a sor konvergens, ha $l < 1$;*

b) *a sor divergens, ha $l > 1$;*

c) *a kritérium nem alkalmazható, ha $l = 1$.*

Bizonyítás. a) A konvergens sorozat felhasználásával bármely $\varepsilon > 0$ számhoz létezik $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ úgy, hogy minden $n > n_\varepsilon$ esetén $l - \varepsilon < \frac{a_{n+1}}{a_n} < l + \varepsilon$. Mivel $l < 1$, ezért megválasztható az $\varepsilon > 0$ úgy, hogy $l + \varepsilon =: q < 1$. Így $q \in]0,1[$ és $\frac{a_{n+1}}{a_n} < q$, ha $n > n_\varepsilon$. Ezért a 9. Tétel, a) pontja alapján $\sum\limits_{n\geq 1} a_n$ konvergens.

b) Ha $l > 1$, akkor az ε-t úgy választjuk meg, hogy $l - \varepsilon \geq 1$. Ekkor $\frac{a_{n+1}}{a_n} > 1$, ha $n > n_\varepsilon$, ami a 9.Tétel, b) pontja alapján azt jelenti, hogy $\sum\limits_{n\geq 1} a_n$ divergens.

c) Az 1. Példa, 7. Példa és 8. Példa alapján a $\sum\limits_{n\geq 1} \frac{1}{n^\alpha}$ divergens, ha $\alpha \leq 1$ és konvergens, ha $\alpha > 1$.

Mivel

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{(n+1)^\alpha}}{\frac{1}{n^\alpha}} = 1,$$

ezért $l = 1$ esetben a kritérium valóban nem alkalmazható. □

11. Tétel. *(gyök vagy Cauchy-féle kritérium). Tekintsük a* $\sum\limits_{n\geq 1} a_n$ *pozitív tagú sort.*

a) *Ha létezik* $q \in]0,1[$ *és* $n_0 \in \mathbb{N}$ *úgy, hogy* $\sqrt[n]{a_n} \leq q$, *bármely* $n > n_0$ *esetén, akkor a* $\sum\limits_{n\geq 1} a_n$ *sor konvergens.*

a) *Ha létezik* $n_0 \in \mathbb{N}$ *úgy, hogy* $\sqrt[n]{a_n} \geq 1$, *bármely* $n > n_0$ *esetén, akkor a* $\sum\limits_{n\geq 1} a_n$ *sor divergens.*

Bizonyítás. a) Mivel $a_n \leq q^n$, $n > n_0$ és $\sum\limits_{n\geq 1} q^n$ konvergens $q \in]0,1[$ esetben, ezért a 7. Tétel alapján $\sum\limits_{n\geq 1} a_n$ konvergens.

b) Mivel $a_n \geq 1$, ha $n > n_0$, ezért az (a_n) sorozat nem tart nullához. Így az 1. Tulajdonság szerint a $\sum\limits_{n\geq 1} a_n$ sor divergens. □

12. Következmény. *Ha* $\sum\limits_{n\geq 1} a_n$ *pozitív tagú sor és létezik a* $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = l$ *határérték, akkor*

a) *a sor konvergnes, ha* $l < 1$;

b) *a sor divergens, ha* $l > 1$;

c) *a kritérium nem alkalmazható, ha* $l = 1$.

Bizonyítás. Az állítás a) és b) pontjait a 10. Következményhez hasonlóan igazoljuk. A c) esetben a $\sum\limits_{n\geq 1} \frac{1}{n^\alpha}$, $\alpha \in \mathbb{R}$ harmonikus sort tekintjük, amely konvergens $\alpha > 1$ esetén és divergens $\alpha \leq 1$ esetén. Viszont

$\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n^\alpha}} = 1$, tehát a kritérium nem alkalmazható az $l = 1$ esetben. $\square$

13. Tétel. *(Raabe-Duhamel-féle kritérium). Tekintsük a* $\sum\limits_{n\geq 1} a_n$ *pozitív tagú sort.*

a) *Ha létezik* $q \in]1, \infty[$ *és* $n_0 \in \mathbb{N}$ *úgy, hogy* $n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) \geq q$, *bármely* $n > n_0$ *esetén, akkor a* $\sum\limits_{n\geq 1} a_n$ *sor konvergens*

b) *Ha létezik* $n_0 \in \mathbb{N}$ *úgy, hogy* $n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) \leq 1$, *bármely* $n > n_0$ *esetén, akkor a* $\sum\limits_{n\geq 1} a_n$ *sor divergens.*

Bizonyítás. a) Mivel $q \in]1, \infty[$, ezért legyen $d := q - 1 > 0$. Az adott egyenlőtlenséget írjuk fel más alakban:

$$na_n - na_{n+1} \geq (1+d)a_{n+1} \quad \text{vagy} \quad a_{n+1} \leq \frac{1}{d}[na_n - (n+1)a_{n+1}].$$

Innen

$$a_{n_0+2} \leq \frac{1}{d}[(n_0+1)a_{n_0+1} - (n_0+2)a_{n_0+2}], \ldots, a_n \leq \frac{1}{d}[(n-1)a_{n-1} - na_n];$$

a kapott egyenlőtlenségeket összegezve:

$$a_{n_0+2} + \ldots + a_n \leq \frac{1}{d}[(n_0+1)a_{n_0+1} - na_n] \leq \frac{n_0+1}{d} \cdot a_{n_0+1}$$

vagy

$$s_n = a_1 + \ldots + a_n \leq a_1 + \ldots + a_{n_0+1} + \frac{n_0+1}{d} \cdot a_{n_0+1}.$$

Így az (s_n) részletösszeg sorozat felülről korlátos. Ekkor a 6. Tulajdonság alapján $\sum\limits_{n\geq 1} a_n$ konvergens.

b) Ebben az esetben $na_n - (n+1)a_{n+1} \leq 0$ vagy $na_n \leq (n+1)a_{n+1}$, ahonnan következik, hogy $(na_n)_{n>n_0}$ növekvő sorozat. Így $(n_0+$

$1)a_{n_0+1} \le na_n$ vagy $a_n \ge (n_0+1)a_{n_0+1} \cdot \frac{1}{n}$, ha $n > n_0$. Viszont a $\sum\limits_{n\ge 1} \frac{1}{n}$ harmonikus sor divergens (1. Példa), ezért a 7. Tétel szerint a $\sum\limits_{n\ge 1} a_n$ sor is divergens. $\square$

14. Következmény. *Ha* $\sum\limits_{n\ge 1} a_n$ *pozitív tagú sor és létezik a*

$$\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) = l$$

határérték, akkor

a) *a sor konvergens, ha* $l > 1$;

b) *a sor divergens, ha* $l < 1$;

c) *a kritérium nem alkalmazható, ha* $l = 1$.

Bizonyítás. a) A feltétel alapján bármely $\varepsilon > 0$ számnak megfelel $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ úgy, hogy minden $n > n_\varepsilon$ esetén

$$l - \varepsilon < n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) < l + \varepsilon.$$

Mivel $l > 1$, ezért megválasztható $\varepsilon > 0$ úgy, hogy $0 < \varepsilon < l - 1$. Így $q := l - \varepsilon > 1$ és $n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) > q$, ha $n > n_\varepsilon$. Következésképpen a $\sum\limits_{n\ge 1} a_n$ sor konvergens a 13. Tétel, a) pontja alapján.

b) Ha $l < 1$, akkor az ε-t úgy választjuk meg, hogy $0 < \varepsilon < 1 - l$. Ekkor $l + \varepsilon < 1$, ezért $n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) < 1$, ha $n > n_0$, ami a 13. Tétel, b) pontja szerint azt jelenti, hogy $\sum\limits_{n\ge 1} a_n$ divergens.

c) Tekintsük a $\sum\limits_{n\ge 3} a_n$ sort, ahol $a_n = \alpha_3 \cdot \ldots \cdot \alpha_n$ és

$$\alpha_n = 1 - \frac{1}{n} - \frac{2}{n \ln n}.$$

Azonnal látható, hogy $\lim\limits_{n\to\infty} n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right) = 1$. Igazoljuk, hogy $\sum\limits_{n\geq 3} a_n$ konvergens. Valóban, mivel

$$\lim_{n\to\infty}\left[n\left(\frac{a_{n+1}}{a_n}-1\right)+1\right]\ln n = -2,$$

ezért létezik $n_0\in\mathbb{N}$ úgy, hogy bármely $n>n_0$ esetén

$$\left[n\left(\frac{a_{n+1}}{a_n}-1\right)+1\right]\ln n < -\frac{3}{2}$$

(az $\varepsilon = \frac{1}{2}$-del). Innen

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}\cdot n\ln n-(n-1)\ln n < -\frac{3}{2}$$

vagy

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}\cdot n\ln n-(n-1)\ln(n-1) < -\frac{3}{2}+(n-1)\ln n-(n-1)\ln(n-1)$$

vagy

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}\cdot n\ln n-(n-1)\ln(n-1) < -\frac{3}{2}+\ln\left(\frac{n}{n-1}\right)^{n-1}.$$

Következik, hogy

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}\cdot n\ln n-(n-1)\cdot\ln(n-1) < -\frac{1}{2}$$

vagy

$$a_n\cdot(n-1)\ln(n-1)-a_{n+1}\cdot n\ln n > \frac{1}{2}a_n > 0, \qquad (2.2.1)$$

ha $n > n_0$. Mivel

$$\sum_{k=n_0+1}^{n} (a_k \cdot (k-1)\ln(k-1) - a_{k+1} \cdot k \ln k) =$$
$$= a_{n_0+1} \cdot n_0 \ln n_0 - \ a_{n+1} \cdot n \ln n < a_{n_0+1} \cdot n_0 \ln n_0,$$

ezért a

$$\sum_{n>n_0} (a_n \cdot (n-1)\ln(n-1) - a_{n+1} \cdot n \ln n)$$

sor konvergens. A (2.2.1) és a 7. Tétel alapján $\sum\limits_{n>n_0} \frac{1}{2} a_n$ konvergens, tehát a $\sum\limits_{n>n_0} a_n$ sor is konvergens. A 3. Következmény biztosítja, hogy $\sum\limits_{n\geq 3} a_n$ konvergens.

Ugyanakkor $\sum\limits_{n\geq 1} \frac{1}{n}$ divergens és $\lim\limits_{n\to\infty} n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) = 1$, ahol $a_n = \frac{1}{n}$. Tehát a kritérium nem alkalmazható az $l = 1$ esetben. □

Bolyai Farkas tudományos tevékenységének legfigyelemreméltóbb terméke a kétkötetes, latin nyelvű *Tentamen*. Ennek kiegészítésében található a pozitív tagú végtelen sorokra vonatkozó következő megjegyzése: jelölje az $\frac{n-m}{n}$ alakú tört azt a tényezőt, amellyel a sor a_{n-1}-edik tagját szoroznunk kell, hogy szorzatként a_n-et kapjunk. Vagyis $a_{n-1} \cdot \frac{n-m}{n} = a_n$. Innen $m = n - n \cdot \frac{a_n}{a_{n-1}}$. Bolyai Farkas szerint:

1) ha $m \geq k > 1$, akkor a sor konvergens;

2) ha $m \leq 1$, akkor a sor divergens; $m > 1$, de $\lim\limits_{n\to\infty} m = 1$ esetén a sor viselkedéséről semmit sem mondhatunk.

Ha kissé más alakra hozzuk a Bolyai-féle kritériumot, akkor az pontosan megegyezik a Raabe-Duhamel-féle kritériummal. Kétségtelen, hogy Bolyai Farkas mindenkitől függetlenül találta eredményét.

9. Példa. Tanulmányozzuk a

$$\sum_{n\geq 1} \frac{n!}{(x+1)(x+2)\dots(x+n)}, \quad x > -1$$

sor természetét.

A 14. Következményt alkalmazzuk:

$$a_n = \frac{n!}{(x+1)(x+2)\dots(x+n)}$$

és

$$\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{nx}{n+1} = x.$$

Így, ha $x > 1$, akkor a $\sum\limits_{n\geq 1} a_n$ sor konvergens; ha $x < 1$, akkor $\sum\limits_{n\geq 1} a_n$ divergens. Ha $x = 1$, akkor $\sum\limits_{n\geq 1} a_n = \sum\limits_{n\geq 1} \frac{1}{n+1}$ divergens sor (lásd az 1. Példát).

2.3. Műveletek számsorokkal

5. Értelmezés. *A* $\sum\limits_{n\geq 1} a_n$ *sor* ***abszolút konvergens****, ha a* $\sum\limits_{n\geq 1} |a_n|$ *sor konvergens. A* $\sum\limits_{n\geq 1} a_n$ *sor* ***feltételesen konvergens****, ha* $\sum\limits_{n\geq 1} a_n$ *konvergens, de nem abszolút konvergens.*

10. Példa. A $\sum\limits_{n\geq 1} (-1)^{n-1} \cdot \frac{1}{n}$ sor feltételesen konvergens a 4. Példa és az 1. Példa alapján.

15. Tétel. *Minden abszolút konvergens sor konvergens.*

Bizonyítás. Mivel $\sum\limits_{n\geq 1} |a_n|$ konvergens, ezért a 2. Tétel alapján bármely $\varepsilon > 0$ esetén létezik $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ úgy, hogy minden $n > n_\varepsilon$ és $p \in \mathbb{N}$ esetén $|a_{n+1}| + \ldots + |a_{n+p}| < \varepsilon$. Mivel $|a_{n+1} + \ldots + a_{n+p}| \leq |a_{n+1}| + \ldots + |a_{n+p}|$, ezért bármely $\varepsilon > 0$ számhoz létezik $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ úgy, hogy minden $n > n_\varepsilon$ és $p \in \mathbb{N}$ esetén $|a_{n+1} + \ldots + a_{n+p}| < \varepsilon$, ami a 2. Tétel alapján azt jelenti, hogy $\sum\limits_{n\geq 1} a_n$ konvergens. $\square$

16. Tétel. *(Weierstrass). Adottak a* $\sum\limits_{n\geq 1} a_n$ *és* $\sum\limits_{n\geq 1} b_n$ *sorok. Ha létezik*

$n_0 \in \mathbb{N}$ úgy, hogy $|a_n| \leq b_n$, bármely $n > n_0$ esetén és $\sum\limits_{n\geq 1} b_n$ konvergens, akkor $\sum\limits_{n\geq 1} a_n$ abszolút konvergens.

Bizonyítás. A 7. Tétel és a 3. Következmény alapján azonnali az állítás. □

A számsorok összegének a kiszámítása úgy fogható fel, mint véges számú valós szám összeadásának általánosítása. Ismerve az összeadás tulajdonságait (asszociativítás és kommutativítás), természetesen vetődik fel a kérdés: milyen tulajdonságai vannak ennek az általánosított műveletnek?

6. Értelmezés. *Legyen $k_1 < k_2 < \ldots < k_n < \ldots$ a természetes számok tetszőleges részsorozata és $\sum\limits_{n\geq 1} a_n$ adott számsor. A*

$$(a_1 + \ldots + a_{k_1}) + (a_{k_1+1} + \ldots + a_{k_2}) + \ldots + (a_{k_n+1} + \ldots + a_{k_{n+1})} + \ldots$$

*sort az adott sor **átcsoportosított sorának** nevezzük.*

11. Példa. A $\sum\limits_{n\geq 1} (-1)^{n-1}$ sor divergens, de a $(1-1)+(1-1)+\ldots$ átcsoportosított sor konvergens.

17. Tulajdonság. *Ha a $\sum\limits_{n\geq 1} a_n$ sornak van összege, akkor bármely átcsoportosított sorának ugyanaz az összege.*

Bizonyítás. Az állítás következik abból, hogy az átcsoportosított sor részlet-összeg sorozata az adott sor részletösszeg sorozatának egy részsorozata. □

7. Értelmezés. *Legyen $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ tetszőleges bijektív függvény és $\sum\limits_{n\geq 1} a_n$ adott sor. A $\sum\limits_{n\geq 1} a_{\sigma(n)}$ sort az adott sor **átrendezett sorának** nevezzük.*

18. Tétel. *Abszolút konvergens sor bármely átrendezett sora ugyanazon öszszegű abszolút konvergens sor.*

Bizonyítás. Legyen $\sum\limits_{n\geq 1} a_n$ abszolút konvergens sor, amelynek összege s. Je-lölje (s_n) és (s'_n) a $\sum\limits_{n\geq 1} a_n$ illetve a $\sum\limits_{n\geq 1} a_{\sigma(n)}$ sorok részletösszeg sorozatait. A 2.Tétel alapján tetszőleges $\varepsilon > 0$ számhoz létezik $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ úgy, hogy bármely $m > n > n_\varepsilon$ esetén

$$|a_{n+1}| + \ldots + |a_m| < \frac{\varepsilon}{2} \tag{2.3.1}$$

és

$$|s_{n_\varepsilon+1} - s| < \frac{\varepsilon}{2} \tag{2.3.2}$$

Legyen $m_\varepsilon \in \mathbb{N}$ olyan nagy, hogy bármely $m > m_\varepsilon$ esetén az s'_m tartalmazza az $a_1, \ldots, a_{n_\varepsilon+1}$ tagokat és jelölje $a_{n_\varepsilon+1+k_1}, \ldots, a_{n_\varepsilon+1+k_m}$ az s'_m többi tagját. A (2.3.1) miatt

$$|a_{n_\varepsilon+1+k_1} + \ldots + a_{n_\varepsilon+1+k_m}| \leq |a_{n_\varepsilon+1+k_1}| + \ldots + |a_{n_\varepsilon+1+k_m}| < \frac{\varepsilon}{2},$$

tehát

$$|s'_m - s_{n_\varepsilon+1}| < \frac{\varepsilon}{2}, \tag{2.3.3}$$

bármely $m > m_\varepsilon$ esetén. Így a (2.3.2) és (2.3.3) alapján

$$|s'_m - s| \leq |s'_m - s_{n_\varepsilon+1}| + |s_{n_\varepsilon+1} - s| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

ha $m > \max\{n_\varepsilon, m_\varepsilon\}$. Ez viszont azt jelenti, hogy $\lim\limits_{m\to\infty} s'_m = s$, tehát az átrendezett sor is ugyanazon összegű abszolút konvergens sor. □

Észrevehető, hogy a 17. Tulajdonság a sorok asszociativítására, míg a 18. Tétel a sorok kommutativítására vonatkozik.

A 18. Tétel nem teljesül, ha a sor nem abszolút konvergens, amint azt a következő példa mutatja:

12. Példa. Tekintsük a $\sum\limits_{n\geq 1} (-1)^{n-1} \cdot \frac{1}{n}$ feltételesen konvergens sor következő átrendezett sorát:

$$1-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{3}-\frac{1}{6}-\frac{1}{8}+\ldots+\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{4n-2}-\frac{1}{4n}+\ldots$$

(lásd a 10. Példát). Jelölje s a $\sum\limits_{n\geq 1}(-1)^{n-1}\cdot\frac{1}{n}$ sor összegét. Az átrendezett sor részletösszeg sorozatának a következő részsorozatait írhatjuk fel:

$$\begin{aligned}
s'_{3n} &= \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{4k-2}-\frac{1}{4k}\right)=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{4k-2}-\frac{1}{4k}\right)= \\
&= \frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n}\right)=\frac{1}{2}s_n; \\
s'_{3n+1} &= s'_{3n}+\frac{1}{2n+1} \qquad \text{és} \\
s'_{3n+2} &= s'_{3n}+\frac{1}{2n+1}-\frac{1}{4n+2}.
\end{aligned}$$

Következésképp

$$\lim_{n\to\infty} s'_{3n}=\lim_{n\to\infty} s'_{3n+1}=\lim_{n\to\infty} s'_{3n+2},$$

tehát az átrendezett sor konvergens és összege $\frac{1}{2}s$.

19. Tétel. *(Riemann). Bármely csak feltételesen konvergens sor átrendezhető úgy, hogy az összege tetszőlegesen előre megadott érték legyen az $\overline{\mathbb{R}}$ halmazból.*

Bizonyítás. Legyen $\sum\limits_{n\geq 1} a_n$ feltételesen konvergens sor, és $a\in\mathbb{R}$ tetszőleges. Jelölje $p_n:=\frac{1}{2}(|a_n|+a_n)$ és $q_n:=\frac{1}{2}(|a_n|-a_n)$, $n\geq 1$. Mivel $\sum\limits_{n\geq 1} a_n$ konvergens, $\sum\limits_{n\geq 1}|a_n|$ divergens, és $p_n-q_n=a_n$, $p_n+q_n=|a_n|$, ezért $\sum\limits_{n\geq 1} p_n$ és $\sum\limits_{n\geq 1} q_n$ divergens sorok.

Legyen $P_1,P_2,\ldots$ és $Q_1,Q_2,\ldots$ a $\sum\limits_{n\geq 1} a_n$ sor pozitív illetve negatív tagjainak abszolút értékei. Nyilván a (P_n) és (Q_n) sorozatoknak végtelen sok zérótól különböző tagja van, mert ellenkező esetben a

$\sum\limits_{n\geq 1} a_n$ sor abszolút konvergens lenne. A $\sum\limits_{n\geq 1} P_n$ és $\sum\limits_{n\geq 1} Q_n$ sorok a $\sum\limits_{n\geq 1} p_n$ és $\sum\limits_{n\geq 1} q_n$ soroktól csak a nullával egyenlő tagokban különböznek, tehát divergensek. Vegyük az indexek növekvő sorrendje szerint a $\sum\limits_{n\geq 1} P_n$ sor annyi minimális számú tagját, hogy a tagok S_{m_1} összege nagyobb legyen mint a. A kapott összegből vonjuk le a $\sum\limits_{n\geq 1} Q_n$ sor annyi minimális számú tagját, hogy az S_{m_2} új összeg kisebb legyen mint a. Az eljárást folytatva, az (S_{m_r}) sorozathoz és a $\sum\limits_{n\geq 1} a_n$ sornak egy $\sum\limits_{n\geq 1} a_{\sigma(n)}$ átrendezett sorához jutunk. (S_{m_r}) az átrendezett sor részletösszeg sorozatának egy részsorozata, amely konvergens és határértéke a, ugyanis, ha r páratlan, akkor $S_{m_r} - a$ kisebb mint az S_{m_r} összeg utolsó pozitív tagja, ha pedig r páros, akkor az $a - S_{m_r}$ kisebb mint az S_{m_r} utolsó tagjának abszolút értéke. Mivel a $\sum\limits_{n\geq 1} a_n$ sor általános tagja tart zéróhoz, ezért valóban S_{m_r} tart a-hoz. Az átrendezett sor (S_m) részletösszeg sorozata is tart az a-hoz, mert minden m-re S_m közre fogható az (S_{m_r}) két olyan tagja által, ahol az egyik r index páros, míg a másik r index páratlan.

Ha $a = +\infty$, akkor a $\sum\limits_{n\geq 1} P_n$ sorból vegyünk az elsővel kezdve annyi tagot, hogy összegük meghaladja az 1-et, majd ebből az összegből vonjuk le a $\sum\limits_{n\geq 1} Q_n$ sor első tagját. Az így kapott összeghez adjuk hozzá a $\sum\limits_{n\geq 1} P_n$ sor megmaradt tagjai közül sorrendben annyit, hogy az új összeg nagyobb legyen mint 2, és ebből vonjuk le a $\sum\limits_{n\geq 1} Q_n$ sor második tagját stb. Könnyen belátható, hogy a $\sum\limits_{n\geq 1} a_n$ sor ezen átrendezett sorának az összege $+\infty$.

Hasonló módon járunk el, ha $a = -\infty$. □

8. Értelmezés. *Ha* $\sum\limits_{n\geq 1} a_n$ *és* $\sum\limits_{n\geq 1} b_n$ *adott számsorok, akkor ezek* ***Cauchy-féle szorzata*** *alatt azt a* $\sum\limits_{n\geq 1} c_n$ *sort értjük, ahol*

$$c_n = a_1 b_n + a_2 b_{n-1} + \ldots + a_n b_1.$$

13. Példa. Számítsuk ki a $\sum\limits_{n\geq 1}(-1)^{n-1}\cdot\frac{1}{\sqrt{n}}$ sor önmagával képzett Cauchy-féle szorzatát.

Ha $a_n = b_n = (-1)^{n-1}\cdot\frac{1}{\sqrt{n}}$, $n\geq 1$, akkor a 8. Értelmezés szerint $\sum\limits_{n\geq 1} c_n$ az a sor, ahol

$$c_n = (-1)^{n-1}\cdot\left[\frac{1}{\sqrt{n}\sqrt{1}}+\frac{1}{\sqrt{n-1}\sqrt{2}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{1}\sqrt{n}}\right].$$

Mivel

$$|c_n| \geq \frac{1}{\sqrt{n}\sqrt{n}}+\frac{1}{\sqrt{n}\sqrt{n}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n}\sqrt{n}} = 1,$$

ezért a $\sum\limits_{n\geq 1} c_n$ sor általános tagja nem tarthat nullához, tehát divergens (lásd 1. Tulajdonság). Viszont a Leibniz-kritérium alapján (4. Tétel) a $\sum\limits_{n\geq 1} a_n$ sor konvergens. Így két konvergens sor Cauchy-féle szorzata nem feltétlenül konvergens.

20. Tétel. *(Cauchy). Adottak a $\sum\limits_{n\geq 1} a_n$ és $\sum\limits_{n\geq 1} b_n$ abszolút konvergens sorok, amelyek összegei s és t. Ekkor a $\sum\limits_{n\geq 1} c_n$ Cauchy-féle szorzatuk is abszolút konvergens és összege st.*

Bizonyítás. Vegyük észre, hogy az a_ib_j alakú tagok bármely $\mathcal{S}$ véges összege esetén létezik $n_0\in\mathbb{N}$ úgy, hogy az $s_{n_0} = a_1+\ldots+a_{n_0}$ és $t_{n_0} = b_1+\ldots+b_{n_0}$ összegek szorzata tartalmazza az $\mathcal{S}$ minden tagját. Ekkor

$$\begin{aligned}
|\mathcal{S}| &\leq \sum |a_ib_j| \leq \sum_{1\leq i,j\leq n_0} |a_ib_j| = \sum_{1\leq i,j\leq n_0} |a_i|\cdot|b_j| = \\
&= \left(\sum_{i=1}^{n_0}|a_i|\right)\cdot\left(\sum_{j=1}^{n_0}|b_j|\right) \leq \left(\sum_{i\geq 1}|a_i|\right)\cdot\left(\sum_{j\geq 1}|b_j|\right).
\end{aligned}$$

Következésképp a $\sum\limits_{n\geq 1}|c_n|$ sor minden részletösszege korlátos, tehát a 6. Tulajdonság miatt $\sum\limits_{n\geq 1}|c_n|$ konvergens, vagyis $\sum\limits_{n\geq 1} c_n$ abszolút konvergens. Alkalmazva a 18. Tételt következik, hogy a $\sum\limits_{n\geq 1} c_n$ sor jól meghatározott, a tagok sorrendjétől függetlenül. Sajátos esetben a szorzatsor összege megadható, mint $\lim\limits_{n\to\infty} s_n t_n = st$. □

14. Példa. Mivel a $\sum\limits_{n\geq 1} q^{n-1}$ sor abszolút konvergens, ha $|q| < 1$ és a sor összege $\frac{1}{1-q}$, ezért a 20. Tétel szerint

$$\frac{1}{(1-q)^2} = \left(\sum_{n\geq 1} q^{n-1}\right) \cdot \left(\sum_{n\geq 1} q^{n-1}\right) = 1 + 2q + 3q^2 + \ldots + nq^{n-1} + \ldots,$$

ahol $|q| < 1$.

21. Tétel. *(Mertens). Ha a $\sum\limits_{n\geq 1} a_n$ és $\sum\limits_{n\geq 1} b_n$ sorok konvergensek, összegeik s és t, és legalább az egyik abszolút konvergens, akkor a két sor Cauchy-féle $\sum\limits_{n\geq 1} c_n$ szorzata szintén konvergens és összege st.*

Bizonyítás. Legyen $s_n = a_1 + \ldots + a_n$, $t_n = b_1 + \ldots + b_n$, $u_n = c_1 + \ldots + c_n$, ahol $c_n = a_1 b_n + \ldots + a_n b_1$. Feltételezzük, hogy $\sum\limits_{n\geq 1} b_n$ abszolút konvergens. Ekkor

$$\begin{aligned} u_n &= a_1b_1 + (a_1b_2 + a_2b_1) + \ldots + (a_1b_n + \ldots + a_nb_1) = \\ &= b_na_1 + b_{n-1}(a_1 + a_2) + \ldots + b_1(a_1 + \ldots + a_n) = \\ &= s_1b_n + s_2b_{n-1} + \ldots + s_nb_1 = \\ &= (s_1 - s)b_n + (s_2 - s)b_{n-1} + \ldots + (s_n - s)b_1 + s(b_1 + \ldots + b_n) = \\ &= (s_1 - s)b_n + \ldots + (s_n - s)b_1 + st_n \end{aligned} \tag{2.3.4}$$

Mivel $\lim\limits_{n\to\infty}(s_n - s) = 0$ és $\sum\limits_{n\geq 1} |b_n|$ konvergens, ezért (lásd a 2. Tételt is) bármely $\varepsilon > 0$ számhoz létezik $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ úgy, hogy minden $m > n > n_\varepsilon$ esetén $|s_n - s| < \varepsilon$ és $|b_{n_\varepsilon+2}| + \ldots + |b_m| < \varepsilon$. Áttérve határértékre m szerint, $|b_{n_\varepsilon+2}| + |b_{n_\varepsilon+3}| + \ldots \leq \varepsilon$.

Jelölje $M := \sup\{|s_n - s| : n \in \mathbb{N}\}$ és legyen $n > 2n_\varepsilon + 2$. Ekkor

$n - n_\varepsilon > n_\varepsilon + 2$, ezért

$$\begin{aligned}
&|(s_1 - s)b_n + \ldots + (s_{n_\varepsilon+1} - s)b_{n-n_\varepsilon} + (s_{n_\varepsilon+2} - s)b_{n-n_\varepsilon-1} + \\
&\qquad + \ldots + (s_n - s)b_1| \leq \\
&\leq M \sum_{k=n-n_\varepsilon}^{n} |b_k| + \varepsilon \sum_{k=1}^{n-n_\varepsilon-1} |b_k| \leq \\
&\leq M \sum_{k=n_\varepsilon+2}^{\infty} |b_k| + \varepsilon \sum_{k=1}^{\infty} |b_k| \leq \varepsilon \left(M + \sum_{n\geq 1} |b_n| \right),
\end{aligned}$$

ami azt jelenti, hogy

$$\lim_{n\to\infty} ((s_1 - s)b_n + \ldots + (s_n - s)b_1) = 0.$$

Innen és (2.3.4) alapján $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \lim\limits_{n\to\infty} (st_n) = st$, amit igazolni kellett. □

22. Tétel. *(Abel) Adottak a* $\sum\limits_{n\geq 1} a_n$ *és* $\sum\limits_{n\geq 1} b_n$ *konvergens sorok, összegeik* s *és* t*. Ha* $\sum\limits_{n\geq 1} c_n$ *konvergens, akkor a sor összege* st*.*

Bizonyítás. Itt is a 21. Tétel bizonyítása során használt jelöléseket alkalmazzuk. Legyen $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = u$. Ekkor bármely $\varepsilon > 0$ számhoz létezik $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ úgy, hogy minden $n > n_\varepsilon$ esetén $|u_n - u| < \frac{\varepsilon}{2}$. Így

$$\begin{aligned}
&\left| \frac{u_1 + \ldots + u_n}{n} - u \right| \leq \\
&\leq \frac{1}{n}|u_1 - u| + \ldots + \frac{1}{n}|u_{n_\varepsilon} - u| + \frac{1}{n}|u_{n_\varepsilon+1} - u| + \ldots + \frac{1}{n}|u_n - u| \leq \\
&\leq \frac{1}{n}|u_1 - u| + \ldots + \frac{1}{n}|u_{n_\varepsilon} - u| + \frac{n - n_\varepsilon}{n} \cdot \frac{\varepsilon}{2} < \\
&< \frac{1}{n}(|u_1 - u| + \ldots + |u_{n_\varepsilon} - u|) + \frac{\varepsilon}{2}.
\end{aligned}$$

Viszont

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}(|u_1 - u| + \ldots + |u_{n_\varepsilon} - u|) = 0,$$

ezért létezik $n'_\varepsilon \in \mathbb{N}$ úgy, hogy $n > n'_\varepsilon$ esetén

$$\frac{1}{n}(|u_1 - u| + \ldots + |u_{n_\varepsilon} - u|) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Így $n > \max\{n_\varepsilon, n'_\varepsilon\}$ esetén

$$\left|\frac{u_1 + \ldots + u_n}{n} - u\right| < \varepsilon,$$

vagyis

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_1 + \ldots + u_n}{n} = u. \tag{2.3.5}$$

Továbbá, az $u_n = s_1 b_n + \ldots + s_n b_1$ alapján írható (lásd a (2.3.4) egyenlőségeket), hogy

$$\begin{aligned} u_1 + \ldots + u_n &= s_1 b_1 + \ldots + (s_1 b_n + \ldots + s_n b_1) = \\ &= s_1(b_1 + \ldots + b_n) + s_2(b_1 + \ldots + b_{n-1}) + \ldots + s_n b_1 = \\ &= s_n t_1 + s_{n-1} t_2 + \ldots + s_1 t_n. \end{aligned}$$

Innen

$$\begin{aligned} \frac{u_1 + \ldots + u_n}{n} &= \frac{s_n t_1 + \ldots + s_1 t_n}{n} = \\ &= \frac{(s_n - s)t_1 + \ldots + (s_1 - s)t_n}{n} + s \cdot \frac{t_1 + \ldots + t_n}{n} \end{aligned} \tag{2.3.6}$$

Hasonlóan a (2.3.5) egyenlőséghez bizonyítható, hogy

$$\lim_{n\to\infty} \frac{t_1 + \ldots + t_n}{n} = t, \tag{2.3.7}$$

mert $\lim\limits_{n\to\infty} t_n = t$. Ezért elegendő azt igazolni, hogy

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(s_n - s)t_1 + \ldots + (s_1 - s)t_n}{n} = 0,$$

ami a (2.3.5), (2.3.6) és (2.3.7) alapján azt jelenti, hogy $u = st$.

Mivel $\lim\limits_{n\to\infty} |s_n - s| = 0$, ezért a (2.3.5) egyenlőséghez hasonlóan igazolható, hogy

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|s_1 - s| + \ldots + |s_n - s|}{n} = 0. \tag{2.3.8}$$

Másrészt, a $\sum\limits_{n\geq 1} b_n$ sor konvergens, tehát a (t_n) sorozat korlátos, vagyis létezik $M > 0$ úgy, hogy $|t_n| \leq M$, bármely n-re. Így

$$\left|\frac{(s_n - s)t_1 + \ldots + (s_1 - s)t_n}{n}\right| \leq M \cdot \frac{|s_1 - s| + \ldots + |s_n - s|}{n},$$

ahonnan a (2.3.8) szerint a

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(s_n - s)t_1 + \ldots + (s_1 - s)t_n}{n} = 0$$

is teljesül. □

3. fejezet

Valós változós valós függvények differenciálszámítása

3.1. A végtelen kicsiny mennyiségek analízise

A XVII. század matematikájában a legnagyobb eredmény kétségtelenül a differenciál- és integrálszámítás felfedezése volt. A differenciál- és integrál-számítást I. Newton és G.W. Leibniz, valamint legközelebbi munkatársaik és tanítványaik fogalmazták meg műveikben. Nagy jelentőségű átalakulás kezdetét jelentette az, hogy a matematikában megjelentek az infinitezimális mennyiségek analízisének módszerei. Ennek létrejötte hosszú folyamat, ame-
lynek lényege a matematikán belül a differenciál- és integrálszámítás, valamint a sorelmélet elemeinek felhalmozódása és elhatárolódása volt. Elsősorban a mechanika, az asztronómia és a fizika szükségletei voltak e folyamat indítóokai. Ezek a tudományok nemcsak bizonyos feladatok meg-oldásának következményét állították a matematika elé, de

a függvénykapcsolat lényegéről és megjelenési formáiról alkotott elképzeléseket is gazdagították. Az infinitezimális módszereket, a változó mennyiségek matematikájának alapjait a matematika és a rokontudományok szoros kölcsönhatása alapján dolgozták ki.

A XVII. sz. matematikájában kialakultak az elégséges feltételek a végtelen kicsiny mennyiségekkel való számolás megalkotásához. Ezek a feltételek a következők: az algebra kialakulása és a számítási technika fejlődése; a változó mennyiségek és a koordináta-módszer bevezetése; az ókoriak, de különösen Arkhimédész infinitezimális gondolatainak elsajátítása; kvadratúra, kubatúra kiszámítására, továbbá súlypont, érintő, szélsőérték stb. meghatározására vonatkozó feladatok megoldási módszereinek felhalmozódása. Ilyen természetű feladatok megoldásában, a megoldás általános módszereinek keresésében, tehát végeredményben az infinitezimális analízis létrehozásában sok tudós működött közre, köztük J. Kepler, G. Galilei, B. Cavalieri, E. Torricelli, B. Pascal, J. Wallis, P. Fermat, R. Descartes, I. Barrow és még sokan mások. A matematikai analízis elemeinek kialakítása számos tudós sokoldalú alkotó munkájának eredménye.

Az analízis legkorábbi formája a fluxióelmélet volt, amelyet Newton fedezett fel. A matematika Newton tudományos világszemléletében a természettel foglalkozó általános tudományok – a természetfilozófiának – részeként és a fizikai kutatások eszközeként jelentkezett. Newton a mechanika matematikai apparátusaként dolgozta ki módszerét, amely figyelembe vette a mozgást, és megragadta a sebesség és gyorsulás fogalmát. Ezt a módszert a fluxiók módszerének, illetve elméletének nevezte.

A fluxióelmélet a folytonos mechanikai mozgások különböző absztrakciójaként bevezetett változó mennyiségeket tanulmányozza. Ezeket Newton fluenseknek nevezi. Minden fluens függ egy általános változótól, az időtől, amely absztrakt, egyenletesen folyó, független mennyiség. Ez nem okoz bonyodalmat, mivel a feladatokban szereplő változók összefüggését nem zavarja. A továbbiakban bevezeti a fluens folyásának sebességét, vagyis az idő szerinti deriváltját, amelyet fluxiónak nevez. Mivel a fluxió maga is változó, ezért lehet beszélni a fluxió fluxiójáról, stb. Ha a fluenst y jelöli, akkor az első, második stb. fluxió jelölése: $\dot{y}, \ddot{y}, \dddot{y}$ stb. A pillanatnyi sebességek, vagyis a fluxiók kiszámításához a fluensek végtelen kicsinnyel való megváltoztatására van szükség, ezeket momentumoknak nevezi Newton. Az idő momentumának jele **o**; így az y fluens momentuma oy lesz. Ezek szerint a pillanatnyi sebességnek az idő momentumával való szorzata adja a fluens momentumát. Lényegét tekintve a fluens momentuma nem más, mint a fluens differenciálja. Newton szimbólikája nem olyan kényelmes, mint a differenciálás Leibniz által bevezetett és napjainkban általánosan elterjedt szimbólikája. Azonban a Newton-féle jelölés is fennmaradt, például a mechanikában.

A fluxióelméletben két fő feladat megoldása merül fel, amelyeket Newton mind mechanikai, mind matematikai terminológiával megfogalmaz:

1) Meghatározandó a mozgás sebessége egy adott időpillanatban, ha adott az út. Más szóval: meghatározandó a fluxiók közötti összefüggés, ha adott a fluensek összefüggése;

2) Meghatározandó az adott időpillanatig befutott út, ha ismeretes a mozgás sebessége. Matematikai terminológiával: meghatározandó a fluensek közötti összefüggés, ha adott a fluxiók összefüggése.

Az első feladat, a fluxióelmélet úgynevezett egyenes feladata, általában implicit függvények differenciálását és a természet elemi törvényszerűségeit kifejező differenciálegyenletek előállítását jelenti. A második pedig – a fluxióelmélet fordított feladata – a legáltalánosabb alakú differenciálegyenletek integrálásával ekvivalens. Az utóbbi feladat speciális eseteiben a primitív függvények előállításáról van szó. Így az integrál, a fluxióelméletben először, határozatlan integrál alakjában jelenik meg.

Az egyenes feladat megoldására Newton egységes szabályt vezetett be – a függvények differenciálási algoritmusát, amely során alkalmazta a róla elnevezett binomiális tételt és a függvények hatványsor előállítását. Az a függvényosztály, amelyet Newton vizsgált, még aránylag korlátozott volt, ezen belül a függvények hatványsor előállításával nem merült fel kétség. A fluxióelmélet fordított feladata, amely szerint meghatározandó a fluensek közötti összefüggés a fluxiók közötti ismert összefüggésből, ebben a megfogalmazásban rendkívül általános. Fokozatosan alakult ki az a módszer, amellyel Newton az ennyire általános problémák megoldását és a megoldás eszközeit megragadta. Mindenekelőtt, a fluxiók meghatározásával elért eredmények egyszerű megfordítása révén igen sok kvadratúrához jutott, amelyek segítségével megállapította, hogy ez a megfordítás csak egy additív konstans erejéig egyértelmű. Amikor az egyenes módszer közvetlen megfordítása nem vezetett sikerre, Newton a fluxióelmélet univerzális módszeréhez, a függvények hatványsorba fejtéséhez folyamodott. A függvények hatványsorba fejtéséhez Newton a következőket használta a leggyakrabban:

a) az $(a+b)^n = \sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$ binomiális tételnek általánosítását tört és negatív hatványkitevő esetére;

b) a racionális törtfüggvény számlálójának a nevezővel való elosztását;

c) a határozatlan együtthatók módszerének különféle formáit;

d) a változók helyettesítését, valamint a koordinátarendszer transzformációját;

e) áttérést az inverz függvény hatványsorára.

A hatványsorba fejtés apparátusa hatékony alapját képezte a Newton-féle fluxióelméletnek. Ennek alapján vált lehetővé az analitikus függvények eléggé széles osztályára a differenciálás és integrálás bevezetése, függvények szélsőértékeinek meghatározása, a fluxióelmélet módszereinek számos alkalmazása a geometriában, mechanikában és más tudományokban. Newton egyik 1676-ban írt leveléből látható, hogy milyen messzire jutott a fluxióelmélet nehéz kérdéseinek vizsgálatában. Ebben a binomiális differenciál integ-rálhatóságának feltételét közölte: az $y = az^{\theta}(e+fz^{\eta})^{\lambda}$ csak akkor integrálható, ha $\frac{\theta+1}{\eta}$ vagy $\frac{\theta+1}{\eta}+\lambda$ vagy λ egész szám.

A Newton által megalkotott fluxióelméletnek a legnagyobb hiányossága az volt, hogy logikailag nem volt kielégítően megalapozva. A változókkal és a végtelen kicsiny mennyiségekkel végzett műveletek bevezetése nagyszámú összefüggő alapfogalom és probléma racionális magyarázatának szükséges-ségét vetette fel. Newton ezt jól tudta, de a felmerült nehézségekkel nem tudott megbirkózni. Ennek oka abban keresendő, hogy a határérték fogalma, bármilyen alakban is jelenjen meg, nem algoritmikus fogalom. Lehetetlen e fogalmat a meghatározásához valóban elvezető műveletek sorozatával kapcsolatba hozni. A határérték feltételes tárgyalásától (legyen adott $\varepsilon > 0$; akkor található olyan $\delta > 0$, hogy stb.) Newton még távol ált; e tárgyalásmód csak a XIX. sz. vége felé nyert polgárjogot.

A végtelen kicsinyek analízisének egy más formája a differenciálokkal való számolásnak volt szentelve. Az új kalkulus szerzője G.W. Leibniz volt. A Leibniz-féle kalkulus nagy vonásokban a következő premisszákból keletkezett:

a) sorösszegezési feladatok (1673-tól) és véges különbségrendszerek vizsgálata;

b) az érintőmeghatározás feladatának megoldása a Pascal-féle karakterisztikus háromszög segítségével, és fokozatos áttérés a véges elemek közötti összefüggésekről a tetszőlegesekre, majd aztán a végtelen kicsinyekre;

c) érintőkre vonatkozó fordított feladatok vizsgálata, a végtelen kis különbségek összegezése, a differenciál- és integrálfeladatok kölcsönös kapcsolatának felfedezése (körülbelül 1676-ban).

Közben az évek során Leibniz sokat próbálkozott a kényelmes szimbólika kidolgozásával. Ennek során jutott arra a gondolatra, hogy a végtelen kis különbséget a **d** szimbólummal jelölje (**d** a differencia rövidítése). Cavalieri és Pascal nyomán az integrált mint végtelen sok ordináta összegét fogta fel és az **omn** y vagy még gyakrabban az **omn** l szimbólummal jelölte. Később az omn szimbólumot $\int$-ra változtatta, a Summa szó kezdőbetűjéből kiindulva. A feladatok kölcsönös kapcsolatát ugyancsak igyekezett a szimbólumokban visszatükrözni: ha $\int l = ax$, akkor $l = \frac{ax}{d}$. Rövidesen arra a gondolatra jutott, hogy jobb $d(ax)$-et írni; lévén a dx ugyanaz, mint az $\frac{x}{d}$, mert mindkettő a közeli x-ek különbségét jelöli. De $d(ax) = l$-ből az következne, hogy a $d(ax)$ differenciál egyenlő a véges l mennyiséggel. Így fokozatosan tisztázódott, hogy az integrál szimbólumának olyan továbbfejlesztése szükséges, amelyben a differenciálargumentum szimbóluma is szerepel: $\int y\,dx$.

Az 1684-es memoár a differenciálszámítást tárgyaló értekezés volt. Két évvel később, 1686-ban *De geometria recondita* címmel napvilágot látott Leibniz másik műve, amelyben az elemi függvények sokaságának integrálási szabályait gyűjtötte össze, hangsúlyozva az integrálás és differenciálás műveletének kölcsönös inverz kapcsolatát.

A végtelen kis mennyiségek analízise ily módon túljutott a megfogalmazás stádiumán, és rendkívül gyümölcsöző új matematikai tudománnyá vált. Az új kalkulus gyors elterjedését elősegítette az is, hogy Leibniz és tanítványai, valamint követői – akik közül kiemelkedett

Jakab Bernoulli és Johann Bernoulli – aktív propagandát fejtettek ki ennek érdekében. Leibniz felfedezései azonban ezzel nem merültek ki. 1693-ban kiterjesztette az új kalkulust a transzcendens függvényekre, 1695-ben publikálta az általános exponenciális függvény differenciálási szabályát és a szorzat többszörös deriválásának

$$d^m(xy) = d^m x \cdot d^0 y + \frac{m}{1} \cdot d^{m-1}x \cdot dy + \frac{m(m-1)}{1 \cdot 2} \cdot d^{m-2}x \cdot d^2y + \dots$$

képletét; ugyanekkor sikerült általánosítania a differenciál fogalmát a negatív és törtkitevők esetére; majd 1702-1703 folyamán kidolgozta a racionális törtfüggvények integrálási eljárását. Az új kalkulus segítségével Leibniz sikeresen oldotta meg a nehéz és gyakorlati fontosságú feladatok sorát. 1691-ben meghatározta azt, hogy milyen alakot vesz fel a végein felfüggesztett súlyos, de hajlékony homogén fonal, és levezette a láncgörbe egyenletét. 1696-tól kezdve új, variációs feladatok foglalkoztatták. Ezzel kapcsolatban megoldotta a brachystochron problémáját, és módszert talált a geodetikus vonalak prob-lémájának megoldására.

Az új kalkulus kidolgozása és gyakorlati sikerei olyan szintet értek el, hogy 1696-ban megjelenhetett a differenciálszámítással és annak geometriai alkalmazásával foglalkozó első tankönyv, G.F. L'Hospital: *A végtelen kicsinyek analízise* című műve. A differenciálszámítás rövid idő alatt az egész matematika központi területévé vált. De volt egy gyenge pontja: tisztázatlan maradt az, hogy az alapfogalmaira – amelyek olyasmikre támaszkodtak, mint a végtelen közeliség, végtelen kicsinység vagy valamely folyamat végtelen folytonossága – milyen racionális magyarázat adható. A végtelen kicsiny mennyiségek analízise megalapozásának problémája éppen úgy meghaladta Leibniz erejét, mint ahogy a Newtonét is. A matematikának ebben a fontos fejezetében az alapok tisztázatlanok maradtak. Ezt oldja fel a határérték-elmélet kidolgozása.

A XVIII. sz. matematikusai az infinitezimális analízis megalapozásának számos módszerét kipróbálták. De majdnem minden esetben gyorsan kiderült e módszerek ki nem elégítő volta. Csak a határátmenetre alapozott módszerben nem talált a kritika lényeges hézagokat és ellentmondásokat. A határérték módszert hívei – J.L. d'Alembert, J. Liouville és mások – igen állhatatosan védelmezték, és igyekeztek megmagyarázni a határérték fogalmának értelmét és szerepét. A differenciálásnak azonban d'Alembert sem tudott a végtelen kicsinyek leibnizi elhanyagolásával szembeállítani valamilyen – a határérték vizsgálatán alapuló – ésszerű módszert. Az általa javasolt eljárás röviden az

$$y' = \frac{f(x+h) - f(x)}{h}\bigg|_{h=0}$$

formulával írható le. Ez az eljárás nyilvánvalóan feltételezi a függvények sorbafejthetőségét; azonkívül ebben lényegében még nincs szó a határértékekkel végzett műveletekről. A határérték fogalom és a vele kapcsolatos fogalmak hasonló meghatározása csupán az infinitezimális analízis megmagyarázását és végül eredményei helyességének igazolását szolgálhatta. Így is fogták fel a fogalmakat. De a határérték vizsgálatok meghonosítása az analízisben többet követelt: azt, hogy e vizsgálatok módszert adjanak az analízis problémáinak megoldásához. Ezen az úton nagy nehézségeket kellett legyőzni, mert:

a) nem volt tisztázva, hogy mikor létezik határérték;

b) nem volt algoritmus a határérték kiszámítására;

c) hiányzott a határérték olyan matematikai kifejezése, amely lehetővé tette volna a velük végzett műveleteket, és hiányzott a megfelelő szimbólika.

A XVIII. sz. végén, a XIX. sz. elején már sok matematikus műve tük-rözte a határérték-elmélet felépítésének szükségszerűségét. A matematikusok egyre inkább ebben látták a matematikai analízis megalapozásának és gyökeres átépítésének útját. Ezen a téren A.L. Cauchynak vannak a legnagyobb érdemei. Itt kell megemlíteni mindenekelőtt Cauchynak a párizsi École Polytechnique-on tartott híres előadásait.

Cauchy 1807-ben fejezte be tanulmányait az École Polytechnique-on. Ez a tanintézet – amelyet hadmérnökképző céllal 1794-ben a nagy francia polgári forradalom idején nyitottak meg – később az ország vezető mérnökszak-ember utánpótlásának legfontosabb bázisává vált. Az École Polytechnique hallgatói az első két évben alapvető matematikai, mechanikai és műszaki rajz képzést kaptak, azután további két év alatt a speciális mérnöki ismereteket sajátították el a tanintézet négy szakosztályának valamelyikében. Ezek közül a legnagyobb hírnévnek a Közlekedési Utak Intézete örvendett. Cauchy is itt tanult, majd utána (1813-ig) mérnökként dolgozott.

1816-ban az Akadémia tagjává választották, és kinevezték az École Polytechnique professzorává, ahol Franciaország legjobb matematikusaival dolgozhatott együtt. Azonban 1830-ban nyolc évre emigrációba kény-szerült monarchiabarát meggyőződése miatt. Franciaországba visszatérve, a jezsuiták kollégiumában tanított, és csak 1848-ban nevezték ki a párizsi Sorbonne professzorává.

Cauchy tudományos produktivitása rendkívüli volt. A biográfiákban 789 publikált munkája szerepel. Közülük a legtöbb a matematikai analízis különböző területeivel és alkalmazásaival foglalkozik. A komplex függvénytan módszeres felépítése jelentős mértékben Cauchynak köszönhető. A differenciálegyenletek elméletében elért legfontosabb eredményei: az ún. Cauchy-feladat; a valós és komplex változós esetre a megoldások egzisztenciájának alaptételei; a majoránsmódszer és az elsőrendű parciális differenciálegyenletek integrálására a karakterisztikus sávok módszere. További fontos eredményei vannak a geometria, a számelmélet, az algebra terén, jelentősek a rugalmasságelméleti és optikai munkái.

Cauchy az École Polytechnique-on matematikai analízisből tartott előadásokat. Előadásainak anyagát tankönyvekben publikálta. Közülük a legjelentősebbek: *Cours d'analyse* (1821), *Résumé des lecons donnè sur le calcul infinitésimal* (1823), *Leçons sur le calcul differential* (1829). Ezeknek a könyveknek azért van különösen nagy jelentőségük, mert a matematikai analízisnek a határérték-elméletre alapozott következetes felépítése ezekben található meg először. Cauchy *Cours d'analyse* című könyvének tartalma már sokban emlékeztet a matematikai analízis alapjainak mai tárgyalására. Először bevezeti a végtelen kicsiny mennyiséget mint olyan változót, amelynek határértéke nulla. A függvény folytonosságát azzal értelmezi, hogy az argumentum végtelen kicsiny növekménye mellett a megfelelő függvényérték növekménye végtelen kicsi. Nagyon gondosan tárgyalja a végtelen sorok konvergenciájának kérdését: szerinte egy végtelen sor akkor konvergens, ha véges sok tagból álló részletösszegeinek van határértéke. Hogy a konvergencia fogalmát a sorok minél szélesebb osztályaira kiterjeszthesse, a jelváltozó sorok konvergenciáját kapcsolatba hozta a tagok abszolút értékeiből álló sor konvergenciájával. Az ilyen módon bevezetett abszolút konvergenciára vonatkozólag bebizonyított egy sor tételt, például azt, hogy két abszolút konvergens sor szorzataként előálló sor összege egyenlő a sorok összegeinek szorzatával.

Cauchy második könyvében (1823) ugyanaz a törekvés – az egész analízisnek határérték-elméleti alapokon történő felépítése tükröződik. A differenciálszámítás olyan felépítésben jelent meg, amely már egészen közeli az általunk megszokott tárgyalásmódhoz. Cauchy differenciálszámítására jellemző az

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = f'(x+\theta h), \quad 0 \leq \theta \leq 1,$$

középértéktétel módszeres alkalmazása is.

3.2. Valós változós valós függvények határértéke

Mint ismeretes, a $V \subset \mathbb{R}$ az $x_0 \in \mathbb{R}$ pont környezete, ha létezik $\delta > 0$ úgy, hogy $x_0 \in]x_0 - \delta, x_0 + \delta[\subset V$. Az x_0 pont környezeteinek halmazát jelölje $\mathcal{V}(x_0)$.

Továbbá, $x_0 \in \mathbb{R}$ az $A \subset \mathbb{R}$ halmaz torlódási pontja, ha bármely $V \in \mathcal{V}(x_0)$ esetén $V \cap (A \setminus \{x_0\}) \neq \emptyset$. Az A torlódási pontjainak halmazát A' jelöli.

1. Értelmezés. *Tekintsük az $f : A \to \mathbb{R}$ $(A \subseteq \mathbb{R})$ függvényt és legyen $x_0 \in A'$. Az $l \in \mathbb{R}$ pontot az f függvény **határértékének** nevezzük az x_0 pontban, ha bármely $V \in \mathcal{V}(l)$ esetén létezik $U \in \mathcal{V}(x_0)$ úgy, hogy minden $x \in U \cap A$, $x \neq x_0$ pontra $f(x) \in V$. Jelölés: $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = l$.*

Az értelmezés kiterjeszthető az $x_0 = +\infty$ vagy $x_0 = -\infty$ esetre is. Ekkor $U \in \mathcal{V}(+\infty)$ (illetve $U \in \mathcal{V}(-\infty)$) azt jelenti, hogy létezik $b \in \mathbb{R}$ úgy, hogy $]\,b, +\infty\,[\subset U$ (illetve $]-\infty, b\,[\subset U$). Hasonlóan a határérték fogalma $l = +\infty$ és $l = -\infty$ esetekben is értelmezhető. A továbbiakban mindig $l \in \mathbb{R}$.

1. Tétel. *Adottak az $f : A \to \mathbb{R}$ $(A \subseteq \mathbb{R})$, $x_0 \in A'$ és $l \in \mathbb{R}$. A következő állítások ekvivalensek:*

a) $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = l$;

b) *bármely* $\varepsilon > 0$ *számhoz létezik olyan* $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ *szám, hogy minden* $x \in A$, $x \neq x_0$ *és* $|x - x_0| < \delta$ *esetén* $|f(x) - l| < \varepsilon$;

c) *(Heine) minden* (x_n), $x_n \in A$, $x_n \neq x_0$, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$ *sorozat esetén* $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = l$.

Bizonyítás. a) $\Rightarrow$ b) Legyen $\varepsilon > 0$ tetszőleges. Mivel $]\, l-\varepsilon, l+\varepsilon[\in \mathcal{V}(l)$, ezért létezik $U \in \mathcal{V}(x_0)$ úgy, hogy $f(x) \in \,]\, l-\varepsilon, l+\varepsilon\, [$, bármely $x \in U\cap A$, $x \neq x_0$ esetén. Ha $U \in \mathcal{V}(x_0)$, akkor létezik $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, amelyre $]x_0 - \delta,\ x_0 + \delta\, [\subset U$. Így minden $x \in]\, x_0 - \delta,\ x_0 + \delta\, [,\ x \neq x_0$ pont esetén $f(x) \in]\, l - \varepsilon,\ l + \varepsilon\, [$. Következésképp bármely $\varepsilon > 0$ számhoz létezik $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ szám úgy, hogy minden $x \in A$, $x \neq x_0$, $|x - x_0| < \delta$ esetén $|f(x) - l| < \varepsilon$.

b) $\Rightarrow$ c) A feltétel szerint: bármely $\varepsilon > 0$ számhoz létezik $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ úgy, hogy minden $x \in A$, $x \neq x_0$, $|x-x_0| < \delta$ esetén $|f(x)-l| < \varepsilon$. Ha (x_n) olyan tetszőleges sorozat A-ban, hogy $x_n \neq x_0$ és $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$, akkor a $\delta(\varepsilon) > 0$ számhoz létezik $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ úgy, hogy $|x_n - x_0| < \delta(\varepsilon)$, ha $n > n_\varepsilon$. Így $|f(x_n) - l| < \varepsilon$, ha $n > n_\varepsilon$, ami azt jelenti, hogy $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = l$.

c) $\Rightarrow$ a) Feltételezzük, hogy létezik $V \in \mathcal{V}(l)$ úgy, hogy minden $U \in \mathcal{V}(x_0)$ esetén létezik $x \in U \cap A$, $x \neq x_0$, amelyre $f(x) \notin V$. Legyen

$$U_n := \left]x_0 - \frac{1}{n},\ x_0 + \frac{1}{n}\right[\ \in \mathcal{V}(x_0), \quad n \in \mathbb{N}.$$

Ekkor létezik $x_n \in U_n\cap A$, $x_n \neq x_0$ úgy, hogy $f(x_n) \notin V$. Mivel $x_n \in U_n$, ezért $|x_n - x_0| < \frac{1}{n}$, $n \in \mathbb{N}$. Így $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$. Alkalmazva a feltételt következik, hogy $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = l$. Ezért létezik $n_0 \in \mathbb{N}$ azzal a tulajdonsággal, hogy $f(x_n) \in V$, ha $n > n_0$. Ez viszont ellentmond az $f(x_n) \notin V$, $n \in \mathbb{N}$ tetszőleges, állításnak. Következésképpen $\lim\limits_{n\to\infty} f(x) = l$. $\square$

1. Példa. $\lim\limits_{x\to 0} x \sin\dfrac{1}{x} = 0$, ahol $x \in A$ és $A = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Valóban, bármely $\varepsilon > 0$ számra legyen $\delta = \delta(\varepsilon) = \varepsilon > 0$. Ha $x \in A$ és $|x| < \delta$, akkor

$$\left|x \sin \frac{1}{x} - 0\right| \leq |x| < \delta = \varepsilon.$$

Így az 1. Tétel szerint $\lim\limits_{x \to 0} x \sin \dfrac{1}{x} = 0$.

2. Példa. A $\operatorname{sgn} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\operatorname{sgn} x = \begin{cases} -1, & \text{ha } x < 0 \\ 0, & \text{ha } x = 0 \\ 1, & \text{ha } x > 0 \end{cases}$ *előjelfüggvénynek* nem létezik a határértéke az $x_0 = 0$ pontban (sgn a *sign = jel* rövidítése).

Valóban, az (x_n), $x_n = -\frac{1}{n}$ és (x'_n), $x'_n = \frac{1}{n}$ sorozatokra $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} x'_n = 0$ és $\lim\limits_{n\to\infty} \operatorname{sgn}(x_n) = -1$, $\lim\limits_{n\to\infty} \operatorname{sgn}(x'_n) = 1$, ami az 1. Tétel alapján azt jelenti, hogy nem létezik a $\lim\limits_{x\to x_0} \operatorname{sgn}(x)$.

2. Értelmezés. *Az $f : A \to \mathbb{R}$ és $g : A \to \mathbb{R}$ ($A \subseteq \mathbb{R}$) függvények* ***összege***, ***szorzata*** *és* ***hányadosa*** *rendre a következő függvények: $f+g$, $f \cdot g$, $\frac{f}{g} : A \to \mathbb{R}$, ahol $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$; $(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$ illetve $\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$, ha $g(x) \neq 0$, bármely $x \in A$ esetén. Ha $f : A \to \mathbb{R}$ és $\alpha \in \mathbb{R}$, akkor az $\alpha f : A \to \mathbb{R}$, $(\alpha f)(x) = \alpha \cdot f(x)$ sajátos szorzatfüggvényt az f* ***függvénynek az*** *α* ***valós számmal való szorzatának*** *nevezzük.*

Az $f : A \to \mathbb{R}$ függvény ***abszolút érték függvénye*** *az $|f| : A \to \mathbb{R}$, $|f|(x) = |f(x)|$ függvény.*

3. Értelmezés. *Az $f : A \to \mathbb{R}$ ($A \subseteq \mathbb{R}$) függvény* ***korlátos***, *ha létezik $M > 0$, amelyre $|f(x)| \leq M$, bármely $x \in A$ esetén; f* ***alulról (felülről) korlátos***, *ha létezik $m \in \mathbb{R}$ ($M \in \mathbb{R}$) úgy, hogy $m \leq f(x)$ ($f(x) \leq M$), bármely $x \in A$ esetén. Az $f : A \to \mathbb{R}$ korlátos függvény* ***eléri határait***, *ha létezik $x_1, x_2 \in A$ úgy, hogy $f(x_1) = \inf\{f(x) : x \in A\}$*

és $f(x_2) = \sup\{f(x) : x \in A\}$; x_1 *az* f ***minimum pontja***, x_2 *az* f ***maximum pontja***.

A bebizonyított 1. Tétel alapján, felhasználva a sorozatok tulajdonságait, az adott pontban határértékkel rendelkező függvényekre az alábbi tulajdonságokat lehet megállapítani:

2. Tétel. *a) A függvények határértéke egyértelmű.*

b) Legyen $f : A \to \mathbb{R}$ $(A \subseteq \mathbb{R})$, $x_0 \in A'$ *és* $l \in \mathbb{R}$. *Ha létezik* $U \in \mathcal{V}(x_0)$ *valamint* $h : U \cap A \to \mathbb{R}$ *úgy, hogy* $|f(x) - l| \leq h(x)$ *minden* $x \in U \cap A$, $x \neq x_0$ *esetén és* $\lim\limits_{x \to x_0} h(x) = 0$, *akkor* $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = l$.

c) Ha $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = l$, *akkor* $\lim\limits_{x \to x_0} |f(x)| = |l|$.

d) Ha $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = l$, *akkor létezik* $U \in \mathcal{V}(x_0)$ *és* $M > 0$ *úgy, hogy* $|f(x)| \leq M$, *bármely* $x \in U \cap A$ *esetén (az* f *függvény korlátos az* $U \cap A$ *halmazon).*

e) Ha $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = l \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, *akkor létezik* $U \in \mathcal{V}(x_0)$ *úgy, hogy minden* $x \in U \cap A$, $x \neq x_0$ *esetén* $f(x)$ *az* l*-lel azonos előjelű.*

f) Adottak az $f : A \to \mathbb{R}$ $(A \subseteq \mathbb{R})$ *és* $g : B \to \mathbb{R}$ $(f(A) \subseteq B \subseteq \mathbb{R})$ *függvények. Ha léteznek a* $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = u_0 \in B'$ *és* $\lim\limits_{u \to u_0} g(u) = l$ *határértékek, továbbá, létezik* $U \in \mathcal{V}(x_0)$ *úgy, hogy* $f(x) \neq u_0$, *bármely* $x \in U \cap A$, $x \neq x_0$ *esetén, akkor létezik a* $\lim\limits_{x \to x_0} (g \circ f)(x)$ *határérték és egyenlő* l*-el.*

g) Ha az $f, g : A \to \mathbb{R}$ $(A \subseteq \mathbb{R})$ *függvényekre* $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = l_1$ *és* $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = l_2$, *akkor* $\lim\limits_{x \to x_0} (f(x) + g(x)) = l_1 + l_2$.

h) Ha az $f, g : A \to \mathbb{R}$ $(A \subseteq \mathbb{R})$ *függvényekre* $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = l_1$ *és* $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = l_2$, *akkor* $\lim\limits_{x \to x_0} (f(x) \cdot g(x)) = l_1 \cdot l_2$.

i) Ha az $f, g : A \to \mathbb{R}$ $(A \subseteq \mathbb{R})$ *függvényekre* $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = l_1$, $g(x) \neq 0$, *bármely* $x \in A$ *esetén és* $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = l_2 \neq 0$, *akkor* $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{l_1}{l_2}$.

j) Ha az $f, g : A \to \mathbb{R}$ $(A \subseteq \mathbb{R})$ *függvények esetén léteznek a* $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = l_1$, $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = l_2$ *határértékek és* $U \in \mathcal{V}(x_0)$ *úgy, hogy*

$f(x) \leq g(x)$ vagy $f(x) < g(x)$, bármely $x \in U \cap A$, $x \neq x_0$ esetén, akkor $l_1 \leq l_2$.

k) Ha az $f, g : A \to \mathbb{R}$ $(A \subseteq \mathbb{R})$ függvények esetén léteznek a $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = l_1$ és $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = l_2$ határértékek úgy, hogy $l_1 < l_2$, akkor létezik $U \in \mathcal{V}(x_0)$, amelyre $f(x) < g(x)$, bármely $x \in U \cap A$, $x \neq x_0$ esetén.

l) Ha az $f, g, h : A \to \mathbb{R}$ $(A \subseteq \mathbb{R})$ függvényekre $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$, minden $x \in A$, $x \neq x_0$ esetén és $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0} h(x)$, akkor létezik $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)$ és $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0} g(x) = \lim\limits_{x\to x_0} h(x)$.

3. Példa. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$.

Először igazoljuk, hogy

$$\cos^2 x < \frac{\sin x}{x} < 1, \quad \text{ha} \quad 0 < |x| < \frac{\pi}{2} \tag{3.2.1}$$

Tekintsük az $A(1,0)$, $B(\cos x, \sin x)$, $C(\cos x, 0)$ pontokat, ahol $|OD| = |OC|$ (lásd 3.1. ábra).

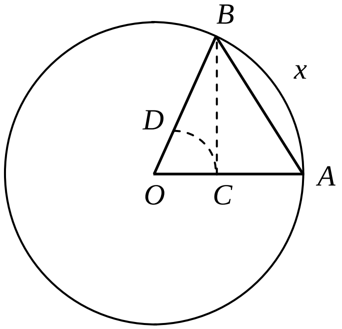
Mivel az $x \to \cos^2 x$ és $x \to \frac{\sin x}{x}$ függvények párosak, ezért elegendő azt igazolni, hogy $\cos^2 x < \frac{\sin x}{x} < 1$, ha $x \in]0, \frac{\pi}{2}[$. Összehasonlítva az $OCD\sphericalangle$ és $OAB\sphericalangle$ körcikkek területeit az $OAB\triangle$ területével kapjuk, hogy

$$\text{terület } (OCD\sphericalangle) < \quad \text{terület } (OAB\triangle) < \quad \text{terület } (OAB\sphericalangle).$$

Innen $\frac{1}{2}|OC| \cdot |\overset{\frown}{CD}| < \frac{1}{2}|OA| \cdot |BC| < \frac{1}{2}|OA| \cdot |\overset{\frown}{AB}|$ vagy $x\cos^2 x < \sin x < x$. Így

$$\cos^2 x < \frac{\sin x}{x} < 1, \ x \in \left] \ 0, \frac{\pi}{2} \right[.$$

A (3.2.1) alapján $|\sin x| < |x|$, ha $0 < |x| < \frac{\pi}{2}$. Viszont $|\sin x| \leq 1$, bármely $x \in \mathbb{R}$ esetén, ezért $|\sin x| \leq 1$ akkor is teljesül, ha $|x| \geq \frac{\pi}{2} > 1$. Így $|\sin x| < |x|$, ha $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Az $x = 0$ esetén $\sin x = x = 0$.


B
x
D
A
O
C

Következésképp

$$|\sin x| \leq |x|, \tag{3.2.2}$$

bármely $x \in \mathbb{R}$ esetén. Innen azonnal következik, hogy $\lim\limits_{x \to 0} \sin x = 0$ (lásd 2. Tétel, b) pont).

A (3.2.1) alapján

$$1 - \sin^2 x < \frac{\sin x}{x} < 1, \quad \text{ha} \quad |x| < \frac{\pi}{2}.$$

Másrészt

$$\lim_{x \to 0}(1 - \sin^2 x) = 1 - \lim_{x \to 0}(\sin x) \cdot \lim_{x \to 0}(\sin x) = 1 - 0 \cdot 0 = 1$$

(alkalmaztuk a 2. Tétel, g) és h) pontjait). Tekintettel a 2. Tétel, l) pontjára következik, hogy

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

3. Tétel. *(Cauchy-féle konvergencia kritérium). Az $f : A \to \mathbb{R}$ ($A \subseteq \mathbb{R}$) függvénynek az $x_0 \in A'$ pontban akkor és csak akkor van határértéke, ha bármely $\varepsilon > 0$ számhoz létezik olyan $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ szám, hogy minden $x, x' \in A$, $x \neq x_0$, $x' \neq x_0$, $|x - x_0| < \delta$, $|x' - x_0| < \delta$ esetén $|f(x) - f(x')| < \varepsilon$.*

Bizonyítás. Szükségesség. Ha $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = l$, akkor az 1. Tétel, b) pontja szerint bármely $\varepsilon > 0$ számhoz létezik $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ úgy, hogy tetszőleges $x, x' \in A$, $x \neq x_0 \neq x'$, $|x - x_0| < \delta$, $|x' - x_0| < \delta$ esetén $|f(x) - l| < \frac{\varepsilon}{2}$ és $|f(x') - l| < \frac{\varepsilon}{2}$. Innen

$$|f(x) - f(x')| \leq |f(x) - l| + |f(x') - l| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

amit igazolni kellett.

Elégségesség. A feltétel szerint: bármely $\varepsilon > 0$ esetén létezik

$\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ úgy, hogy minden $x, x' \in A$, $x \neq x_0 \neq x'$, $|x - x_0| < \delta$, $|x' - x_0| < \delta$ esetén $|f(x) - f(x')| < \varepsilon$.

Mivel $x_0 \in A'$, ezért létezik (x_k), $x_k \in A$, $x_k \neq x_0$ ($k \in \mathbb{N}$ tetszőleges) sorozat úgy, hogy $\lim\limits_{k\to\infty} x_k = x_0$. A $\delta > 0$ számhoz létezik $k_\varepsilon \in \mathbb{N}$ úgy, hogy $|x_k - x_0| < \delta$ és $|x_{k+p} - x_0| < \delta$, bármely $k > k_\varepsilon$ és $p \in \mathbb{N}$ esetén. Így a feltétel szerint $|f(x_{k+p}) - f(x_k)| < \varepsilon$, ha $k > k_\varepsilon$ és $p \in \mathbb{N}$. Ez azt jelenti, hogy $(f(x_k))$ fundamentális, tehát konvergens. Legyen $l = \lim\limits_{k\to\infty} f(x_k)$. Ekkor $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = l$ is teljesül, mert l nem függ az (x_k) megválasztásától. $\square$

4. Példa. A $\lim\limits_{x\to 0} \left|\operatorname{sgn}\left(x \sin \frac{1}{x}\right)\right|$ határérték nem létezik.

Valóban, ha $x_n = \frac{1}{n\pi}$ és $x'_n = \frac{1}{(\pi/2)+2n\pi}$ ($n \in \mathbb{N}$), akkor

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} x'_n = 0$$

és $|f(x_n) - f(x'_n)| = 1$. Így a 3. Tétel alapján a határérték valóban nem létezik.

4. Értelmezés. *Tekintsük az $f : A \to \mathbb{R}$ ($A \subseteq \mathbb{R}$) függvényt és legyen $x_0 \in (A\cap]-\infty, x_0[)'$. Az $l_b \in \mathbb{R}$ pontot az f függvény **bal oldali határértékének** nevezzük az x_0 pontban, ha minden $V \in \mathcal{V}(l_b)$ esetén létezik olyan $U \in \mathcal{V}(x_0)$, hogy minden $x \in U \cap A$, $x < x_0$ pontra $f(x) \in V$. Jelölése:*

$$l_b = f(x_0 - 0) = \lim_{x\nearrow x_0} f(x).$$

*Hasonlóan értelmezzük az f függvény l_j **jobb oldali határértékét** is az x_0 pontban. Jelölése:*

$$l_j = f(x_0 + 0) = \lim_{x\searrow x_0} f(x).$$

Ez az értelmezés is átírható az $\varepsilon - \delta$ nyelvezetre: $l_b = \lim\limits_{x\nearrow x_0} f(x)$ akkor és csak akkor, ha bármely $\varepsilon > 0$ számhoz létezik $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$

úgy, hogy minden $x \in A$, $0 < x_0 - x < \delta$ esetén $|f(x) - l_b| < \varepsilon$; $l_j = \lim\limits_{x \searrow x_0} f(x)$ akkor és csak akkor, ha bármely $\varepsilon > 0$ számhoz létezik $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ úgy, hogy minden $x \in A, 0 < x - x_0 < \delta$ esetén $|f(x) - l_j| < \varepsilon$. Innen azonnal következik az 1. Tétel alapján a jobb és bal oldali határértékekre érvényes következő tulajdonság:

4. Tulajdonság. *Annak szükséges és elégséges feltétele, hogy az $f : A \to \mathbb{R}$ $(A \subseteq \mathbb{R})$ függvénynek az $x_0 \in (A \cap]-\infty, x_0[)' \cap (A \cap]x_0, \infty[)'$ pontban legyen határértéke az, hogy az f függvénynek az x_0 pontban létezzenek a jobb és bal oldali határértékei és ezek legyenek egyenlők.*

5. Értelmezés. *Az $f : A \to \mathbb{R}$ $(A \subseteq \mathbb{R})$ függvény **növekvő (szigorúan növekvő)**, ha bármely $x_1, x_2 \in A : x_1 < x_2$ esetén $f(x_1) \leq f(x_2)$ $(f(x_1) < f(x_2))$.*

*Az $f : A \to \mathbb{R}$ $(A \subseteq \mathbb{R})$ függvény **csökkenő (szigorúan csökkenő)**, ha bármely $x_1, x_2 \in A : x_1 < x_2$ esetén $f(x_1) \geq f(x_2)$ $(f(x_1) > f(x_2))$.*

*A fent említett függvénytípusokat **monoton függvényeknek (szigorúan monoton függvényeknek)** nevezzük.*

5. Tétel. *Legyen $f : A \to \mathbb{R}$ $(A \subseteq \mathbb{R})$ monoton függvény és $x_0 \in A'$. Ha x_0 az A halmaznak mindkét oldalról torlódási pontja, akkor f-nek az x_0 pontban van bal és jobb oldali határértéke; ha x_0 csak bal (jobb) oldalról torlódási pontja az A halmaznak, akkor f-nek van bal (jobb) oldali határértéke.*

Bizonyítás. Megjegyezzük, hogy x_0 az $A \subseteq \mathbb{R}$ halmaznak *bal (jobb) oldalról torlódási pontja*, ha x_0 bármely környezete tartalmazza A-nak egy x_0-nál szigorúan kisebb (nagyobb) elemét (lásd a 4. Értelmezést is).

Feltételezzük, hogy az f függvény növekvő. Legyen x_0 bal oldalról torlódási pontja A-nak. Ha $x_0 \neq \sup A$, akkor létezik $x_1 \in A$ úgy, hogy $x_0 < x_1$. Mivel f növekvő, ezért $f(x) \leq f(x_1)$, bármely $x \leq x_0$ esetén. Így a $H := \{f(x) \mid x \in A,\ x \leq x_0\}$ halmaz felülről korlátos.

Ezért létezik $\sup H =: L \in \mathbb{R}$. Igazoljuk, hogy $L = f(x_0 - 0)$. Legyen $\varepsilon > 0$ tetszőleges és $]\, L-\varepsilon, L+\varepsilon\, [\in \mathcal{V}(L)$. Az 1. Fejezet, 4. Tulajdonsága szerint létezik $x_2 \in A$, $x_2 < x_0$ úgy, hogy $f(x_2) > L - \varepsilon$. Ekkor bármely $x \in]\, x_2, x_0\, [$ esetén $L - \varepsilon < f(x_2) \leq f(x) < L + \varepsilon$. Így valóban $L = f(x_0 - 0)$.

Ha $x_0 = \sup A$, $x_0 \in A'$ és a függvény felülről korlátos, akkor a fenti gondolatmenetet megismételve kimutatható, hogy $\sup H = f(x_0 - 0)$. Ha $x_0 = \sup A$, $x_0 \in A'$ és f nem korlátos, akkor $f(x_0 - 0) = +\infty$, mivel minden $K > 0$ számhoz létezik olyan $x_3 \in A$, $x_3 < x_0$ pont, amelyre $f(x_3) > K$. Minthogy f növekvő, ezért minden $x > x_3$, $x \in A$ esetén $f(x) > K$, amit igazolni kellett.

Hasonló gondolatmenetet alkalmazunk akkor, ha $x_0 \neq \inf A$ és x_0 jobb oldalról torlódási pontja az A halmaznak illetve ha $x_0 = \inf A$, $x_0 \in A'$. Ebben az esetben igazolható, hogy létezik $f(x_0 + 0)$. $\square$

3.3. Valós változós valós függvények folytonossága

6. Értelmezés. *Az $f : A \to \mathbb{R}$ $(A \subseteq \mathbb{R})$ függvény **folytonos** az $x_0 \in A$ pontban, ha bármely $V \in \mathcal{V}(f(x_0))$ esetén létezik $U \in \mathcal{V}(x_0)$ úgy, hogy minden $x \in U \cap A$ pontra $f(x) \in V$. Jelölés: $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.*

Az értelmezés úgy is megfogalmazható, hogy $f : A \to \mathbb{R}$ folytonos az $x_0 \in A$ pontban, ha $x_0 \notin A'$ vagy ha létezik a függvény határértéke az x_0 pontban, akkor $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.

Az 1. Tétel megfelelője a következő tétel:

6. Tétel. *Tekintsük az $f : A \to \mathbb{R}$ $(A \subseteq \mathbb{R})$ függvényt és legyen $x_0 \in A$. A következő állítások ekvivalensek:*

a) $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$;

b) bármely $\varepsilon > 0$ számhoz létezik olyan $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ szám, hogy minden

$x \in A$, $|x - x_0| < \delta$ *esetén* $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$;

c) (Heine) minden (x_n), $x_n \in A$, $\lim_{n\to\infty} x_n = x_0$ sorozat esetén $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x_0)$.

5. Példa. Az $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = c$ állandó függvény folytonos minden $x_0 \in \mathbb{R}$ pontban. Valóban, bármely $V \in \mathcal{V}(c)$ esetén $f(\mathbb{R}) = \{c\} \subset V$, így a 6. Értelmezés szerint f folytonos az x_0 pontban.

6. Példa. Az $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x$ függvény folytonos minden $x_0 \in \mathbb{R}$ pontban: bármely $\varepsilon > 0$ számhoz létezik $\delta = \delta(\varepsilon) = \varepsilon > 0$ úgy, hogy minden $x \in \mathbb{R}$, $|x - x_0| < \delta$ esetén $|f(x) - f(x_0)| = |x - x_0| < \delta = \varepsilon$. Így f folytonos az x_0 pontban a 6. Tétel alapján.

7. Példa. Az $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sin x$ függvény folytonos bármely $x_0 \in \mathbb{R}$ pontban, ugyanis

$$\begin{aligned} |f(x) - f(x_0)| &= |\sin x - \sin x_0| = \left|2\sin\frac{x - x_0}{2}\cos\frac{x + x_0}{2}\right| \le \\ &\le 2\left|\sin\frac{x - x_0}{2}\right| \le |x - x_0| \end{aligned}$$

a (3.2.2) alapján. Ha $\varepsilon > 0$ tetszőleges, akkor létezik $\delta = \delta(\varepsilon) = \varepsilon > 0$ úgy, hogy $|x - x_0| < \delta$, $x \in \mathbb{R}$ esetén $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$, ami a 6. Tétel szerint az f folytonosságát jelenti az x_0 pontban.

Adott pontban határértékkel rendelkező függvények tulajdonságaiból (lásd a 2. és 3. Tételeket) azonnal következnek az alábbi állítások:

7. Tétel. *a) Az $x_0 \in A$ pontban folytonos $f : A \to \mathbb{R}$ $(A \subseteq \mathbb{R})$ függvények halmaza valós lineáris tér a függvények összeadására és valós számmal való szorzására nézve.*

b) Ha az $f : A \to \mathbb{R}$ $(A \subseteq \mathbb{R})$ függvény folytonos az $x_0 \in A$ pontban, akkor létezik $U \in \mathcal{V}(x_0)$ úgy, hogy f korlátos az $U \cap A$ halmazon.

c) Ha $f : A \to \mathbb{R}$ ($A \subseteq \mathbb{R}$) függvény folytonos az $x_0 \in A$ pontban és $g : B \to \mathbb{R}$ ($f(A) \subseteq B \subseteq \mathbb{R}$) függvény folytonos az $y_0 = f(x_0) \in B$ pontban, akkor $g \circ f : A \to \mathbb{R}$ függvény folytonos az x_0 pontban.

d) Ha az $f : A \to \mathbb{R}$ ($A \subseteq \mathbb{R}$) függvény folytonos az $x_0 \in A$ pontban és $f(x_0) \neq 0$, akkor létezik $U \in \mathcal{V}(x_0)$ úgy, hogy f előjeltartó az $U \cap A$ halmazon.

e) Ha az $f, g : A \to \mathbb{R}$ ($A \subseteq \mathbb{R}$) függvények az $x_0 \in A$ pontban folytonosak, akkor az $f \cdot g$, $\frac{f}{g} : A \to \mathbb{R}$ függvények az x_0 pontban szintén folytonosak (a hányadosfüggvény esetében $g(x) \neq 0$, ha $x \in A$).

f) Annak szükséges és elégséges feltétele, hogy az $f : A \to \mathbb{R}$ ($A \subseteq \mathbb{R}$) függvény folytonos legyen az $x_0 \in A$ pontban az, hogy bármely $\varepsilon > 0$ számhoz létezzen $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ szám úgy, hogy minden $x, x' \in A$, $|x - x_0| < \delta$ és $|x' - x_0| < \delta$ esetén $|f(x) - f(x')| < \varepsilon$ teljesüljön.

A 4. Értelmezéshez hasonlóan beszélhetünk az f függvény bal oldali és jobb oldali folytonosságáról. Például: f az $x_0 \in A \cap]-\infty, x_0]$ pontban balról folytonos, ha $f(x_0 - 0)$ létezik és $f(x_0) = f(x_0 - 0)$.

A 4. Tulajdonság következménye: *annak szükséges és elégséges feltétele, hogy az $f : A \to \mathbb{R}$ függvény folytonos legyen az $x_0 \in A$ pontban ($A \cap]-\infty, x_0] \neq \emptyset \neq A \cap [x_0, +\infty[$) az, hogy $f(x_0 - 0) = f(x_0) = f(x_0 + 0)$.*

7. Értelmezés. *Ha $f : A \to \mathbb{R}$ ($A \subseteq \mathbb{R}$) nem folytonos az $x_0 \in A$ pontban, akkor az x_0 pontot az f függvény **szakadási pontjának** nevezzük, és azt mondjuk, hogy f az x_0-ban **szakadásos**.*

Egy valós változós valós függvény szakadási pontjainak osztályozása a következő:

8. Értelmezés. *Az $f : A \to \mathbb{R}$ ($A \subseteq \mathbb{R}$) függvénynek $x_0 \in A$ pontban **megszüntethető szakadása** van, ha létezik a véges $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ határérték, de nem egyenlő $f(x_0)$-val.*

8. Példa. Az $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x}, & \text{ha } x \neq 0 \\ 0, & \text{ha } x = 0 \end{cases}$ függvénynek az $x_0 = 0$ pontban megszüntethető szakadása van, mert $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 1 \neq f(0) = 0$ (lásd a 3. Példát).

9. Értelmezés. *Az $f : A \to \mathbb{R}$ $(A \subseteq \mathbb{R})$ függvénynek $x_0 \in A$ pontban **elsőfajú szakadása** van, ha léteznek az $f(x_0 + 0)$ és $f(x_0 - 0)$ határértékek, de nem egyenlők.*

9. Példa. A 2. Példában bevezetett függvénynek az $x_0 = 0$ pontban elsőfajú szakadása van, mert $\lim\limits_{x \nearrow 0} \operatorname{sgn} x = -1$ és $\lim\limits_{x \searrow 0} \operatorname{sgn} x = 1$.

10. Értelmezés. *Az $f : A \to \mathbb{R}$ $(A \subseteq \mathbb{R})$ függvénynek $x_0 \in A$ pontban **másodfajú szakadása** van, ha az $f(x_0 + 0)$ és $f(x_0 - 0)$ határértékek közül legalább az egyik nem létezik.*

10. Példa. A *Dirichlet-függvény* minden pontban másodfajú szakadással rendelkezik.

A Dirichlet-féle függvény a következő:

$$\mathcal{D} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad \mathcal{D}(x) = \begin{cases} 1, & \text{ha} \quad x \in \mathbb{Q} \\ 0, & \text{ha} \quad x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}. \end{cases}$$

Legyen $x_0 \in \mathbb{R}$. Ha (x_n) és (x'_n) olyan sorozatok, hogy $x_n \in \mathbb{Q}$, $x_n \nearrow x_0$ és $x'_n \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, $x'_n \nearrow x_0$, akkor $\lim\limits_{n \to \infty} \mathcal{D}(x_n) = 1$ és $\lim\limits_{n \to \infty} \mathcal{D}(x'_n) = 0$. Így nem létezik $f(x_0 - 0)$.

11. Példa. Az

$$\mathcal{R}(x) = \begin{cases} \frac{1}{q}, & \text{ha} \quad x = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q} \setminus \{0\},\ (p, q) = 1 \\ 0, & \text{ha} \quad x \in \mathbb{R} \setminus (\mathbb{Q} \setminus \{0\}) \end{cases}$$

Riemann-féle függvény folytonos a tetszőleges $x_0 \in \mathbb{R} \setminus (\mathbb{Q} \setminus \{0\})$ pontban és megszüntethető szakadása van minden $x_0 \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$ pontban.

Vegyük észre, ha az (x_n) sorozat olyan, hogy $x_n = \frac{p_n}{q_n}$, $x_n \neq x_0$, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$, akkor $\lim\limits_{n\to\infty} q_n = +\infty$. Ellenkező esetben a $\{q_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ halmaz véges, így az $]\,x_0 - 1,\, x_0 + 1\,[\cap \left\{\frac{p_n}{q_n} \mid n \in \mathbb{N}\right\}$ halmaz is véges. Jelölje

$$r = \frac{1}{2} \cdot \min\left\{\left|x_0 - \frac{p_n}{q_n}\right| : \frac{p_n}{q_n} \in]\,x_0 - 1, x_0 + 1\,[\right\} > 0.$$

Ekkor $]\,x_0 - r,\ x_0 + r\,[\cap \{x_n \mid n \in \mathbb{N}\} = \emptyset$, ellentmondás a $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$ feltételnek (x_0 a $\{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ halmaz torlódási pontja).

Következésképpen, ha $x_0 \in \mathbb{R} \setminus (\mathbb{Q} \setminus \{0\})$, akkor az x_0-hoz tartó tetszőleges (x_n) racionális sorozat esetén $x_n = \frac{p_n}{q_n}$ és

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{q_n} = 0 = f(x_0),$$

míg ha (x'_n) az x_0-hoz tartó tetszőleges irracionális sorozat, akkor

$$\lim_{n\to\infty} f(x'_n) = \lim_{n\to\infty} 0 = 0 = f(x_0).$$

Ha $x_0 \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$, akkor a fent említett eljárással $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = 0$ és $\lim\limits_{n\to\infty} f(x'_n) = 0$, ahol (x_n) és (x'_n) az x_0 ponthoz tartó tetszőleges racionális illetve irracionális sorozat. Viszont $f(x_0) \neq 0$. Ezért a 6. Tétel, c) pontja szerint f folytonos az $x_0 \in \mathbb{R} \setminus (\mathbb{Q} \setminus \{0\})$ pontban, és megszüntethető szakadása van az $x_0 \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$ pontban.

8. Tétel. *Az $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ monoton függvénynek legfeljebb elsőfajú szakadásai vannak. A szakadási pontok halmaza megszámlálható.*

Bizonyítás. Az 5. Tétel alapján léteznek az $f(a+0)$, $f(b-0)$, $f(x_0+0)$ és $f(x_0-0)$ ($x_0 \in]a,b[$ tetszőleges) határértékek. Így azt kell igazolni, hogy ezek végesek. Ha f növekvő függvény, akkor $f(a) \leq f(x) \leq f(b)$, bármely $x \in [a, b]$ pontra. Ezért

$$f(a) \leq \lim_{x \nearrow x_0} f(x) \leq \lim_{x \searrow x_0} f(x) \leq f(b),\ f(a) \leq \lim_{x \searrow a} f(x) \text{ és } \lim_{x \nearrow b} f(x) \leq f(b),$$

amit igazolnunk kellett.

Továbbá, ha $x_1, x_2 \in]a, b[$, $x_1 < x_2$ az f függvény elsőfajú szakadási pontjai, akkor $]\, f(x_1 - 0), f(x_1 + 0)\, [\cap]\, f(x_2 - 0), f(x_2 + 0)\, [= \emptyset$, mert $f(x_1 + 0) = \inf\{f(x) \mid x \in]\, a, b\, [,\ x_1 < x\} \leq f\left(\frac{1}{2}(x_1 + x_2)\right) \leq \sup\{f(x) \mid x \in]\, a, b\, [, x < x_2\} = f(x_2 - 0)$. Legyen $r_x \in]\, f(x - 0), f(x + 0)\, [\cap \mathbb{Q}$, $r_a \in]\, f(a), f(a + 0)\, [\cap \mathbb{Q}$ és $r_b \in]\, f(b - 0), f(b)\, [\cap \mathbb{Q}$. Ekkor az $x \to r_x$ injektív leképezés az f szakadási pontjait a racionális számok halmazába képezi le. Így az f szakadási pontjainak halmaza megszámlálható. □

A továbbiakban rátérünk a folytonos függvények globális tulajdonságainak a tanulmányozására, vagyis olyan tulajdonságok bemutatására, amelyek a függvény teljes értelmezési halmazára vonatkoznak.

11. Értelmezés. *Az $f : A \to \mathbb{R}$ $(A \subseteq \mathbb{R})$ függvény **folytonos az A halmazon** (röviden: **folytonos**), ha f folytonos az A halmaz minden pontjában. Az A halmazon folytonos valós értékű függvények halmazának jelölése $C(A, \mathbb{R})$ vagy $C(A)$. Ha $A = [a, b]$, akkor $C([a, b])$ helyett szokás a $C[a, b]$ jelölést is használni.*

9. Tétel. *(Bolzano-Cauchy). Ha az $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ függvény folytonos az $[a, b]$ intervallumon és $f(a)f(b) < 0$, akkor létezik $c \in\ ]\, a, b\, [$ úgy, hogy $f(c) = 0$.*

Bizonyítás. Ha $f(\frac{1}{2}(a + b)) = 0$, akkor a keresett pont $c = \frac{1}{2}(a + b)$. Ellenkező esetben osszuk fel az $[a, b]$ intervallumot két egyenlő részre. Feltételezve, hogy $f(a) < 0 < f(b)$, ezért a két intervallum közül legalább az egyik olyan, hogy annak végpontjaiban a függvény különböző előjelű. Legyen $[a_1, b_1]$ ez az intervallum, ahol $f(a_1) < 0 < f(b_1)$ és

$b_1 - a_1 = \frac{1}{2}(b-a)$. Folytatva az eljárást, olyan $[a,b] \supset [a_1, b_1] \supset \ldots \supset [a_n, b_n] \supset \ldots$ intervallumsorozatot kapunk, ahol $f(a_n) < 0 < f(b_n)$ és $b_n - a_n = \frac{1}{2^n}(b-a)$. Alkalmazzuk az 1. Fejezet, 13. Tételét: egyetlen $c \in \bigcap\limits_{n\geq 1} [a_n, b_n]$ pont létezik. Mivel $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n = c$, $f(a_n) < 0 < f(b_n)$, bármely n-re, és f folytonos a c pontban, ezért

$$\lim_{n\to\infty} f(a_n) = f(c) \leq 0 \leq f(c) = \lim_{n\to\infty} f(b_n),$$

vagyis $f(c) = 0$, amit igazolni kellett. □

10. Következmény. *Ha $f : I \to \mathbb{R}$ ($I \subseteq \mathbb{R}$ intervallum) folytonos függvény, $a, b \in I$, $a < b$ és λ az $f(a)$ és $f(b)$ közötti tetszőleges érték, akkor létezik $c \in \,]a, b\,[$, amelyre $f(c) = \lambda$.*

Bizonyítás. A 9. Tételt alkalmazzuk a $\varphi : [a,b] \to \mathbb{R}$, $\varphi(x) = f(x) - \lambda$ segédfüggvényre. □

11. Következmény. *Ha $f : I \to \mathbb{R}$ ($I \subseteq \mathbb{R}$ intervallum) függvény folytonos és létezik az $f^{-1} : f(I) \to I$ inverz függvény, akkor f szigorúan monoton.*

Bizonyítás. Ha $x_1, x_2, x_3 \in I$, $x_1 < x_2 < x_3$ és $f(x_1) < f(x_3) < f(x_2)$ teljesülne, akkor a 10. Következmény alapján létezik $c \in \,]\,x_1, x_2\,[$ úgy, hogy $f(c) = f(x_3)$, ellentmondás. □

12. Értelmezés. *Az $f : I \to \mathbb{R}$ ($I \subseteq \mathbb{R}$ intervallum) függvény teljesíti a **Darboux-tulajdonságot**, ha minden $a, b \in I$, $a < b$ esetén az $f(a)$ és $f(b)$ közötti bármely λ értékre létezik olyan $c \in \,]a, b[$ érték, hogy $f(c) = \lambda$.*

A Darboux-tulajdonság azt jelenti, hogy bármely $J \subseteq I$ intervallum esetén $f(J)$ is intervallum. A 10. Következmény azt mondja ki, hogy *bár-mely intervallumon folytonos függvény Darboux-tulajdonságú.*

A fordított állítás nem igaz: az $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} \sin \frac{1}{x}, & \text{ha } x \neq 0 \\ 0, & \text{ha } x = 0 \end{cases}$ függvény szakadásos az $x_0 = 0$ pontban, de Darboux-tulajdonságú, mert $f(]-r, r[) = [-1, 1]$. Itt jegyezzük meg, hogy ha az $f, g : I \to \mathbb{R}$ ($I \subseteq \mathbb{R}$ intervallum) függvények Darboux-tulajdonságúak, akkor ezek összeg-, szorzat- vagy hányadosfüggvénye nem feltétlenül Darboux-tulajdonságú.

12. Következmény. *Ha $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ szigorúan növekvő és folytonos, akkor $f^{-1} : [f(a), f(b)] \to [a, b]$ inverz függvény létezik, szigorúan növekvő és folytonos.*

Bizonyítás. Legyen $f(a) < C < f(b)$. A 10. Következmény alapján létezik $c \in]a, b[$, úgy, hogy $f(c) = C$. A c egyértelműsége az f monotonítása miatt következik. Így az f^{-1} inverz függvény létezik.

Legyen $x_1, x_2 \in [a, b]$ és $y_1 = f(x_1)$, $y_2 = f(x_2)$. Ha $y_1 < y_2$, akkor nyilván $x_1 < x_2$, ahonnan következik, hogy f^{-1} szigorúan növekvő. Legyen $f(a) \leq y_0 \leq f(b)$, $f^{-1}(y_0) = x_0$, $a \leq x_0 - \varepsilon < x_0 + \varepsilon \leq b$ és $y \in]f(x_0 - \varepsilon), f(x_0 + \varepsilon)[$. Nyilván $|f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)| < \varepsilon$, azaz f^{-1} folytonos. $\square$

13. Tétel. *(Weierstrass). Az $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ folytonos függvény korlátos és eléri határait.*

Bizonyítás. A 7. Tétel, b) pontja szerint bármely $x \in [a, b]$ pont esetén létezik $U_x \in \mathcal{V}(x)$ nyílt intervallum úgy, hogy f korlátos az $U_x \cap [a, b]$ halmazon. Mivel $\{U_x \mid x \in [a, b]\}$ az $[a, b]$ intervallum nyílt befedése, ezért az 1. Fejezet, 14. Tétele alapján létezik $U_{x_1}, \ldots, U_{x_n}$ véges lefedése az $[a, b]$ intervallumnak. Mivel f korlátos az $U_{x_i} \cap [a, b]$ halmazon ($i = 1, \ldots, n$), ezért léteznek az $M_i > 0$ ($i = 1, \ldots, n$) számok úgy, hogy $|f(x)| \leq M_i$, bármely $x \in U_{x_i} \cap [a, b]$ esetén ($i = 1, \ldots, n$). Legyen $\widetilde{M} = \max\{M_i \mid i = 1, \ldots, n\}$. Ekkor $|f(x)| \leq \widetilde{M}$, bármely $x \in [a, b]$ esetén, azaz f korlátos függvény.

Jelölje $M = \sup\{f(x) \mid x \in [a,b]\}$. Igazolnunk kell, hogy létezik $x_0 \in [a,b]$, amelyre $f(x_0) = M$. Feltételezzük, hogy $f(x) < M$, bármely $x \in [a,b]$ esetén. Ekkor értelmezhető a $\varphi : [a,b] \to \mathbb{R}$, $\varphi(x) = \frac{1}{M - f(x)}$ segédfüggvény. Mivel $f \in C[a,b]$, ezért $\varphi \in C[a,b]$. A fent igazolt tulajdonság alapján φ korlátos, vagyis létezik $M_0 > 0$ úgy, hogy $0 < \varphi(x) \le M_0$, bármely $x \in [a,b]$ esetén. Innen $f(x) \le M - \frac{1}{M_0}$, bármely x-re. Így $M \ne \sup\{f(x) \mid x \in [a,b]\}$, ellentmondás. Hasonlóan járunk el az alsó határ esetén is. $\square$

13. Értelmezés. *Az $f : A \to \mathbb{R}$ $(A \subseteq \mathbb{R})$ függvény* ***egyenletesen folytonos az A halmazon****, ha bármely $\varepsilon > 0$ számhoz létezik $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ úgy, hogy minden $x, x' \in A$, $|x - x'| < \delta$ esetén $|f(x) - f(x')| < \varepsilon$.*

A 6. Tétel, b) pontja és a 13. Értelmezés alapján azonnal következik, hogy minden egyenletesen folytonos függvény folytonos is.

14. Értelmezés. *Az $f : A \to \mathbb{R}$ $(A \subseteq \mathbb{R})$ függvényt* ***Lipschitz-tulajdonságúnak*** *nevezzük, ha létezik $L > 0$ azzal a tulajdonsággal, hogy $|f(x) - f(x')| \le L\, |x - x'|$, bármely $x, x' \in A$ esetén.*

12. Példa. Minden Lipschitz-tulajdonságú függvény egyenletesen folytonos.

13. Példa. Az $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$ függvény folytonos $\mathbb{R}$-en, de *nem* egyenletesen folytonos az $\mathbb{R}$-en.

Valóba, ha $x_n = \sqrt{n+1}$ és $x'_n = \sqrt{n}$ $(n \in \mathbb{N})$, akkor

$$\lim_{n\to\infty} (x_n - x'_n) = \lim_{n\to\infty} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = 0,$$

vagyis bármely $\delta > 0$ esetén, ha $|x_n - x'_n| < \delta$, akkor $|f(x_n) - f(x'_n)| = 1$. Így f nem egyenletesen folytonos az $\mathbb{R}$ halmazon.

14. Példa. Az $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sin(x^2)$ függvény folytonos az $\mathbb{R}$ halmazon (a 7. Tétel, c) pontja szerint), de *nem* egyenletesen folytonos az $\mathbb{R}$-en, mert az $x_n = \sqrt{\frac{\pi}{2}(n+1)}$ és $x'_n = \sqrt{\frac{\pi}{2}n}$ $(n \in \mathbb{N})$ esetén $|f(x_n) - f(x'_n)| = 1$, míg $\lim\limits_{n\to\infty} |x_n - x'_n| = 0$.

15. Példa. Legyen $a \geq 0$. Az $f :]a, \infty[\to \mathbb{R}$, $f(x) = \ln x$ függvény akkor és csak akkor egyenletesen folytonos az $]a, \infty[$ intervallumon, ha $a > 0$.

Legyen $a > 0$ és $x, x' \in]a, \infty[$ tetszőlegesek. A Lagrange-tétel szerint (lásd alább a 25. Következményt) létezik ξ az x és x' pontok között úgy, hogy $|f(x) - f(x')| = |f'(\xi)| \cdot |x - x'|$. Mivel $\xi \in]a, \infty[$, ezért $|f'(\xi)| = \frac{1}{\xi} < \frac{1}{a}$. Innen $|f(x) - f(x')| < \frac{1}{a} \cdot |x - x'|$, bármely $x, x' \in]a, \infty[$ esetén, vagyis f Lipschitz-tulajdonságú függvény, ezért f egyenletesen folytonos az $]a, \infty[$ intervallumon (12. Példa).

Fordítva, feltételezzük, hogy f egyenletesen folytonos az $]a, \infty[$ intervallumon, de $a \leq 0$. Ekkor $a = 0$. Tekintsük az $x_n = \frac{1}{n}$ és $x'_n = \frac{1}{2n}$ $(n \in \mathbb{N})$ általános tagú sorozatokat. Ezekre

$$\lim_{n\to\infty} |x_n - x'_n| = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2n} = 0,$$

míg $|f(x_n) - f(x'_n)| = \ln 2$. Így f nem egyenletesen folytonos, ellentmondás. Következésképp $a > 0$.

14. Tétel. *(Cantor). Ha $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ folytonos függvény, akkor f egyenletesen folytonos az $[a, b]$ intervallumon.*

Bizonyítás. Feltételezzük az állítás ellenkezőjét: létezik $\varepsilon > 0$ úgy, hogy minden $\delta > 0$ esetén léteznek az $x, x' \in [a, b]$, $|x - x'| < \delta$ értékek, amelyekre $|f(x) - f(x')| \geq \varepsilon$. Mivel δ tetszőleges, legyen $\delta = \frac{1}{n}$ $(n \in \mathbb{N})$. Így az (x_n) és (x'_n) sorozatokhoz jutunk, ahol $x_n, x'_n \in [a, b]$ és $|x_n - x'_n| < \frac{1}{n}$, míg $|f(x_n) - f(x'_n)| \geq \varepsilon$. Az 1. Fejezet, 26. Tétele alapján az (x_n) és (x'_n) sorozatoknak léteznek az (x_{n_k}) és (x'_{n_k}) konvergens részsorozatai:

$\lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k} = x_0$ és $\lim\limits_{k\to\infty} x'_{n_k} = x'_0$. Az $|x_{n_k} - x'_{n_k}| < \frac{1}{n_k}$ $(k \in \mathbb{N})$ feltétel miatt $x_0 = x'_0$. Az $f \in C[a,b]$ és $|f(x_{n_k}) - f(x'_{n_k})| \geq \varepsilon$ $(k \in \mathbb{N})$ feltételekből kapjuk, hogy $0 = |f(x_0) - f(x'_0)| \geq \varepsilon$, ellentmondás. Így az f függvény valóban egyenletesen folytonos az $[a,b]$ intervallumon. $\square$

3.4. Valós változós valós függvények differenciálszámítása

A környezet fogalma lehetővé teszi a belső pont fogalmának értelmezését.

15. Értelmezés. *Az $x_0 \in \mathbb{R}$ az $A \subseteq \mathbb{R}$ halmaz **belső pontja**, ha létezik $V \in \mathcal{V}(x_0)$ úgy, hogy $V \subseteq A$. Az A halmaz belső pontjainak a halmazát az A halmaz **belsejének** nevezzük és $\overset{\circ}{A}$-val jelöljük.*

16. Példa. Ha $A = [1,2] \subseteq \mathbb{R}$, akkor $\overset{\circ}{A} =]1,2[$. Ha $A = [1,2[\cup \{3\}$, akkor $\overset{\circ}{A} =]1,2[$. Ha $A = \mathbb{Q}$, akkor $\overset{\circ}{A} = \emptyset$, mert bármely $]a,b[$ intervallum esetén $]a,b[\cap (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \neq \emptyset$. Ugyanis, ha $a, b \in \mathbb{Q}$, akkor $a + \frac{\sqrt{2}}{2}(b-a) \in]a,b[\cap (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})$; ha $a \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, akkor $a + r \in]a,b[\cap (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})$, ahol $0 < r < b - a$ és r racionális szám. Hasonlóan, ha $b \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, akkor $b - r \in]a,b[\cap (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})$, ahol $r \in]0, b-a[\cap \mathbb{Q}$.

16. Értelmezés. *Az $f : A \to \mathbb{R}$ $(A \subseteq \mathbb{R})$ függvény **differenciálható** az $x_0 \in \overset{\circ}{A}$ pontban, ha létezik $a \in \mathbb{R}$ úgy, hogy létezzen a*

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0) - a(x - x_0)}{x - x_0} = 0$$

*határérték. Az f függvény **differenciálható az A halmazon**, ha f differenciálható az A minden belső pontjában.*

A differenciálhatóság értelmezésében szereplő határérték ekvivalens formája a

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0) - a \cdot h}{h} = 0$$

határérték. A $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\varphi(h) = a \cdot h$ függvényt az f függvény **differenciáljának** nevezzük, amely egyértelműen meghatározott, mert

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = a$$

és a függvények határértéke egyértelmű (2. Tétel, a) pont). Jelölése: $df(x_0)$ vagy $Df(x_0)$. Így $df(x_0)(h) = a \cdot h$.

17. Értelmezés. *Az $f : A \to \mathbb{R}$ $(A \subseteq \mathbb{R})$ függvény* ***deriválható*** *az $x_0 \in \overset{\circ}{A}$ pontban, ha létezik a*

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

véges határérték. Jelölése: $f'(x_0)$.

Az f függvény ***deriválható az A halmazon****, ha f deriválható az A minden belső pontjában.*

A

16. és 17. Értelmezések alapján azonnal látható, hogy az $f : A \to \mathbb{R}$ függvény akkor és csak akkor differenciálható az $x_0 \in \overset{\circ}{A}$ pontban, ha f deriválható az x_0 pontban.

A differenciálhatóság értelmezése úgy is felírható, mint

$$f(x_0 + h) - f(x_0) = a \cdot h + \alpha_f(x_0; h),$$

ahol $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{\alpha_f(x_0; h)}{h} = 0$. Ekkor

$$f(x_0 + h) - f(x_0) = f'(x_0) \cdot h + \alpha_f(x_0; h) \tag{3.4.1}$$

vagy

$$f(x_0+h)-f(x_0)=df(x_0)(h)+\alpha_f(x_0;h). \tag{3.4.2}$$

A $\Delta x_0(h) := (x_0+h)-x_0 = h$ és $\Delta f(x_0;h) := f(x_0+h)-f(x_0)$ mennyiségeket **argumentum növekménynek** illetve **függvénynövekménynek** nevezzük. Innen, a (3.4.2) alapján, $\Delta f(x_0;h) = df(x_0)(h) + \alpha_f(x_0;h)$.

Legyen az $f : A \to \mathbb{R}$ függvény differenciálható az $x \in \mathring{A}$ pontban. Ekkor

$$df(x)(h) = f'(x)\cdot h \tag{3.4.3}$$

Sajátos esetben, ha $f(x) \equiv x$, akkor a 17. Értelmezés alapján $f'(x) \equiv 1$, tehát $dx(h) = 1\cdot h = h$. Innen, a (3.4.3) szerint,

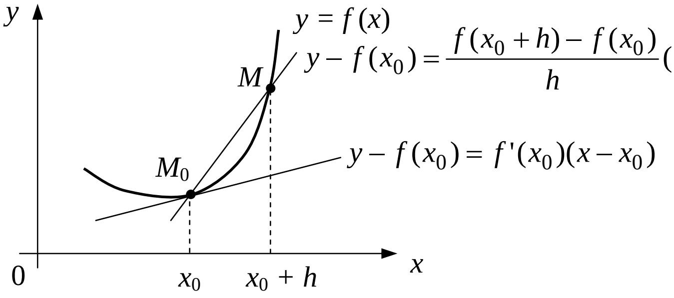
$$df(x)(h) = f'(x)dx(h) \tag{3.4.4}$$

Így $df(x) = f'(x)dx$, ami két függvény egyenlőségének tekinthető (a függvények független változója h). A (3.4.4)-ból kapjuk, hogy $\frac{df(x)(h)}{dx(h)} = f'(x)$ vagyis $\frac{df(x)}{dx}$ (a $df(x)$ és dx függvények hányadosa) állandó függvény és egyenlő $f'(x)$-szel. Ezért, Leibniz jelölését követve, a deriváltat $\frac{df(x)}{dx}$ szimbólum is jelölheti az $f'(x)$ jelölésmód mellett, amelyet J.L. Lagrange javasolt.

Geometriai jelentés:

Az f függvény grafikus képén tekintsük az $M_0(x_0, f(x_0))$ és $M(x_0+h, f(x_0+h))$ pontokat (lásd a 3.2. ábrát). Az M_0M szelő iránytangense: $m_{M_0M} = \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$. Ha az f deriválható az x_0 pontban, akkor $\lim\limits_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = f'(x_0)$; ezért az M_0M szelőknek létezik a határhelyzete, amikor $M \to M_0$ a függvény grafikonja mentén. A határhelyzetű egyenest a függvény grafikonjához az M_0 pontban húzott **érintőnek** nevezzük, melynek egyenlete: $y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$.

Fizikai jelentés: az anyagi pont szabad mozgásánál sebességen azt a fizikai mennyiséget értjük, amely számértékben megegyezik az


y
y = f(x)
y − f(x0) = (f(x0 + h) − f(x0))/h (
M
M0
y − f(x0) = f'(x0)(x − x0)
0
x0
x0 + h
x

egységnyi idő alatt megtett úttal. Ez az értelmezés a sebességnek csak a nagyságát adja meg. Iránya megegyezik a pályáéval, irányítása a mozgás irányítása. Ezek szerint, ha az anyagi pont Δt idő alatt Δs nagyságú útszakaszt tesz meg, a sebességet matematikailag a $v := \frac{\Delta s}{\Delta t}$ összefüggés értelmezi.

A sebességet értelmezni kell tetszőleges mozgás esetén is. Legyen az anyagi pont pályája a (γ), nem feltétlenül egyenes útszakasz, a helyzetét a t_1 és t_2 időpillanatokban jelölje az M_1 és M_2 pont. A t_1 és t_2 időpillanatoknak megfelelő helyzetét az O ponthoz viszonyítva meghatározzák az $\vec{r}(t_1)$ és $\vec{r}(t_2)$ helyzetvektorok (3.3. ábra).

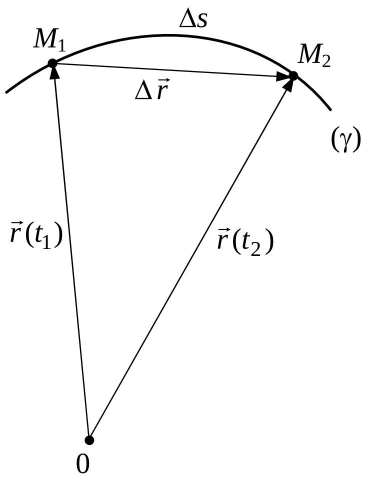
A $\Delta t := t_2 - t_1$ idő alatt az anyagi pont helyzetvektora $\Delta\vec{r} := \vec{r}(t_2) - \vec{r}(t_1)$ értékkel változik és a (γ) mentén megtesz Δs utat. A Δt idő alatti mozgás lefolyásáról felvilágosítást ad a $\Delta\vec{r}/\Delta t$ vektormennyiség. Ez a mennyiség a t időpillanatbeli és ennek közvetlen közelében lévő mozgást annál pontosabban írja le, minél kisebb a Δt időintervallum. A mozgás adott t időpillanatban jellemezhető a $\Delta\vec{r}/\Delta t$ vektor $\Delta t \to 0$ határesetben számított határértékével, vagyis

$$\vec{v} := \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt}$$

sebességvektorral, vagy egyszerűen a **sebességgel**. A $\Delta t \to 0$ esetén $\Delta\vec{r}$-nek megfelelő Δs út tart $\Delta\vec{r}$ felé, ezért a $d\vec{r}$ vektor nagysága: $\|d\vec{r}\| = ds$. Ennek megfelelően a sebesség számértéke:

$$\|\vec{v}\| = \frac{\|d\vec{r}\|}{dt} = \frac{ds}{dt}.$$

Mivel a sebesség a helyzetvektor időszerinti deriváltja, az iránya megegyezik a helyzetvektor hodográfjához, a t időpillanatnak megfelelő pontban húzott érintő irányításával. A helyzetvektor hodográfja nem más, mint az anyagi pont pályája, ezért a sebesség iránya azonos a pálya érintőjével, irányítása a mozgás lefolyásának megfelelően határozható



Δs
M_1
M_2
$\Delta\vec{r}$
(γ)
$\vec{r}(t_1)$
$\vec{r}(t_2)$
0

meg (lásd a 3.4. ábrát).

Az $\vec{r}(t)$ helyzetvektor és az anyagi pont által megtett s út szoros kapcsolatban van. Az $\vec{r}(t)$ úgy is felfogható, hogy az úton keresztül függ az időtől. Ilyen értelemben a sebességre a

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{ds} \cdot \frac{ds}{dt} = \|\vec{v}\| \cdot \vec{\tau}$$

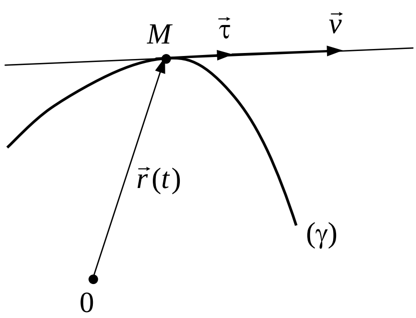
kifejezés adódik, ahol $\vec{\tau} := \frac{d\vec{r}}{ds}$ a sebességgel azonos irányú és irányítású egységvektor.

A természetben gyakoriak az olyan mozgások, amikor az anyagi pontnak tekinthető test egyenlő időközökben különböző nagyságú utakat tesz meg. Ekkor az anyagi pont sebességvektora az idő függvényében változik, tehát a mozgás különböző időpillanataiban a sebesség különböző értékekkel rendelkezik. A sebességváltozás ütemét jellemezni tudjuk, ha meghatározzuk a Δt időre eső $\Delta\vec{v}$ sebességváltozásnak és a Δt-nek a hányadosát, az $\vec{a}_k = \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t}$ mennyiséget, amelyet középgyorsulásnak nevezünk. A középgyorsulás annál pontosabban jellemzi a sebességváltozás ütemét, minél rövidebb a Δt időintervallum. Célszerú a $\Delta t \to 0$ esetre értelmezni, így következik, hogy

$$\vec{a} := \lim_{\Delta t \to 0} \vec{a}_k = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} = \frac{d\vec{v}}{dt},$$

amelyet **pillanatnyi gyorsulásnak**, vagy egyszerűen **gyorsulásnak** neve-zünk. Az előbbi értelmezésben szereplő $\vec{a}$ vektor, a $\Delta t \to 0$ időintervallumnak megfelelő $\Delta\vec{v}$ sebességváltozás irányával és irányításával megegyező vektor, míg számértéke egyenlő a sebesség idő szerinti deriváltjával.

17. Példa. Legyen $f(x) = \sin x$. Ekkor $f'(x) = \cos x$.


M
$\vec{\tau}$
$\vec{v}$
$\vec{r}(t)$
(γ)
0

Valóban,

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{\sin(x+h)-\sin x}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{2\sin\frac{h}{2}\cos\left(x+\frac{h}{2}\right)}{h} = \\ &= \lim_{h\to 0} \cos\left(x+\frac{h}{2}\right)\cdot \lim_{h\to 0}\frac{\sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}} = \cos x \end{aligned}$$

(felhasználtuk az $x \to \cos x$ függvény folytonosságát és a 3. Példát).

18. Példa. $\cos' x = -\sin x$.

$$\begin{aligned} \lim_{h\to 0}\frac{\cos(x+h)-\cos x}{h} &= \lim_{h\to 0}\frac{-2\sin\frac{h}{2}\sin\left(x+\frac{h}{2}\right)}{h} = \\ &= -\lim_{h\to 0}\sin\left(x+\frac{h}{2}\right)\cdot\lim_{h\to 0}\frac{\sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}} = -\sin x. \end{aligned}$$

19. Példa. *A parabolatükör optikai tulajdonsága*: tekintsük az $y=\frac{1}{2p}x^2$ egyenletű parabolát, $p>0$ (lásd a 3.5. ábrát).

Az $(x_0, y_0) = \left(x_0, \frac{1}{2p}x_0^2\right)$ pontban a parabolához húzott érintő egyenlete:

$$y - \frac{1}{2p}x_0^2 = \frac{1}{p}x_0(x-x_0),$$

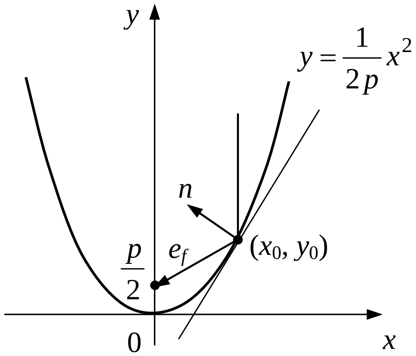
mert

$$\lim_{x\to x_0}\frac{\frac{1}{2p}x^2-\frac{1}{2p}x_0^2}{x-x_0} = \frac{1}{2p}\lim_{x\to x_0}(x+x_0) = \frac{1}{p}x_0.$$

Innen $\frac{1}{p}x_0(x-x_0)-(y-y_0)=0$.

Az $n\left(-\frac{1}{p}x_0, 1\right)$ vektor merőleges az érintőre. Igazoljuk, hogy az $e_y(0,1)$ és $e_f\left(-x_0, \frac{p}{2}-y_0\right)$ vektorok egyenlő nagyságú szögeket zárnak be az n vektorral. Az e_y vektor az Oy tengely egységvektora, míg e_f az (x_0, y_0) kezdőpontú és $\left(0, \frac{p}{2}\right)$ végpontú vektor. Ekkor

$$\cos\widehat{e_y, n} = \frac{e_y\cdot n}{\|e_y\|\cdot\|n\|} = \frac{1}{\|n\|}$$


y
$y = \frac{1}{2p} x^2$
n
$\frac{p}{2}$
e_f
(x_0, y_0)
0
x

és

$$\begin{aligned}
\cos\widehat{e_f, n} &= \frac{e_f \cdot n}{\|e_f\| \cdot \|n\|} = \frac{\frac{1}{p}x_0^2 + \frac{p}{2} - \frac{1}{2p}x_0^2}{\|n\|\sqrt{x_0^2 + \left(\frac{p}{2} - y_0\right)^2}} = \\
&= \frac{\frac{p}{2} + \frac{1}{2p}x_0^2}{\|n\|\sqrt{\left(\frac{p}{2} + \frac{1}{2p}x_0^2\right)^2}} = \frac{1}{\|n\|}.
\end{aligned}$$

Így a tükör tengelyével (az Oy tengellyel) párhuzamosan érkező fénysugár a tükör fókuszán (a $(0, \frac{p}{2})$ ponton) halad át.

20. Példa. Legyen $f(x) = |x|$, $x \in \mathbb{R}$ és $x_0 = 0$ Ekkor

$$\lim_{x \nearrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \nearrow x_0} \frac{|x| - 0}{x - 0} = \lim_{x \nearrow x_0} \frac{-x}{x} = -1$$

és

$$\lim_{x \searrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \searrow x_0} \frac{|x| - 0}{x - 0} = \lim_{x \searrow x_0} \frac{x}{x} = 1.$$

Következésképp az f függvény nem deriválható az x_0 pontban.

18. Értelmezés. *Legyen* $f : A \to \mathbb{R}$ $(A \subseteq \mathbb{R})$ *és* $x_0 \in \overset{\circ}{A}$. *Az* f *függvénynek létezik a* ***bal (jobb) oldali deriváltja*** *az* x_0 *pontban, ha létezik a* $\lim\limits_{x \nearrow x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ *(illetve* $\lim\limits_{x \searrow x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$*) véges határérték. Jelölés:* $f'_b(x_0)$ *(illetve* $f'_j(x_0)$*).*

21. Példa. Ha $f(x) = e^x$, $x \in \mathbb{R}$, akkor $f'(x) = e^x$.

Valóban,

$$\begin{aligned}
\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} &= \lim_{h \to 0} \frac{e^{x+h} - e^x}{h} = e^x \cdot \lim_{h \to 0} \frac{e^h - 1}{h} = \\
&= e^x \cdot \lim_{t \to 0} \frac{t}{\ln(1+t)} = e^x,
\end{aligned}$$

mivel

$$\lim_{t\to 0}\frac{\ln(1+t)}{t}=\lim_{t\to 0}\ln(1+t)^{\frac{1}{t}}=\ln\left(\lim_{t\to 0}(1+t)^{\frac{1}{t}}\right)=\ln e=1.$$

A $\lim\limits_{t\to 0}(1+t)^{\frac{1}{t}}=e$ határérték a

$$\lim_{y\to\infty}\left(1+\frac{1}{y}\right)^{y}=e=\lim_{y\to-\infty}\left(1+\frac{1}{y}\right)^{y}$$

határértékek következménye. A $\lim\limits_{y\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{y}\right)^{y}=e$ az

$$\left(1+\frac{1}{[y]+1}\right)^{[y]}<\left(1+\frac{1}{y}\right)^{y}<\left(1+\frac{1}{[y]}\right)^{[y]+1},\quad y\geq 1$$

egyenlőtlenségekből és a $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}=e$ határértékből következik. Továbbá,

$$\begin{aligned}\lim_{y\to-\infty}\left(1+\frac{1}{y}\right)^{y} &= \lim_{z\to\infty}\left(1-\frac{1}{z}\right)^{-z}=\lim_{z\to\infty}\left(1+\frac{1}{z-1}\right)^{z}=\\ &= \lim_{z\to\infty}\left(1+\frac{1}{z-1}\right)^{z-1}\cdot\left(1+\frac{1}{z-1}\right)=e,\end{aligned}$$

ahol felhasználtuk az $y=-z$ jelölést és a már igazolt $\lim\limits_{y\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{y}\right)^{y}=e$ határértéket.

Hasonló ötlettel igazolható, hogy $f'(x)=\frac{1}{x}$, ha $f(x)=\ln|x|$, $x\neq 0$; illetve $f'(x)=a^x\ln a$, ha $f(x)=a^x$, $x\in\mathbb{R}$, $a>0$.

15. Tétel. *Ha az $f:A\to\mathbb{R}$ $(A\subseteq\mathbb{R})$ függvény deriválható az $x_0\in\mathring{A}$ pontban, akkor f folytonos az x_0 pontban.*

Bizonyítás. Mivel $x\in A$, $x\neq x_0$ esetén

$$f(x)=f(x_0)+\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\cdot(x-x_0),$$

ezért a

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0)$$

feltétel miatt $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$, vagyis f folytonos az x_0 pontban. □

A fordított állítás általában nem teljesül (lásd a 20. Példát).

A következő tételek a deriválhatóság és a függvényekkel végezhető műveletek kapcsolatára vonatkoznak.

16. Tétel. *Ha az $f, g : A \to \mathbb{R}$ $(A \subseteq \mathbb{R})$ függvények deriválhatóak az $x_0 \in \overset{\circ}{A}$ pontban, akkor*

a) $f + g : A \to \mathbb{R}$ deriválható az x_0 pontban, és

$$(f + g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0);$$

b) $f \cdot g : A \to \mathbb{R}$ deriválható az x_0 pontban, és

$$(f \cdot g)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0);$$

c) $\frac{f}{g} : A \to \mathbb{R}$ deriválható az x_0 pontban $(g(x) \neq 0,\ x \in A)$, és

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{g^2(x_0)}.$$

Bizonyítás. Az a), b) és c) pontok bizonyítása hasonlóan történik, ezért a c) esetet igazoljuk.

A (3.4.1) alapján írható:

$$\begin{aligned}
\left(\frac{f}{g}\right)(x_0+h) - \left(\frac{f}{g}\right)(x_0) &= \frac{f(x_0+h)}{g(x_0+h)} - \frac{f(x_0)}{g(x_0)} = \\
= \ & \frac{1}{g(x_0)g(x_0+h)} \cdot [f(x_0+h)g(x_0) - f(x_0)g(x_0+h)] = \\
= \ & \frac{1}{g(x_0)g(x_0+h)} \cdot [(f(x_0) + f'(x_0)h + \alpha_f(x_0;h)) \cdot g(x_0) - \\
& - f(x_0) \cdot (g(x_0) + g'(x_0)h + \alpha_g(x_0;h))] = \\
= \ & \frac{1}{g(x_0)g(x_0+h)} \cdot [(f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0))h + \\
& + g(x_0)\alpha_f(x_0;h) - f(x_0)\alpha_g(x_0;h)].
\end{aligned}$$

A 15. Tétel alapján

$$\lim_{h\to 0} \frac{1}{g(x_0)g(x_0+h)} = \frac{1}{g^2(x_0)}.$$

Így

$$\begin{aligned}
&\lim_{h\to 0} \frac{\left(\frac{f}{g}\right)(x_0+h) - \left(\frac{f}{g}\right)(x_0)}{h} = \\
&\quad = \lim_{h\to 0} \frac{1}{g(x_0)g(x_0+h)} \cdot \lim_{h\to 0} \left[f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0) + \right. \\
&\qquad \left. + g(x_0) \cdot \frac{\alpha_f(x_0;h)}{h} - f(x_0) \cdot \frac{\alpha_g(x_0;h)}{h}\right] = \\
&\quad = \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{g^2(x_0)},
\end{aligned}$$

vagyis

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{g^2(x_0)}$$

□

17. Következmény. *a) Ha* $f, g : A \to \mathbb{R}$ $(A \subseteq \mathbb{R})$ *deriválható füg-*

gvények az $x_0 \in \overset{\circ}{A}$ *pontban, és* $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$ *tetszőlegesek, akkor*

$$(\alpha_1 f + \alpha_2 g)'(x_0) = \alpha_1 f'(x_0) + \alpha_2 g'(x_0).$$

b) Ha $f_1, \ldots, f_n : A \to \mathbb{R}$ $(A \subseteq \mathbb{R})$ *deriválható függvények az* $x_0 \in \overset{\circ}{A}$ *pontban, akkor*

$$\begin{aligned}(f_1 \ldots f_n)'(x_0) &= f_1'(x_0) f_2(x_0) \ldots f_n(x_0) + f_1(x_0) f_2'(x_0) f_3(x_0) \ldots f_n(x_0) + \\ &+ \ \ldots + \ f_1(x_0) \ldots f_{n-1}(x_0) f_n'(x_0).\end{aligned}$$

22. Példa.

$$\mathrm{tg}' x = \frac{1}{\cos^2 x}; \quad \mathrm{ctg}' x = -\frac{1}{\sin^2 x}.$$

Felhasználva a 17. és 18. Példákat, a 16. Tétel, c) pontját,

$$\begin{aligned}\mathrm{tg}' x &= \left(\frac{\sin}{\cos}\right)'(x) = \frac{\sin' x \cos x - \sin x \cos' x}{\cos^2 x} = \\ &= \frac{\cos x \cos x + \sin x \sin x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}.\end{aligned}$$

Hasonlóan a ctg függvény esetén is.

23. Példa. Ha $P(x) = c_0 + c_1 x + \ldots + c_n x^n$ polinomfüggvény, akkor $P'(x) = c_1 + 2c_2 x + \ldots + n c_n x^{n-1}$, mert a $\frac{dx}{dx} = 1$ és a 17. Következmény, b) pontja alapján $\frac{dx^n}{dx} = n x^{n-1}$; így a 17. Következmény, a) pontjának alkalmazásával megkapjuk a kért állítást.

18. Tétel. *(összetett függvény deriváltja). Ha az* $f : A \to \mathbb{R}$ $(A \subseteq \mathbb{R})$ *függvény deriválható az* $x_0 \in \overset{\circ}{A}$ *pontban, a* $g : B \to \mathbb{R}$ $(f(A) \subseteq B \subseteq \mathbb{R})$ *függvény deriválható az* $y_0 = f(x_0) \in \overset{\circ}{B}$ *pontban, akkor a* $g \circ f : A \to \mathbb{R}$ *összetett függvény deriválható az* x_0 *pontban, és* $(g \circ f)'(x_0) = g'(y_0) \cdot f'(x_0)$.

Bizonyítás. A feltételek alapján (lásd (3.4.1)):

$$\begin{aligned} f(x_0+h)-f(x_0) &= f'(x_0)\ h+\alpha_f(x_0;h) \quad \text{és} \\ g(y_0+k)-g(y_0) &= g'(y_0)\ k+\alpha_g(y_0;k), \end{aligned}$$

ahol

$$\lim_{h\to 0}\frac{\alpha_f(x_0;h)}{h}=0 \quad \text{és} \quad \lim_{k\to 0}\frac{\alpha_g(y_0;k)}{k}=0.$$

Bevezetve a $k := f(x_0+h)-f(x_0)$ jelölést, írható:

$$\begin{aligned} &(g\circ f)(x_0+h)-(g\circ f)(x_0)= \\ &= g(f(x_0+h))-g(f(x_0))= \\ &= g(f(x_0)+k)-g(f(x_0))= \\ &= g(y_0+k)-g(y_0)=g'(y_0)k+\alpha_g(y_0;k)= \\ &= g'(y_0)\cdot[f(x_0+h)-f(x_0)]+\alpha_g(y_0;k)= \\ &= g'(y_0)\cdot[f'(x_0)h+\alpha_f(x_0;h)]+\alpha_g(y_0;k)= \\ &= g'(y_0)f'(x_0)\cdot h+g'(y_0)\alpha_f(x_0;h)+\alpha_g(y_0;k) \end{aligned} \tag{3.4.5}$$

Másrészt, mivel f deriválható x_0-ban, ezért f folytonos az x_0 pontban (15. Tétel). Így

$$\lim_{h\to 0}k=\lim_{h\to 0}[f(x_0+h)-f(x_0)]=0,$$

ezért

$$\lim_{h\to 0}\frac{\alpha_g(y_0;k)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\alpha_g(y_0;k)}{k}\cdot\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}=0.$$

Innen, a (3.4.5) alapján,

$$\begin{aligned}
&\lim_{h\to 0}\frac{(g\circ f)(x_0+h)-(g\circ f)(x_0)}{h} = \\
&\quad = g'(y_0)f'(x_0)+g'(y_0)\cdot\lim_{h\to 0}\frac{\alpha_f(x_0;h)}{h}+\lim_{h\to 0}\frac{\alpha_g(y_0;k)}{h} = \\
&\quad = g'(y_0)f'(x_0),
\end{aligned}$$

vagyis $(g\circ f)'(x_0)=g'(y_0)\cdot f'(x_0)$ □

19. Következmény. *Ha a deriválható $y_1=f_1(x),\dots,y_n=f_n(y_{n-1})$ függvényeknek létezik az $f_n\circ\ldots\circ f_1$ összetett függvénye, akkor $f_n\circ\ldots\circ f_1$ deriválható és $(f_n\circ\ldots\circ f_1)'\,(x)=f_n'(y_{n-1})f_{n-1}'(y_{n-2})\ldots f_1'(x)$.*

24. Példa. Ha $h(x)=x^\alpha$, $x>0$ és $\alpha\in\mathbb{R}$, akkor $h'(x)=\alpha x^{\alpha-1}$.

Valóban, ha $f(x)=\alpha\ln x$ és $g(y)=e^y$, akkor $h(x)=(g\circ f)(x)$. A 21. Példa és a 18. Tétel szerint

$$h'(x)=g'(f(x))\cdot f'(x)=e^{f(x)}\cdot\frac{\alpha}{x}=x^\alpha\cdot\frac{\alpha}{x}=\alpha x^{\alpha-1}.$$

25. Példa. Legyen u és v deriválható függvények, $u>0$. Ekkor

$$\begin{aligned}
\frac{du(x)^{v(x)}}{dx} &= \frac{de^{v(x)\ln u(x)}}{dx}=e^{v(x)\ln u(x)}\cdot(v'(x)\cdot\ln u(x)+v(x)\cdot\frac{u'(x)}{u(x)}) = \\
&= u^{v(x)}\cdot v'(x)\cdot\ln u(x)+v(x)\cdot u(x)^{v(x)-1}\cdot u'(x)
\end{aligned}$$

20. Tétel. *(inverz függvény deriváltja). Legyen $f:A\to B$ bijektív függvény, ahol $A=\overset{\circ}{A}\subseteq\mathbb{R}$ és $B=\overset{\circ}{B}\subseteq\mathbb{R}$. Ha f deriválható az $x_0\in A$ pontban és $f'(x_0)\neq 0$, akkor az $f^{-1}:B\to A$ függvény deriválható az $y_0=f(x_0)$ pontban és $(f^{-1})'(y_0)=(f'(x_0))^{-1}$.*

Bizonyítás. Mivel f bijektív, ezért $x\neq x_0$ esetén $f(x)-f(x_0)\neq 0$ és $f^{-1}(y)-f^{-1}(y_0)\neq 0$, ahol $y=f(x)$. Továbbá, mivel f folytonos x_0-ban és f^{-1} folytonos az y_0-ban, ezért $(A \ni x \to x_0) \Leftrightarrow (B \ni y \to y_0)$. Ekkor

$$\lim_{y \to y_0} \frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)}{y - y_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{x - x_0}{f(x) - f(x_0)} = \lim_{x \to x_0} \frac{1}{\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}} = \frac{1}{f'(x_0)},$$

figyelembe véve a 2. Tétel, f) pontját. Így az $f^{-1} : B \to A$ függvény deriválható az y_0 pontban és $(f^{-1})'(y_0) = (f'(x_0))^{-1}$. □

26. Példa.

$$\arcsin' y = \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}, \quad |y| < 1.$$

A $\sin : \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \to [-1, 1]$ függvény inverze az $\arcsin : [-1, 1] \to [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ függvény, és $\sin' x = \cos x \neq 0$, ha $x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$. Így a 20. Tétel alapján $y \in \left]-1, 1\right[$ esetén

$$\arcsin' y = \frac{1}{\sin' x} = \frac{1}{\cos x} = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 x}} = \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}.$$

Hasonló eljárással

$$\arccos' y = -\frac{1}{\sqrt{1-y^2}}, \quad \text{ha } |y| < 1;$$

$$\operatorname{arctg}' y = \frac{1}{1+y^2}, \text{ ha } y \in \mathbb{R}; \quad \operatorname{arcctg}' y = -\frac{1}{1+y^2}, \text{ ha } y \in \mathbb{R}.$$

27. Példa. *Hiperbolikus függvények*: a

$$\begin{aligned}
\operatorname{sh} x &= \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}), && x \in \mathbb{R};\\
\operatorname{ch} x &= \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}), && x \in \mathbb{R};\\
\operatorname{th} x &= \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}, && x \in \mathbb{R};\\
\operatorname{cth} x &= \frac{\operatorname{ch} x}{\operatorname{sh} x} = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}, && x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}
\end{aligned}$$

függvényeket rendre **szinusz hiperbolikusz, koszinusz hiperbo-**

likusz, tangens hiperbolikusz és **kotangens hiperbolikusz** függvénynek nevezzük. Az értelmezésből következik, hogy $\operatorname{sh}(-x) = -\operatorname{sh} x$, $\operatorname{ch}(-x) = \operatorname{ch} x$, $\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1$ és $\operatorname{ch}^2 x + \operatorname{sh}^2 x = \operatorname{ch}(2x)$. A deriválási szabályok szerint:

$$\operatorname{sh}' x = \operatorname{ch} x, \quad \operatorname{ch}' x = \operatorname{sh} x, \quad \operatorname{th}' x = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x} \quad \text{és} \quad \operatorname{cth}' x = -\frac{1}{\operatorname{sh}^2 x}.$$

A hiperbolikus függvények inverzeit **area függvényeknek** nevezzük. A $sh\, x = y$ megoldása: $\frac{1}{2}(e^x - e^{-x}) = y$ vagy $e^x = y + \sqrt{1+y^2}$. Így $x = \ln(y + \sqrt{1+y^2})$; következésképpen $\operatorname{arsh} y = \ln(y + \sqrt{1+y^2})$, $y \in \mathbb{R}$, amit **area szinusz hiperbolikusz** függvénynek nevezünk. A 20. Tétel alapján

$$\operatorname{arsh}' y = \frac{1}{\operatorname{sh}' x} = \frac{1}{\operatorname{ch} x} = \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{sh}^2 x}} = \frac{1}{\sqrt{1+y^2}}.$$

A ch függvény nem monoton, viszont a $]-\infty, 0]$ és $[0, \infty[$ intervallumokra való leszűkítései monotonok. Mivel $y = \operatorname{ch} x \geq 1$, ezért értelmezhető az $\operatorname{arch}_+ : [1,\infty[\to [0,\infty[$, $\operatorname{arch}_+ y = \ln(y + \sqrt{y^2-1})$ illetve $\operatorname{arch}_- : [1,\infty[\to]-\infty, 0]$, $\operatorname{arch}_- y = \ln(y - \sqrt{y^2-1})$ inverz függvények, melyek elnevezései **area koszinusz hiperbolikusz** függvények. A 20. Tétel segítségével

$$\operatorname{arch}'_+ y = \frac{1}{\sqrt{y^2-1}}, \quad y > 1 \quad \text{és} \quad \operatorname{arch}'_- y = -\frac{1}{\sqrt{y^2-1}}, \quad y > 1.$$

A th és cth függvények inverzei az **area tangens hiperbolikusz** függvény:

$$\operatorname{arth} :]-1, 1[\to \mathbb{R}, \quad \operatorname{arth} y = \frac{1}{2} \ln \frac{1+y}{1-y},$$

illetve az **area kotangens hiperbolikusz** függvény:

$$\operatorname{arcth} : \mathbb{R} \setminus [-1,1] \to \mathbb{R},\ \operatorname{arcth} y = \frac{1}{2} \ln \frac{y+1}{y-1}.$$

Ekkor

$$\operatorname{arth}' y = \frac{1}{\operatorname{th}' x} = \frac{1}{\frac{1}{\operatorname{ch}^2 x}} = \operatorname{ch}^2 x = \frac{1}{1-\operatorname{th}^2 x} = \frac{1}{1-y^2}, \quad |y| < 1.$$

Hasonlóan

$$\operatorname{arcth}' y = -\frac{1}{y^2-1}, \quad |y| > 1.$$

A 16., 18. és 20. Tételek átírhatók differenciálokra is. Ezt tartalmazza a következő tétel:

21. Tétel. *a) Ha az $f, g : A \to \mathbb{R}$ ($A = \overset{\circ}{A} \subseteq \mathbb{R}$) függvények differenciálhatóak az A halmazon, akkor az $f+g$, $f \cdot g$ és $\frac{f}{g}$ is differenciálhatóak, és*

$$\begin{aligned} d(f+g)(x) &= df(x) + dg(x), \\ d(f \cdot g)(x) &= g(x)\, df(x) + f(x)\, dg(x) \qquad \textit{illetve} \\ d\left(\frac{f}{g}\right)(x) &= \frac{g(x)\, df(x) - f(x)\, dg(x)}{g^2(x)}, \quad \textit{ha} \quad g(x) \neq 0 \quad \textit{az} \quad x \in A \ \textit{esetén.} \end{aligned}$$

b) Ha $f : A \to \mathbb{R}$ differenciálható az $x_0 \in \overset{\circ}{A}$ pontban és $g : B \to \mathbb{R}$ ($f(A) \subseteq B \subseteq \mathbb{R}$) differenciálható az $y_0 = f(x_0) \in \overset{\circ}{B}$ pontban, akkor $g \circ f : A \to \mathbb{R}$ differenciálható az x_0 pontban, és

$$d(g \circ f)(x_0) = dg(y_0) \circ df(x_0).$$

c) Legyen $f : A \to B$ bijektív függvény ($A = \overset{\circ}{A} \subseteq \mathbb{R}$ és $B = \overset{\circ}{B} \subseteq \mathbb{R}$). Ha f differenciálható az $x_0 \in A$ pontban és létezik a $df(x_0)$ függvény inverze, akkor az f^{-1} függvény differenciálható az $y_0 = f(x_0) \in B$

pontban, és

$$df^{-1}(y_0) = [df(x_0)]^{-1}.$$

A (3.4.3) alapján megállapítható, hogy a 21. Tétel, c) pontjában $[df(x_0)]^{-1}$ akkor és csak akkor létezik, ha $f'(x_0) \neq 0$.

3.5. A differenciálszámítás alapvető tételei

19. Értelmezés. *Adott az $f : A \to \mathbb{R}$ $(A \subseteq \mathbb{R})$ függvény. Az $x_0 \in A$ pontot az f függvény* ***helyi maximum (minimum) pontjának*** *nevezzük, ha létezik $V \in \mathcal{V}(x_0)$, amelyre $f(x) \leq f(x_0)$ (illetve $f(x_0) \leq f(x)$), bármely $x \in V \cap A$ esetén. Az $x_0 \in A$ pont az f függvény* ***szigorúan helyi maximum (minimum) pontja****, ha létezik $V \in \mathcal{V}(x_0)$, amelyre $f(x) < f(x_0)$ (illetve $f(x_0) < f(x)$), bármely $x \in V \cap A$, $x \neq x_0$ esetén. Az $x_0 \in A$ pont az f függvény* ***helyi szélsőérték pontja****, ha x_0 az f függvény helyi maximum vagy helyi minimum pontja. Ekkor az f függvénynek az x_0 pontban* ***helyi szélsőértéke*** *van.*

28. Példa. Az $f : [-1, \infty[\to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{ha } -1 \leq x < 2 \\ 4, & \text{ha } x \geq 2 \end{cases}$ függvény szélsőérték pontjai: $x_0 = -1$ szigorúan helyi maximum pont; $x_0 = 0$ szigorúan helyi minimum pont; $x_0 = 2$ helyi maximum pont.

29. Példa. Az $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sin \frac{1}{x}$ függvény szigorúan helyi maximum pontjai $x_k = \left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right)^{-1}$, $k \in \mathbb{Z}$, míg a szigorúan helyi minimum pontjai $x_k = \left(-\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right)^{-1}$, $k \in \mathbb{Z}$.

22. Tétel. *(Fermat) Ha az $f : A \to \mathbb{R}$ $(A \subseteq \mathbb{R})$ függvénynek az $x_0 \in \overset{\circ}{A}$ pont helyi szélsőérték pontja és f deriválható az x_0 pontban, akkor $f'(x_0) = 0$.*

Bizonyítás. Feltételezzük, hogy x_0 az f függvény helyi maximum pontja. Mivel $x_0 \in \overset{\circ}{A}$, ezért létezik $\delta > 0$ úgy, hogy $]x_0 - \delta, x_0 + \delta[\subseteq A$

és $f(x) \leq f(x_0)$, bármely $x \in \,]x_0-\delta, x_0+\delta[$ esetén. Innen, ha $x \in \,]x_0-\delta, x_0[$, akkor $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \geq 0$ illetve ha $x \in \,]x_0, x_0+\delta[$, akkor $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \leq 0$. Következésképp:

$$f'(x_0) = \lim_{x \nearrow x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \geq 0 \qquad \text{és}$$
$$f'(x_0) = \lim_{x \searrow x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \leq 0.$$

Így $f'(x_0) = 0$. □

A Fermat-tétel *geometriailag* azt jelenti, hogy az $(x_0, f(x_0))$ pontban a függvény grafikus képéhez húzott érintő párhuzamos az Ox tengellyel. *Fizikailag* azt fejezi ki, hogy az egyenes vonalú mozgás sebessége zéró, amikor a mozgás irányítása ellentétes lesz.

23. Tétel. *(Rolle). Ha az $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ függvény folytonos az $[a,b]$ intervallumon, deriválható az $]a,b[$ intervallumon és $f(a) = f(b)$, akkor létezik $\xi \in]a,b[$ úgy, hogy $f'(\xi) = 0$.*

Bizonyítás. Mivel $f \in C[a,b]$, ezért a 13. Tétel alapján léteznek az x_m, $x_M \in [a,b]$ pontok úgy, hogy x_m az f függvény minimum pontja és x_M az f függvény maximum pontja. Ha $f(x_m) = f(x_M)$, akkor f állandó függvény, így $f'(x) \equiv 0$, $x \in]a,b[$. Ebben az esetben az állítás nyilvánvaló. Ha $f(x_m) < f(x_M)$, akkor az $f(a) = f(b)$ feltétel miatt $x_m \in]a,b[$ vagy $x_M \in]a,b[$. A Fermat-tétel (22. Tétel) alkalmazásával $f'(x_m) = 0$ vagy $f'(x_M) = 0$. Így létezik $\xi \in]a,b[$, amelyre $f'(\xi) = 0$. □

24. Tétel. *(Cauchy). Adottak az $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ függvények úgy, hogy f, g folytonosak az $[a,b]$ intervallumon, f, g deriválhatóak az $]a,b[$ intervallumon és $g'(x) \neq 0$, bármely $x \in]a,b[$ esetén. Ekkor létezik $\xi \in$ $]a,b[$ úgy, hogy*

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}.$$

Bizonyítás. A Rolle-tételt alkalmazzuk a $\varphi : [a,b] \to \mathbb{R}$,

$$\varphi(x) = f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} \cdot g(x)$$

függvényre. A φ függvény értelmezhető, mert $g(a) \neq g(b)$ (ellenkező esetben a Rolle-tétel szerint létezik $\xi \in]a,b[$, amelyre $g'(\xi) = 0$, ellentmondás). A feltételek alapján $\varphi \in C[a,b]$ és φ deriválható az $]a,b[$ intervallumon; ugyanakkor

$$\varphi(a) = \frac{f(a)g(b) - f(b)g(a)}{g(b) - g(a)} = \varphi(b).$$

Másrészt

$$\varphi'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} \cdot g'(x),\ x \in]a,b[.$$

Így a 23. Tétel alapján létezik $\xi \in]a,b[$, amelyre $\varphi'(\xi) = 0$, vagyis

$$\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}.$$

□

A 24. Tételben szereplő $g'(x) \neq 0$, bármely $x \in]a,b[$ esetén, feltétel *nem* szükséges. E nélkül a feltétel nélkül is érvényes a tétel a következő formában: *ha az* $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ *függvények folytonosak az* $[a,b]$ *intervallumon és deriválhatóak az* $]a,b[$ *intervallumon, akkor létezik* $\xi \in]a,b[$ *úgy, hogy*

$$[f(b) - f(a)]\ g'(\xi) = [g(b) - g(a)]\ f'(\xi).$$

A bizonyítás a 24. Tétel igazolásához hasonló, a Rolle-tételt alkalmazzuk a $\varphi : [a,b] \to \mathbb{R}$, $\varphi(t) = [f(b) - f(a)]g(t) - [g(b) - g(a)]f(t)$ függvényre.

25. Következmény. *(Lagrange). Ha az $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ függvény folytonos az $[a,b]$ intervallumon, deriválható az $]a,b[$ intervallumon, akkor létezik $\xi \in]a,b[$, amelyre*

$$f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Bizonyítás. A 24. Tétel következménye $g(x) = x$ esetén. □

A Lagrange-tétel más elnevezése: *véges növekedés tétele* vagy *Lagrange-féle középértéktétel.*

Geometriailag ez a tétel azt jelenti, hogy valamely $\xi \in]a,b[$ pont esetén a $(\xi, f(\xi))$ pontban a függvény grafikus képéhez húzott érintő párhuzamos az $(a, f(a))$ és $(b, f(b))$ pontokat összekötő egyenessel.

Ha a tételben szereplő x változó az időt jelöli, és $f(b) - f(a)$ az anyagi pontnak $(b-a)$ idő alatt való egyenes vonalú elmozdulását, akkor a Lag-range-tétel a következőt állítja: az anyagi pont $f'(x)$ sebessége valamely $\xi \in]a,b[$ időpillanatban olyan, hogy ha az anyagi pont állandó $f'(\xi)$ sebességgel mozogna az $[a,b]$ időintervallum alatt, akkor $f'(\xi)$ helyettesíthető az $(f(b)-f(a))/(b-a)$ mennyiséggel. Az $f'(\xi)$ elnevezése a $(b - a)$ időre eső *átlagsebesség.*

Ha a mozgás nem egyenes vonalú, akkor az átlagsebesség nem feltétlenül létezik. Valóban, feltételezzük, hogy egy anyagi pont az egységnyi sugarú körön mozog az $\omega = 1$ állandó szögsebességgel. A mozgástörvény: $r(t) = (\cos t, \sin t)$; innen $r'(t) = v(t) = (-\sin t, \cos t)$ és $\|v(t)\| = \sqrt{\sin^2 t + \cos^2 t} = 1$. Az anyagi pont helyzetéről tudjuk, hogy $r(0) = r(2\pi) = (1, 0)$, ezért $r(2\pi) - r(0) = v(\xi) \cdot (2\pi - 0)$, vagyis $v(\xi) = 0$, ellentmondás. Viszont – ahogy később látni fogjuk a 9. Fejezet, 27. Tételében – érvényes a következő tulajdonság:

$$\|r(b) - r(a)\| \leq \sup\{\|r'(t)\| : t \in]a,b[\} \cdot |b - a|.$$

26. Következmény. *Az $f :]a,b[\to \mathbb{R}$ deriválható függvényre érvényesek a következő állítások:*

a) $f'(x) > 0$, bármely $x \in]a,b[\Rightarrow f$ szigorúan növekvő az $]a,b[$ intervallumon $\Rightarrow f'(x) \geq 0$, bármely $x \in]a,b[$ esetén;

b) $f'(x) \geq 0$, bármely $x \in]a,b[\Rightarrow f$ növekvő az $]a,b[$ intervallumon $\Rightarrow f'(x) \geq 0$, bármely $x \in]a,b[$ esetén;

c) $f'(x) \equiv 0$, bármely $x \in]a,b[\Rightarrow f$ állandó függvény az $]a,b[$ intervallumon $\Rightarrow f'(x) \equiv 0$, bármely $x \in]a,b[$ esetén;

d) $f'(x) \leq 0$, bármely $x \in]a,b[\Rightarrow f$ csökkenő az $]a,b[$ intervallumon $\Rightarrow f'(x) \leq 0$, bármely $x \in]a,b[$ esetén;

e) $f'(x) < 0$, bármely $x \in]a,b[\Rightarrow f$ szigorúan csökkenő az $]a,b[$ intervallumon $\Rightarrow f'(x) \leq 0$, bármely $x \in]a,b[$ esetén.

Bizonyítás. Az f függvény monotonítása a Lagrange-tételből következik, amely szerint bármely $x_1, x_2 \in]a,b[$, $x_1 < x_2$ esetén létezik $\xi \in]x_1, x_2[$ úgy, hogy $f(x_2) - f(x_1) = f'(\xi)(x_2 - x_1)$. Így $\operatorname{sgn}(f(x_2) - f(x_1)) = \operatorname{sgn} f'(\xi)$, ami az állításokat igazolja.

Az f' függvény előjelére vonatkozó állítások a 17. Értelmezésből következnek. Igazoljuk például az a) állítást. Mivel

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

és $h > 0$ esetén $f(x+h) - f(x) > 0$ illetve $h < 0$ esetén $f(x+h) - f(x) < 0$, ezért a 2. Tétel, j) pontja szerint $f'(x) \geq 0$. □

27. Következmény. *Az $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ folytonos függvény akkor és csak akkor állandó, ha f deriválható az $]a,b]$ intervallumon és $f'(x) = 0$, bármely $x \in]a,b[$ esetén.*

Bizonyítás. Azonnali a 25. Következmény alapján. □

28. Tétel. *(Darboux). Ha $f :]a,b[\to \mathbb{R}$ deriválható függvény, akkor*

f' Darboux-tulajdonságú az $]a, b[$ intervallumon.

Bizonyítás. Legyen $x_1, x_2 \in]a, b[$, $x_1 < x_2$ tetszőleges pontok; feltételezhető, hogy $f'(x_1) < f'(x_2)$. Ha $\lambda \in]f'(x_1), f'(x_2)[$, akkor igazolni kell, hogy létezik $c \in]x_1, x_2[$ úgy, hogy $f'(c) = \lambda$.

Tekintsük a $g : [x_1, x_2] \to \mathbb{R}$, $g(x) = f(x) - \lambda x$ függvényt. Ekkor $g'(x_1) = f'(x_1) - \lambda < 0$ és $g'(x_2) = f'(x_2) - \lambda > 0$. Innen

$$\lim_{x \searrow x_1} \frac{g(x) - g(x_1)}{x - x_1} < 0 \quad \text{és} \quad \lim_{x \nearrow x_2} \frac{g(x) - g(x_2)}{x - x_2} > 0.$$

Így a 2. Tétel, k) pontja szerint léteznek az $U_1 \in \mathcal{V}(x_1)$ és $U_2 \in \mathcal{V}(x_2)$ úgy, hogy $\frac{g(x)-g(x_1)}{x-x_1} < 0$, ha $x \in U_1 \cap]x_1, x_2[$ illetve $\frac{g(x)-g(x_2)}{x-x_2} > 0$, ha $x \in U_2 \cap]x_1, x_2[$. Innen, ha $x \in U_1 \cap]x_1, x_2[$, akkor $g(x) < g(x_1)$ illetve ha $x \in U_2 \cap]x_1, x_2[$, akkor $g(x) < g(x_2)$. Így a g függvény a minimumát az $]x_1, x_2[$ intervallumban veszi fel (a g függvény deriválható, ezért g folytonos (15. Tétel), így a g-nek van minimum pontja (13. Tétel)). A minimum pontra alkalmazva Fermat-tételét (22. Tétel) következik, hogy létezik $c \in]x_1, x_2[$ úgy, hogy $g'(c) = 0$, tehát $f'(c) - \lambda = 0$, amit igazolni kellett. □

A következő tétel elégséges feltétel arra nézve, hogy két valós változós valós függvény hányadosának a határértéke létezzen, melynek kiszámítására módszert is szolgáltat.

29. Tétel. *(L'Hospital). Legyen $I \subset \mathbb{R}$ intervallum, $x_0 \in I'$ és $f, g : I \setminus \{x_0\} \to \mathbb{R}$. Ha*

a) $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = 0 = \lim\limits_{x \to x_0} g(x)$;

b) f és g deriválható az $I \setminus \{x_0\}$ halmazon;

c) $g'(x) \neq 0$, bármely $x \in I \setminus \{x_0\}$ esetén;

d) létezik az $L = \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ véges vagy végtelen határérték,

akkor

i) $g(x) \neq 0$, bármely $x \in I \setminus \{x_0\}$ esetén;

ii) létezik a $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)}$ *határérték és értéke* L.

Bizonyítás. 1) Feltételezzük, hogy $x_0 \in \mathbb{R}$. A 28. Tétel szerint g' Darboux-tulajdonságú, ezért a c) feltétel alapján a g' állandó előjelű az x_0 ponttól balra illetve jobbra. A 26. Következmény szerint így g szigorúan növekvő vagy szigorúan csökkenő az x_0-tól balra és jobbra. Figyelembe véve az a) feltételt, következik az i) állítás.

Értelmezzük az $\tilde{f}, \tilde{g} : I \cup \{x_0\} \to \mathbb{R}$ függvényeket:

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x), & \text{ha } x \neq x_0 \\ 0, & \text{ha } x = x_0 \end{cases} \quad \text{és} \quad \tilde{g}(x) = \begin{cases} g(x), & \text{ha } x \neq x_0 \\ 0, & \text{ha } x = x_0. \end{cases}$$

Innen, az a) feltétel alapján, $\tilde{f}$ és $\tilde{g}$ folytonos függvények az $I \cup \{x_0\}$ halmazon. Sőt $\tilde{f}$ és $\tilde{g}$ deriválhatóak az $I \setminus \{x_0\}$ halmazon és $\tilde{f}'(x) = f'(x)$, $\tilde{g}'(x) = g'(x) \neq 0$ minden $x \in I \setminus \{x_0\}$ esetén.

Legyen (x_n) tetszőleges sorozat, $x_n \in I \setminus \{x_0\}$ és $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = x_0$ (ilyen sorozat létezik, mert $x_0 \in I'$). Alkalmazva a 24. Tételt az $\tilde{f}$ és $\tilde{g}$ függvényekre az $[x_n, x_0]$ (vagy $[x_0, x_n]$) intervallumon, ha $x_n < x_0$ (vagy $x_0 < x_n$), létezik $\xi_n \in]x_n, x_0[$ (vagy $\xi_n \in]x_0, x_n[$) úgy, hogy $g(\xi_n) = \tilde{g}(\xi_n) \neq \tilde{g}(x_0) = 0$ és

$$\frac{f(x_n)}{g(x_n)} = \frac{\tilde{f}(x_n) - \tilde{f}(x_0)}{\tilde{g}(x_n) - \tilde{g}(x_0)} = \frac{\tilde{f}'(\xi_n)}{\tilde{g}'(\xi_n)} = \frac{f'(\xi_n)}{g'(\xi_n)}$$

Mivel $|\xi_n - x_0| < |x_n - x_0|$ és $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = x_0$, ezért $\lim\limits_{n \to \infty} \xi_n = x_0$, tehát

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{n \to \infty} \frac{f(x_n)}{g(x_n)} = \lim_{n \to \infty} \frac{f'(\xi_n)}{g'(\xi_n)} = L,$$

tekintettel a d) feltételre.

2) Feltételezzük, hogy $x_0 = +\infty$. Ekkor tekinthető az I intervallumnak az $]a, +\infty[$, ahol $a > 0$.

Legyen $u :]0, \frac{1}{a}[\to]a, +\infty[,\ u(t) = \frac{1}{t}$ és $F = f \circ u$ illetve $G = g \circ u$. Igazoljuk, hogy F és G kielégíti az a) - d) feltételeket a $t_0 = 0$ pontban.

Ha $t_n \in]0, \frac{1}{a}[$ és $\lim\limits_{n\to\infty} t_n = 0$, akkor $\lim\limits_{n\to\infty} u(t_n) = +\infty$, tehát

$$\lim_{t\to t_0} F(t) = \lim_{n\to\infty} F(t_n) = \lim_{n\to\infty} f(u(t_n)) = 0 = \lim_{t\to t_0} G(t).$$

Mivel f, g és u deriválható függvények, ezért a 18. Tétel alapján F és G is deriválhatóak a $]0, \frac{1}{a}[$ intervallumon és $F'(t) = -\frac{1}{t^2} f'\left(\frac{1}{t}\right)$, $G'(t) = -\frac{1}{t^2} g'\left(\frac{1}{t}\right)$, bármely $t \in]0, \frac{1}{a}[$ esetén. Legyen (t_n) a fent megadott sorozat; ekkor

$$\lim_{t\to t_0} \frac{F'(t)}{G'(t)} = \lim_{n\to\infty} \frac{F'(t_n)}{G'(t_n)} = \lim_{n\to\infty} \frac{f'(u(t_n))}{g'(u(t_n))} = \lim_{x\to\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L.$$

Alkalmazva az 1) esetet kapjuk, hogy $G(t) \neq 0$ minden $t \in]0, \frac{1}{a}[$ esetén és $\lim\limits_{t\to t_0} \dfrac{F(t)}{G(t)} = L$. Így $g(x) \neq 0$, bármely $x \in]a, \infty[$ esetén és $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{g(x)} = L$. □

A L'Hospital-szabály következő változatát bizonyítás nélkül jelentjük ki.

30. Tétel. *(L'Hospital). Legyen $I \subset \mathbb{R}$ intervallum, $x_0 \in I'$ és $f, g : I \setminus \{x_0\} \to \mathbb{R}$. Ha*

a) $\lim\limits_{x\to x_0} |g(x)| = +\infty$;

b) f és g deriválható az $I \setminus \{x_0\}$ halmazon;

c) $g'(x) \neq 0$, bármely $x \in I \setminus \{x_0\}$ esetén;

d) létezik az $L = \lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ véges vagy végtelen határérték,

akkor

i) $g(x) \neq 0$, bármely $x \in I \setminus \{x_0\}$ esetén;

ii) létezik a $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)}$ határérték és értéke L.

30. Példa.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\ln x}{x^\alpha}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x}}{\alpha x^{\alpha-1}}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{\alpha x^\alpha}=0,\quad \text{ha } \alpha>0.$$

31. Példa. Legyen $a>1$ és $\alpha\in\mathbb{R}$. Ekkor

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\infty}\frac{x^\alpha}{a^x} &= \lim_{x\to\infty}\frac{\alpha x^{\alpha-1}}{a^x\ln a}=\ldots=\\ &= \lim_{x\to\infty}\frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)x^{\alpha-n}}{a^x(\ln a)^n}=0,\end{aligned}$$

ahol $n>\alpha$.

20. Értelmezés. *Legyen $f:A\to\mathbb{R}$ deriválható függvény az $A\subseteq\mathbb{R}$ halmazon. Így létezik az $f':A\to\mathbb{R}$ függvény Ha az f' függvény deriválható az $x\in\mathring{A}$ pontban, akkor az f függvény **kétszer deriválható az x pontban**. Jelölése:*

$$f''(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f'(x+h)-f'(x)}{h},\ x\in\mathring{A}.$$

*Általában, ha az $f^{(n-1)}:A\to\mathbb{R}$ függvény deriválható az $x\in\mathring{A}$ pontban, akkor az f függvény **n-szer deriválható az x pontban**. Jelölése:*

$$f^{(n)}(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f^{(n-1)}(x+h)-f^{(n-1)}(x)}{h}.$$

Így $f^{(n)}(x)=(f^{(n-1)})'(x)$.

*A legtöbb n-ed rendű folytonos deriválttal rendelkező $f:A\to\mathbb{R}$ függvények halmazát **n-szer folytonosan deriválható** (vagy **n -szer folytonosan differenciálható**) **függvények halmazának** nevezzük. Jelölése: $C^n(A;\mathbb{R})\equiv C^n(A)$. Sajátosan: $C^0(A)\equiv C(A)$ a folytonos függvények halmaza, $f^{(0)}\equiv f$; $C^1(A)$ a folytonosan deriválható (vagy folytonosan differenciálható) függvények halmaza, míg az $f\in C^1(A)$ függvény folytonosan deriválható; $C^2(A)$ a kétszer folytonosan derivál-*

ható (vagy kétszer folytonosan differenciálható) függvények halmaza, míg az $f \in C^2(A)$ függvény kétszer folytonosan deriválható, stb.

Továbbá, jelölje $C^\infty(A;\mathbb{R}) \equiv C^\infty(A) = \bigcap_{n\geq 0} C^n(A)$ az ún. ***végtelen sok-szor deriválható*** *(vagy* ***végtelen sokszor differenciálható) függvények halmazát****. Ha $f \in C^\infty(A)$, akkor f végtelen sokszor deriválható az A halmazon.*

Ha $A = [a,b]$, akkor használatosak a következő jelölések: $C^n([a,b]) \equiv C^n[a,b]$ és $C^\infty([a,b]) \equiv C^\infty[a,b]$.

32. Példa. Leibniz-féle képlet: ha $f, g : A \to \mathbb{R}$ függvények n-szer deriválhatóak az A halmazon, akkor

$$(f\cdot g)^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^{n} C_n^k f^{(n-k)}(x) g^{(k)}(x).$$

A bizonyítás a matematikai indukcióval történik.

33. Példa. Ha $P_n(x) = c_0 + c_1x + \ldots + c_nx^n,\ x \in \mathbb{R}$, akkor $P_n(0) = c_0$; $P_n'(x) = c_1 + 2c_2x + \ldots + nc_nx^{n-1}$, ezért $P_n'(0) = c_1$; $P_n''(x) = 2c_2 + 3\cdot 2c_3x + \ldots + n(n-1)c_nx^{n-2}$, így $P_n''(0) = 2!c_2; \ldots; P_n^{(n)}(x) = n(n-1)\ldots 2c_n$, ezért $P_n^{(n)}(0) = n!c_n$; $P_n^{(k)}(x) = 0$, ha $k > n$. Következésképp

$$P_n(x) = P_n^{(0)}(0) + \frac{1}{1!}P_n^{(1)}(0)x + \frac{1}{2!}P_n^{(2)}(0)x^2 + \ldots + \frac{1}{n!}P_n^{(n)}(0)x^n.$$

A továbbiakban az ún. *Taylor-féle képlettel* fogunk foglalkozni. Adott az $f : I \to \mathbb{R}$ ($I \subseteq \mathbb{R}$ intervallum) függvény és $x_0 \in \overset{\circ}{I}$. Feltételezzük, hogy az f függvény n-szer deriválható az x_0 pontban. Keressük azt az n-ed fokú T_n polinomot, amelyre

$$T_n(x_0) = f(x_0),\ T_n'(x_0) = f'(x_0), \ldots,\ T_n^{(n)}(x_0) = f^{(n)}(x_0).$$

A 33. Példához hasonlóan a T_n kifejezése a következő lesz:

$$\begin{aligned}
T_n(x) &= T_n(x_0) + \frac{T_n'(x_0)}{1!}\cdot(x-x_0) + \frac{T_n''(x_0)}{2!}\cdot(x-x_0)^2 + \\
&\quad + \ldots + \frac{T_n^{(n)}(x_0)}{n!}\cdot(x-x_0)^n = \\
&= f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}\cdot(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}\cdot(x-x_0)^2 + \\
&\quad + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}\cdot(x-x_0)^n.
\end{aligned}$$

Az így meghatározott polinomot az f függvényhez és az x_0 ponthoz rendelt **Taylor-féle polinomnak** nevezzük. Értelmezés szerint

$$R_n(x) := f(x) - T_n(x), \quad x \in I,$$

az ún. n**-ed rendű maradéktag**, míg

$$f(x) = T_n(x) + R_n(x), \quad x \in I,$$

a **Taylor-féle képlet**.

31. Tétel. *(Peano). Ha az $f : I \to \mathbb{R}$ ($I \subseteq \mathbb{R}$ intervallum) függvény n-szer deriválható az $x_0 \in \mathring{I}$ pontban, akkor*

$$\lim_{x\to x_0} \frac{R_n(x)}{(x-x_0)^n} = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-T_n(x)}{(x-x_0)^n} = 0.$$

Bizonyítás. $(n-1)$-szer alkalmazzuk a L'Hospital szabályt (29. Tétel):

$$\begin{aligned}
&\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-T_n(x)}{(x-x_0)^n} = \lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)-T_n'(x)}{n(x-x_0)^{n-1}} = \ldots = \\
&= \lim_{x\to x_0} \frac{f^{(n-1)}(x)-T_n^{(n-1)}(x)}{n!(x-x_0)} = \\
&= \frac{1}{n!}\lim_{x\to x_0}\left[\frac{f^{(n-1)}(x)-f^{(n-1)}(x_0)}{x-x_0} - f^{(n)}(x_0)\right] = 0,
\end{aligned}$$

felhasználva a Taylor-polinomot és a 20. Értelmezést. □

A Taylor-féle képlet maradéktagjának a szerkezete az alkalmazások szempontjából nagyon fontos, ezért azzal részletesen foglalkozunk.

32. Tétel. *(Taylor). Legyen az* $f :]a,b[\to \mathbb{R}$ *függvény* $(n+1)$*-szer deriválható az* $]a,b[$ *intervallumon, és* $\varphi :]a,b[\to \mathbb{R}$ *olyan deriválható függvény, amelyre* $\varphi'(x) \neq 0$, *bármely* $x \in]a,b[$ *esetén. Ekkor bármely* $x_0, x \in]a,b[$ *esetén létezik* $\xi \in]a,b[$ *pont az* x_0 *és* x *között úgy, hogy*

$$R_n(x) = \frac{\varphi(x) - \varphi(x_0)}{\varphi'(\xi)n!} \cdot f^{(n+1)}(\xi)(x-\xi)^n.$$

Bizonyítás. Legyen $I = [x_0, x]$, ha $x_0 < x$ illetve $I = [x, x_0]$, ha $x < x_0$. Vezessük be a $\psi : I \to \mathbb{R}$,

$$\psi(t) = f(x) - f(t) - \frac{f'(t)}{1!}(x-t) - \ldots - \frac{f^{(n)}(t)}{n!}(x-t)^n$$

függvényt. Észrevehető, hogy a ψ és φ függvények teljesítik a Cauchy-tétel feltételeit (lásd a 24. Tételt). Mivel

$$\psi'(t) = -\frac{f^{(n+1)}(t)}{n!} \cdot (x-t)^n,$$

ezért létezik $\xi \in \mathring{I}$ úgy, hogy

$$\frac{\psi(x) - \psi(x_0)}{\varphi(x) - \varphi(x_0)} = \frac{\psi'(\xi)}{\varphi'(\xi)}.$$

Innen

$$\frac{0 - \psi(x_0)}{\varphi(x) - \varphi(x_0)} = -\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{\varphi'(\xi)n!}(x-\xi)^n$$

vagy

$$R_n(x) = \frac{\varphi(x) - \varphi(x_0)}{\varphi'(\xi)n!} \cdot f^{(n+1)}(\xi)(x-\xi)^n,$$

amit igazolni kellett. □

A maradéktag **Schlömilch-féle alakját** $\varphi(t) = (x-t)^p$, $p \in \mathbb{N}$ esetén kapjuk meg:

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!\, p}(x-x_0)^p(x-\xi)^{n+1-p};$$

ha $p = 1$, akkor a maradéktag **Cauchy-féle alakjához** jutunk:

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!}(x-x_0)(x-\xi)^n, \tag{3.5.1}$$

míg $p = n+1$ esetén a maradéktag **Lagrange-féle alakját** kapjuk:

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}. \tag{3.5.2}$$

Az x_0 és x pontok között található ξ pont a $\xi = x_0 + \theta(x-x_0)$, $0 < \theta < 1$ alakba is felírható. Ha $x_0 = 0 \in]a,b[$, akkor a Taylor-féle képletet **MacLaurin-féle képletnek** nevezzük, amelynek alakja a Lagrange-féle maradéktaggal:

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \ldots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!}x^{n+1}, \ 0 < \theta < 1. \tag{3.5.3}$$

Az alábbi példákban az elemi függvények MacLaurin-féle képletét adjuk meg.

34. Példa. Az $f(x) = e^x$ függvény esetén

$$e^x = 1 + \frac{1}{1!}x + \frac{1}{2!}x^2 + \ldots + \frac{1}{n!}x^n + R_n(x),$$

ahol a (3.5.2) alapján

$$R_n(x) = \frac{1}{(n+1)!}\ e^{\xi} \cdot x^{n+1}$$

és $|\xi| < |x|$. Így

$$|R_n(x)| = \frac{1}{(n+1)!}\ e^{\xi} \cdot |x|^{n+1} < \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}\ e^{|x|}.$$

Az 1. Fejezet, 22. Példája alapján $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} = 0$, ahonnan $\lim\limits_{n\to\infty} R_n(x) = 0$, vagyis

$$e^x = 1 + \frac{1}{1!}x + \frac{1}{2!}x^2 + \ldots + \frac{1}{n!}x^n + \ldots,$$

bármely $x \in \mathbb{R}$ esetén (lásd a valós számsor 1. és 2. Értelmezéseit a 2. Fejezetben).

Hasonló a helyzet az $f(x) = a^x$, $a > 0$ és $a \neq 1$ esetben is:

$$a^x = 1 + \frac{\ln a}{1!}x + \frac{\ln^2 a}{2!}x^2 + \ldots + \frac{\ln^n a}{n!}x^n + \ldots, \quad x \in \mathbb{R}.$$

35. Példa. Az $f(x) = \sin x$ esetén $f^{(n)}(x) = \sin\left(x + \frac{n\pi}{2}\right)$, $n \in \mathbb{N}$. A (3.5.2) alapján

$$R_n(x) = \frac{1}{(n+1)!}\sin\left(\xi + (n+1)\frac{\pi}{2}\right)x^{n+1},$$

tehát $\lim\limits_{n\to\infty} R_n(x) = 0$. Így

$$\sin x = x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \ldots + \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n+1} + \ldots,$$

bármely $x \in \mathbb{R}$ esetén.

Hasonlóan igazolható, hogy

$$\cos x = 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - \ldots + \frac{(-1)^n}{(2n)!}x^{2n} + \ldots,$$

$x \in \mathbb{R}$ tetszőleges.

36. Példa. Legyen $f(x) = \operatorname{sh} x$. Mivel $\operatorname{sh}' x = \operatorname{ch} x$ és $\operatorname{ch}' x = \operatorname{sh} x$, ezért $f^{(n+1)}(x) = \operatorname{sh} x$, ha n páratlan és $f^{(n+1)}(x) = \operatorname{ch} x$, ha n páros. Így

$$|f^{(n+1)}(x)| \le \max\{|\operatorname{sh} x|,\ |\operatorname{ch} x|\}.$$

Következésképp

$$\begin{aligned} |R_n(x)| &= \left|\frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi) \cdot x^{n+1}\right| \le \frac{|x^{n+1}|}{(n+1)!} \cdot \max\{|\operatorname{sh} \xi|,\ |\operatorname{ch} \xi|\} \le \\ &\le \frac{|x^{n+1}|}{(n+1)!} \cdot \max\{|\operatorname{sh} x|,\ |\operatorname{ch} x|\}, \end{aligned}$$

mert $|\xi| < |x|$. Ezért $\lim\limits_{n\to\infty} R_n(x) = 0$, tehát

$$\operatorname{sh} x = x + \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 + \ldots + \frac{1}{(2n+1)!}x^{2n+1} + \ldots$$

minden $x \in \mathbb{R}$ esetén.

Hasonlóan

$$\operatorname{ch} x = 1 + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 + \ldots + \frac{1}{(2n)!}x^{2n} + \ldots,$$

bármely $x \in \mathbb{R}$ esetén.

37. Példa. Az $f(x) = \ln(1+x)$, $x \in]-1, 1[$ esetén

$$f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{(1+x)^n}.$$

Így

$$\ln(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \ldots + \frac{(-1)^{n-1}}{n}x^n + R_n(x).$$

Alkalmazzuk a (3.5.1) képletet:

$$R_n(x) = \frac{1}{n!} \cdot \frac{(-1)^n n!}{(1+\xi)^{n+1}} \cdot x(x-\xi)^n$$

vagy

$$R_n(x) = (-1)^n x \cdot \left(\frac{x-\xi}{1+\xi}\right)^n \cdot \frac{1}{1+\xi},$$

ahol $|\xi| < |x|$. Mivel $|x| < 1$, ezért $|1+\xi| \geq 1 - |\xi| > 1 - |x| > 0$ és

$$\left|\frac{x-\xi}{1+\xi}\right| = \frac{|x|-|\xi|}{|1+\xi|} \leq \frac{|x|-|\xi|}{1-|\xi|} = 1 - \frac{1-|x|}{1-|\xi|} \leq 1 - \frac{1-|x|}{1-|0|} = |x|. \tag{3.5.4}$$

Innen $|x| < 1$ esetén $|R_n(x)| \leq \frac{|x|^{n+1}}{1-|x|}$, vagyis $\lim\limits_{n\to\infty} R_n(x) = 0$. Így

$$\ln(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \ldots + \frac{(-1)^{n-1}}{n}x^n + \ldots,$$

ahol $|x| < 1$.

38. Példa. Az $f(x) = (1+x)^\alpha$, $x \in]-1,1[$ és $\alpha \in \mathbb{R}$ esetén

$$f^{(n)}(x) = \alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)(1+x)^{\alpha-n}.$$

Ezért

$$(1+x)^\alpha = 1 + \frac{\alpha}{1!}x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + R_n(x),$$

ahol a (3.5.1) értelmében

$$R_n(x) = \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n)}{n!}(1+\xi)^{\alpha-n-1}(x-\xi)^n x,$$

ξ a 0 és x között található. Felhasználva a (3.5.4) egyenlőtlenségeket következik, hogy

$$|R_n(x)| \leq \left|\alpha\left(1-\frac{\alpha}{1}\right)\dots\left(1-\frac{\alpha}{n}\right)\right|(1+\xi)^{\alpha-1}|x|^{n+1}.$$

A $\lim\limits_{n\to\infty} R_n(x) = 0$ teljesül, ha

$$\lim_{n\to\infty}\left|\alpha\left(1-\frac{\alpha}{1}\right)\dots\left(1-\frac{\alpha}{n}\right)x^{n+1}\right| = 0.$$

Jelölje

$$x_n = \left|\alpha\left(1-\frac{\alpha}{1}\right)\dots\left(1-\frac{\alpha}{n}\right)x^{n+1}\right|.$$

Ekkor

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \left|\left(1-\frac{\alpha}{n+1}\right)x\right|;$$

mivel

$$\lim_{n\to\infty}\left|\left(1-\frac{\alpha}{n+1}\right)x\right| = |x| < 1,$$

ezért a 2. Fejezet, 10. Következménye alapján a $\sum\limits_{n\geq 1} x_n$ sor konvergens, tehát $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$, felhasználva a 2. Fejezet, 1. Tulajdonságát. Ezért $|x| < 1$ esetén írható, hogy

$$(1+x)^\alpha = 1+\frac{\alpha}{1!}x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2+\dots+\frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!}x^n+\dots$$

A paragrafus befejezéseként a helyi szélsőérték pontok létezésének feltételeit tanulmányozzuk. Tekintettel a Fermat-tételre (22. Tétel) megfogalmazható a következő állítás:

33. Tulajdonság. *(a helyi szélsőérték pontok létezésének szükséges feltétele). Legyen $f : I \to \mathbb{R}$ adott függvény, $I \subseteq \mathbb{R}$ intervallum. Annak szükséges feltétele, hogy az $x_0 \in \overset{\circ}{I}$ pont az f függvény helyi szélsőérték pontja legyen az, hogy f vagy nem deriválható az x_0-ban vagy $f'(x_0) = 0$.*

39. Példa. Az $f(x) = x^3$, $x \in \mathbb{R}$ függvénynek az $x_0 = 0$ pont nem szélsőérték pontja annak ellenére, hogy $f'(0) = 0$. Az $f(x) = \begin{cases} 2x, & \text{ha } x \geq 0 \\ x, & \text{ha } x < 0 \end{cases}$ függvény az $x_0 = 0$ pontban nem deriválható és x_0 nem szélsőérték pont.

Az $f(x) = x^2$, $x \in [-2, 1]$ függvénynek az $x_0 = -2$ helyi maximum pontja (hasonlóan az $x_0 = 1$ pont is), annak ellenére, hogy $x_0 \notin]-2, 1[$.

34. Tulajdonság. *(a helyi szélsőérték pontok létezésének elégséges feltétele az elsőrendű derivált alapján). Legyen* $f : \overset{\circ}{I} \subseteq \mathbb{R}$ *(*$I \subseteq \mathbb{R}$ *intervallum) adott függvény és* $x_0 \in \overset{\circ}{I}$ *úgy, hogy* f *folytonos az* $\overset{\circ}{I}$ *intervallumon és deriválható az* $\overset{\circ}{I} \setminus \{x_0\}$ *halmazon. Ekkor*

a) $f'(x) < 0$, *bármely* $x \in \overset{\circ}{I} \setminus \{x_0\}$ *esetén az* f *függvénynek az* x_0 *pontban nincs szélsőértéke;*

b) $f'(x) < 0$, *bármely* $x \in \overset{\circ}{I}$, $x < x_0$ *és* $f'(x) > 0$, *bármely* $x \in \overset{\circ}{I}$, $x > x_0$ *esetén az* f *függvénynek az* x_0 *pontban szigorúan helyi minimuma van;*

c) $f'(x) > 0$, *bármely* $x \in \overset{\circ}{I}$, $x < x_0$ *és* $f'(x) < 0$, *bármely* $x \in \overset{\circ}{I}$, $x > x_0$ *esetén az* f *függvénynek az* x_0 *pontban szigorúan helyi maximuma van;*

d) $f'(x) > 0$, *bármely* $x \in \overset{\circ}{I} \setminus \{x_0\}$ *esetén az* f *függvénynek az* x_0 *pontban nincs szélsőértéke.*

Bizonyítás. a) A 26. Következmény alapján f szigorúan csökkenő az $\overset{\circ}{I} \cap]-\infty, x_0[$ halmazon. Viszont f folytonos az x_0 pontban, ezért $f(x) > f(x_0)$, ha $x \in \overset{\circ}{I} \cap]-\infty, x_0[$. Hasonló indoklással: $f(x_0) > f(x)$, ha $x \in \overset{\circ}{I} \cap]x_0, \infty[$. Következésképp f szigorúan csökkenő az $\overset{\circ}{I}$ intervallumon és x_0 nem helyi szélsőérték pont.

b) Újból a 26. Következmény alapján kapjuk, hogy $f(x) > f(x_0)$, ha $x < x_0$ és $f(x) > f(x_0)$, ha $x_0 < x$. Így az f függvénynek az x_0 pontban szigorúan helyi minimum pontja van.

A c) és d) eseteket hasonlóan igazoljuk. □

35. Tétel. *(a helyi szélsőérték pontok létezésének elégséges feltétele a magasabb rendű deriváltak alapján). Legyen* $f : I \to \mathbb{R}$ *(*$I \subseteq \mathbb{R}$ *intervallum) függvény az* $x_0 \in \overset{\circ}{I}$ *pontban* n*-szer deriválható úgy, hogy* $f'(x_0) = f''(x_0) = \ldots = f^{(n-1)}(x_0) = 0$ *és* $f^{(n)}(x_0) \neq 0$*. Ha* n *páros szám, akkor az* f *függvénynek az* x_0 *pontban helyi szélsőértéke van. Az* x_0 *szigorúan helyi maxi-mum pont, ha* $f^{(n)}(x_0) < 0$ *illetve* x_0 *szigorúan helyi minimum pont, ha* $f^{(n)}(x_0) > 0$*. Ha* n *páratlan szám, akkor az* f *függvénynek az* x_0 *pontban nincs szélsőértéke.*

Bizonyítás. A 31. Tétel és az $f'(x_0) = \ldots = f^{(n-1)}(x_0) = 0$ feltételek alapján

$$\begin{aligned} f(x) - f(x_0) &= \frac{1}{n!}\, f^{(n)}(x_0)(x - x_0)^n + \alpha(x)(x - x_0)^n = \\ &= \left(\frac{1}{n!} f^{(n)}(x_0) + \alpha(x)\right)(x - x_0)^n, \end{aligned} \tag{3.5.5}$$

ahol $\lim\limits_{x \to x_0} \alpha(x) = 0$. Innen, mivel $f^{(n)}(x_0) \neq 0$ következik, hogy

$$\operatorname{sgn}\left(\frac{1}{n!} f^{(n)}(x_0) + \alpha(x)\right) = \operatorname{sgn} f^{(n)}(x_0),$$

ha x elég közel található az x_0 ponthoz. Ha n páros szám, akkor $(x - x_0)^n > 0$, bármely $x \in I \setminus \{x_0\}$ esetén. Így létezik $U \in \mathcal{V}(x_0)$, amelyre

$$\operatorname{sgn}\left(f(x) - f(x_0)\right) = \operatorname{sgn} f^{(n)}(x_0),$$

bármely $x \in U \cap I$, $x \neq x_0$ esetén, ami a tétel állítását igazolja. Ha n páratlan szám, akkor $(x - x_0)^n < 0$, ha $x < x_0$ és $(x - x_0)^n > 0$, ha $x > x_0$. Így a (3.5.5) egyenlőség jobb oldala előjelváltó, ezért a bal oldal is előjelváltó lesz, vagyis x_0 nem helyi szélsőérték pont. □

40. Példa. Tekintsük az $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x^4$ függvényt. A 33. Tulajdonság alapján a szélsőérték pontokat az $f'(x) = 0$ egyenlet megoldásai között kell keressük. Mivel $f'(x) = x^2 - 4x^3$, ezért az $x^2 - 4x^3 = 0$ egyenlet gyökei $x_1 = \frac{1}{4}$ és $x_2 = 0$. Továbbá, $f''(x) = 2x - 12x^2$, így $f''(x_1) = -x_1 < 0$. Ekkor a 35. Tétel alapján x_1 helyi maximum pont. Másrészt $f''(x_2) = 0$; viszont $f'''(x) = 2 - 24x$, ahonnan $f'''(x_2) = 2$, tehát a 35. Tétel szerint x_2 nem szélsőérték pont.

41. Példa. *A fénytörés törvénye geometriai közegben*: határozzuk meg, hogy milyen úton jut a fénysugár az egyik közegből a másikba.

Válassza el a két közeget egy sík. A fény terjedési sebessége legyen az első közegben c_1, a másodikban c_2. A fény az első közeg A_1 pontjából a második közeg A_2 pontjába jut. Alkalmazva a Fermat-féle elvet: a fénysugár útja az a vonal, amely mentén a fény a legrövidebb idő alatt jut el az egyik pontból a másikba, a keresett út két egyenes vonalú útszakaszból fog állni. Mivel c_1 és c_2 a fény terjedési sebessége az illető közegben, akkor az idő, mialatt a fény A_1-ből az A_2-be jut:

$$t(x) = \frac{1}{c_1}\sqrt{h_1^2 + x^2} + \frac{1}{c_2}\sqrt{h_2^2 + (a-x)^2}.$$

Keressük a t függvény minimumát:

$$t'(x) = \frac{1}{c_1} \cdot \frac{x}{\sqrt{h_1^2 + x^2}} - \frac{1}{c_2} \cdot \frac{a-x}{\sqrt{h_2^2 + (a-x)^2}}.$$

Így $t'(x) = 0$ akkor és csak akkor teljesül, ha $\frac{\sin \alpha_1}{\sin \alpha_2} = \frac{c_1}{c_2}$. Tehát *a fénysugár úgy törik meg, hogy a beesési és törési szögek szinuszának hányadosa a megfelelő fénysebességek hányadosával egyenlő.*

3.6. A primitív függvény és a határozatlan integrál

21. Értelmezés. *Legyen $I \subseteq \mathbb{R}$ intervallum és $f : I \to \mathbb{R}$ adott függvény. Az $F : I \to \mathbb{R}$ függvényt az f* ***primitív függvényének*** *nevezzük* *az I intervallumon, ha F deriválható és $F'(x) = f(x)$ minden $x \in I$ esetén.*

36. Tulajdonság. *a) Ha $I \subseteq \mathbb{R}$ intervallum, $F_1, F_2 : I \to \mathbb{R}$ az $f : I \to \mathbb{R}$ függvény két primitív függvénye, akkor $F_1 - F_2$ állandó függvény az I intervallumon.*

b) Ha az $f : \overset{\circ}{I} \to \mathbb{R}$ ($I \subseteq \mathbb{R}$ intervallum) függvénynek van primitív függvénye, akkor f Darboux-tulajdonságú az $\overset{\circ}{I}$ intervallumon.

Bizonyítás. a) Mivel $F_1'(x) = f(x) = F_2'(x)$, $x \in I$, ezért $(F_1 - F_2)'(x) = 0$, $x \in I$. A 26. Következmény, c) pontja alapján $F_1 - F_2$ állandó függvény az I intervallumon.

b) A 28. Tétel következménye. □

42. Példa. A 36. Tulajdonságban lényeges, hogy a primitív függvények közös értelmezési halmaza intervallum legyen. Valóban, ha $F_1, F_2 : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$, $F_1(x) = \operatorname{arctg} x$ és $F_2(x) = \operatorname{arcctg} \frac{1}{x}$, akkor

$$F_1(x) - F_2(x) = \operatorname{arctg} x - \operatorname{arcctg} \frac{1}{x} = \operatorname{arctg} x - \operatorname{arctg} x = 0,$$

ha $x > 0$, illetve $F_1(x) - F_2(x) \equiv -\pi$, ha $x < 0$, ugyanis $\operatorname{arcctg} \frac{1}{x} = \pi + \operatorname{arctg} x$ az $x < 0$ esetben.

22. Értelmezés. *Az $f : I \to \mathbb{R}$ függvény primitív függvényeinek a halmazát az f függvény* ***határozatlan integráljának*** *nevezzük. Jelölése: $\int f(x)dx$.*

A 36. Tulajdonságból következik, hogy ha F az f függvény valamely primitív függvénye, akkor

$$\int f(x)dx = \{F(x) + c \mid c \in \mathbb{R}\}.$$

Az írásmód egyszerűsítése végett a határozatlan integrált szokás azonosítani a $\{F(x) + c \mid c \in \mathbb{R}\}$ halmaz bármely elemével. Ekkor

írható, hogy
$$\int f(x)dx = F(x) + c, \tag{3.6.1}$$
ahol $c \in \mathbb{R}$.

$\int$ a határozatlan integrál szimbóluma, f az integrálandó függvény és $f(x)dx$ a differenciálforma. A (3.6.1)-ból rendre kapjuk:

$$d\int f(x)dx = dF(x) = F'(x)dx = f(x)dx$$

illetve
$$\int dF(x) = \int F'(x)dx = F(x) + c.$$

A (3.6.1)-ban szereplő c konstansnak egyszerű fizikai jelentése lehet a következő: feltételezzük, hogy egy anyagi pont egyenes vonalú mozgásának $v(t)$ sebessége ismert, ahol t az időt jelöli. Ha $x(t)$ jelöli az anyagi pont helyzetét a t időpontban, akkor $\dot{x}(t) = v(t)$, vagyis $x(t)$ a $v(t)$ primitív függvénye. A kérdés az, hogy hogyan határozzuk meg az anyagi pont helyzetét, ismerve a sebességvektort bizonyos időintervallum után. Nyilván ez akkor lehetséges, ha az anyagi pont helyzete ismert egy adott időpontban. Például $t = 0$ esetén megadjuk az $x(0) = x_0$ kezdeti feltételt. Ellenkező esetben a mozgás törvénye $x(t) = \overline{x}(t) + c$ alakú, ahol $\overline{x}(t)$ a $v(t)$ bármely sajátos primitív függvénye és $c \in \mathbb{R}$ tetszőleges. Az $x(0) = \overline{x}(0) + c = x_0$ feltétellel viszont megszűnik a határozatlansági eset, így $c = x_0 - \overline{x}(0)$ és $x(t) = x_0 + [\overline{x}(t) - \overline{x}(0)]$, ahol az $\overline{x}(t) - \overline{x}(0)$ különbség az elmozdulást jelöli az ismert x_0 ponthoz képest.

A (3.6.1) és a 21. Tétel alapján a határozatlan integrál a következő tulaj-donságokkal rendelkezik:

a) $\int(\alpha f + \beta g)(x)dx = \alpha\int f(x)dx + \beta\int g(x)dx$, ahol $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$;

b) $\int(f \cdot g)'(x)dx = \int f'(x)g(x)dx + \int f(x)g'(x)dx$;

c) ha $\int f(x)dx = F(x) + c$ teljesül az I_x intervallumon és φ :

$I_t \to I_x$
folytonosan deriválható függvény az I_t intervallumon, akkor

$$\int (f \circ \varphi)(t)\varphi'(t)dt = (F \circ \varphi)(t) + c$$

(I_t és I_x a t illetve az x változóknak megfelelő intervallumokat jelölik).
A b) a **parciális integrálás képlete**:

$$\int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)dx,$$

míg a c) állítás a **változócsere a határozatlan integrálban**:

$$\int (f \circ \varphi)(t)\varphi'(t)dt = \int f(\varphi(t))d\varphi(t) = \int f(x)dx = F(x)+c = F(\varphi(t))+c,$$

ahol $x = \varphi(t)$.

43. Példa. $\int \ln x \; dx = x \ln x - \int x \cdot \frac{1}{x} \; dx = x \ln x - \int 1 \; dx = x \ln x - x + c.$

44. Példa. $\int \frac{1}{t \ln t} \, dt = \int \frac{(\ln t)'}{\ln t} \, dt = \int \frac{dx}{x} = \ln |x| + c = \ln |\ln t| + c,$
ahol $x = \varphi(t) = \ln t$.

Általában a primitív függvény meghatározása nem egyszerű, sőt léteznek olyan függvények, melyek primitív függvényei *nem* adhatók meg elemi függvények összetett függvényeként. Ilyen példák az

$\mathbf{Ei}(x)$	$=$	$\int \frac{e^x}{x}dx$	**exponenciális-integrálfüggvény**, a
$\mathbf{Si}(x)$	$=$	$\int \frac{\sin x}{x}dx$	**szinusz-integrálfüggvény**, a
$\mathbf{Ci}(x)$	$=$	$\int \frac{\cos x}{x}dx$	**koszinusz-integrálfüggvény**, a
$\mathbf{Shi}(x)$	$=$	$\int \frac{\operatorname{sh} x}{x}dx$	**szinusz hiperbolikusz integrálfüggvény**, a
$\mathbf{Chi}(x)$	$=$	$\int \frac{\operatorname{ch} x}{x}dx$	**koszinusz hiperbolikusz integrálfüggvény**, az
$\mathbf{S}(x)$	$=$	$\int \sin x^2 dx$	és
$\mathbf{C}(x)$	$=$	$\int \cos x^2 dx$	**Fresnel-féle integrálfüggvények**, a
$\mathbf{\Phi}(x)$	$=$	$\int e^{-x^2} dx$	**Euler-Poisson integrálfüggvény** illetve a
$\mathbf{li}(x)$	$=$	$\int \frac{dx}{\ln x}$	**logaritmus-integrálfüggvény**.

Ezért a következőkben néhány függvényosztály esetében bemutatjuk a határozatlan integrál kiszámítási módjait.

a) *Racionális függvények primitív függvényei* az $\int \frac{P(x)}{Q(x)}dx$ alakú határozatlan integrál kiszámítását jelenti, ahol P és Q polinomfüggvények. Mivel a

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = p(x) + \sum_{j=1}^{l}\left(\sum_{k=1}^{k_j}\frac{a_{jk}}{(x-x_j)^k}\right) + \sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{k=1}^{m_j}\frac{b_{jk}x + c_{jk}}{(x^2+p_jx+q_j)^k}\right) \tag{3.6.2}$$

felbontás egyértelmű, ahol p a P-nek Q-val való osztásából származó hányados polinoma, a_{jk}, b_{jk}, c_{jk} egyértelműen meghatározott valós számok és

$$Q(x) = (x-x_1)^{k_1}\dots(x-x_l)^{k_l}(x^2+p_1x+q_1)^{m_1}\dots(x^2+p_nx+q_n)^{m_n},$$

ezért a (3.6.2) bal oldalának integrálása az $\dfrac{1}{(x-a)^k}$ és $\dfrac{bx+c}{(x^2+px+q)^k}$,

$k \in \mathbb{N}$, alakú racionális függvények integrálását jelenti. Az első esetben:

$$\int \frac{1}{(x-a)^k}\,dx = \begin{cases} \dfrac{1}{-k+1}(x-a)^{-k+1} + c, & \text{ha } k \neq 1 \\ \ln|x-a| + c, & \text{ha } k = 1. \end{cases}$$

Az $\displaystyle\int \frac{bx+c}{(x^2+px+q)^k}\,dx$ integrál esetében az eljárás a következő:

$$x^2+px+q = \left(x+\frac{1}{2}p\right)^2 + \left(q-\frac{1}{4}p^2\right),$$

ahol $q-\frac{1}{4}p^2 > 0$, mert az $x^2+px+q=0$ egyenletnek nincsenek valós gyökei. Jelölje $u := x+\frac{1}{2}p$ és $a^2 := q-\frac{1}{4}p^2$; ekkor

$$\begin{aligned} \int \frac{bx+c}{(x^2+px+q)^k}\,dx &= \int \frac{\alpha u+\beta}{(u^2+a^2)^k}\,du = \\ &= \alpha\int \frac{u}{(u^2+a^2)^k}\,du + \beta\int \frac{1}{(u^2+a^2)^k}\,du, \end{aligned}$$

ahol $\alpha = b$ és $\beta = c-\frac{1}{2}bp$. Továbbá, mivel

$$\int \frac{u}{(u^2+a^2)^k}du = \frac{1}{2}\int \frac{d(u^2+a^2)}{(u^2+a^2)^k} = \begin{cases} \dfrac{1}{2(1-k)}(u^2+a^2)^{-k+1}, & \text{ha } k \neq 1 \\ \dfrac{1}{2}\ln(u^2+a^2), & \text{ha } k = 1, \end{cases}$$

ezért az $I_k = \displaystyle\int \frac{du}{(u^2+a^2)^k}$ integrál kiszámítási módját kell megadnunk. A parciális integrálás képlete alapján

$$\begin{aligned} I_k &= \int \frac{du}{(u^2+a^2)^k} = \frac{u}{(u^2+a^2)^k} + 2k\int \frac{u^2du}{(u^2+a^2)^{k+1}} = \\ &= \frac{u}{(u^2+a^2)^k} + 2k\int \frac{(u^2+a^2)-a^2}{(u^2+a^2)^{k+1}}du = \\ &= \frac{u}{(u^2+a^2)^k} + 2kI_k - 2ka^2I_{k+1}. \end{aligned}$$

Innen

$$I_{k+1} = \frac{1}{2ka^2} \cdot \frac{u}{(u^2+a^2)^k} + \frac{2k-1}{2ka^2} \cdot I_k,$$

ami lehetővé teszi az I_k kiszámítását, mert

$$I_1 = \int \frac{du}{u^2+a^2} = \frac{1}{a}\mathrm{arctg}\,\frac{u}{a} + c.$$

45. Példa. Számítsuk ki $\int \frac{3x^2+3x-1}{(x^2+1)(x+2)}dx$.

A (3.6.2) felbontást a következőképpen kapjuk meg:

$$\frac{3x^2+3x-1}{(x^2+1)(x+2)} = \frac{Ax+B}{x^2+1} + \frac{C}{x+2}.$$

A határozatlan együtthatók módszeréből: $A = 2$, $B = -1$, $C = 1$. Így

$$\begin{aligned}\int \frac{3x^2+3x-1}{(x^2+1)(x+2)}dx &= \int \frac{2x\ dx}{x^2+1} - \int \frac{dx}{x^2+1} + \int \frac{dx}{x+2} = \\ &= \ln(x^2+1) - \mathrm{arctg}\, x + \ln|x+2| + c = \\ &= \ln\left|(x^2+1)(x+2)\right| - \mathrm{arctg}\, x + c.\end{aligned}$$

b) *Az* $\int R(\cos x, \sin x)dx$ *alakú primitív függvények* esetében R kétváltozós racionális függvény (vagyis $R(u,v) = \frac{P(u,v)}{Q(u,v)}$, ahol $P(u,v)$ és $Q(u,v)$ az $u^m v^n$ $(m,n = 0,1,2,\dots)$ monomok véges lineáris kombinációja). A határozatlan integrál kiszámítására a $\mathrm{tg}\,\frac{x}{2} = t$ helyettesítést végezzük el. Ekkor $x = 2\,\mathrm{arctg}\, t$ és

$$dx = \frac{2}{1+t^2}dt, \quad \sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \quad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}.$$

Következésképp

$$\int R(\cos x, \sin x)\ dx = \int R\left(\frac{1-t^2}{1+t^2},\ \frac{2t}{1+t^2}\right) \cdot \frac{2}{1+t^2}\ dt,$$

amely szerint az integrál kiszámítása visszavezetődött a racionális függvény határozatlan integráljának a meghatározására (lásd az a) esetet).

Ha az integrál $\int R(\cos^2 x,\ \sin^2 x)dx$ vagy $\int r(\operatorname{tg} x)dx$ alakú, ahol r racionális függvény, akkor a helyettesítés lehet $\operatorname{tg} x = t$ alakú is. Ekkor

$$x = \operatorname{arctg} t, \quad dx = \frac{dt}{1+t^2}, \quad \sin^2 x = \frac{t^2}{1+t^2}, \quad \cos^2 x = \frac{1}{1+t^2}.$$

Így

$$\int R(\cos^2 x, \sin^2 x)dx = \int R\left(\frac{1}{1+t^2},\ \frac{t^2}{1+t^2}\right) \cdot \frac{dt}{1+t^2}$$

illetve

$$\int r(\operatorname{tg} x)dx = \int r(t) \cdot \frac{1}{1+t^2}\ dt.$$

Abban az esetben, ha az integrál $\int R(\cos x, \sin^2 x)\sin x\ dx$ vagy $\int R(\cos^2 x,\ \sin x)\cos x\ dx$ alakú, akkor a helyettesítés $\cos x = t$ illetve $\sin x = t$ alakú. Ekkor

$$\int R(\cos x, \sin^2 x)\sin x\ dx = -\int R(t, 1-t^2)\ dt$$

illetve

$$\int R(\cos^2 x, \sin x)\cos x\ dx = \int R(1-t^2, t)\ dt.$$

46. Példa.

$$\begin{aligned}
\int \frac{dx}{3+\sin x} &= \int \frac{1}{3+\frac{2t}{1+t^2}} \cdot \frac{2}{1+t^2}dt = 2\int \frac{dt}{3t^2+2t+3} = \\
&= \frac{2}{3}\int \frac{d\left(t+\frac{1}{3}\right)}{\left(t+\frac{1}{3}\right)^2+\frac{8}{9}} = \frac{2}{3}\int \frac{du}{u^2+\left(\frac{2\sqrt{2}}{3}\right)^2} = \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}}\ \operatorname{arctg}\frac{3u}{2\sqrt{2}} + c = \frac{1}{\sqrt{2}}\ \operatorname{arctg}\frac{3t+1}{2\sqrt{2}} + c = \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}}\ \operatorname{arctg}\frac{3tg\frac{x}{2}+1}{2\sqrt{2}} + c
\end{aligned}$$

(a $\mathrm{tg}\frac{x}{2} = t$ és a $t + \frac{1}{3} = u$ helyettesítést alkalmaztuk).

Az irracionális függvények határozatlan integrálját általában csak akkor tudjuk kiszámítani, ha az integrált át tudjuk alakítani racionális függvény integráljára. Ilyen esetek az alábbiak:

c) *Az* $\int R\left(x, \sqrt[n]{\dfrac{ax+b}{cx+d}}\right) dx$ *alakú primitív függvények* esetében R szintén kétváltozós racionális függvény, $n \in \mathbb{N}$. Az $\frac{ax+b}{cx+d} = t^n$ helyettesítéssel $x = \frac{dt^n - b}{a - ct^n}$ és az integrálandó függvény racionális függvény lesz.

47. Példa. Az $\int \sqrt{\dfrac{x-1}{x+1}} dx$ integrál kiszámításához a helyettesítés legyen $\frac{x-1}{x+1} = t^2$. Ekkor $x = \frac{t^2+1}{1-t^2}$ és $dx = \frac{4t}{(1-t^2)^2} dt$. Így

$$\int \sqrt{\frac{x-1}{x+1}} dx = \int t \cdot \frac{4t}{(1-t^2)^2} dt = 4 \int \frac{1}{(1-t^2)^2} dt - 4 \int \frac{1}{1-t^2} dt.$$

Másrészt

$$\int \frac{1}{1-t^2} dt = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1+t}{1-t} \right| + c;$$

a parciális integrálás képletét alkalmazva:

$$\begin{aligned} \int \frac{dt}{1-t^2} &= \frac{t}{1-t^2} + 2 \int \frac{t^2}{(1-t^2)^2} dt = \\ &= \frac{t}{1-t^2} + 2 \int \frac{dt}{(1-t^2)^2} - 2 \int \frac{dt}{1-t^2}. \end{aligned}$$

Innen

$$\int \frac{dt}{(1-t^2)^2} = \frac{3}{2} \int \frac{dt}{1-t^2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{t}{1-t^2} = \frac{3}{4} \ln \left| \frac{1+t}{1-t} \right| - \frac{1}{2} \cdot \frac{t}{1-t^2} + c.$$

Következésképp

$$\begin{aligned}\int\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}dx &= 3\ln\left|\frac{1+t}{1-t}\right|-\frac{2t}{1-t^2}-2\ln\left|\frac{1+t}{1-t}\right|+c=\\ &= \ln\left|\frac{1+t}{1-t}\right|-\frac{2t}{1-t^2}+c=\\ &= \ln\left|\frac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}}\right|-\sqrt{x^2-1}+c.\end{aligned}$$

d) *Az* $\int R(x,\sqrt{ax^2+bx+c})\ dx$ *alakú primitív függvények* esetében az ún. Euler-féle helyettesítéseket végezzük el ahhoz, hogy racionális függvény integráljához jussunk vissza (R kétváltozós racionális függvény). Ezek a következők:

1) ha az $ax^2+bx+c=0$ egyenletnek x_1 és x_2 valós gyökei vannak, akkor

$$\sqrt{ax^2+bx+c}=t(x-x_1) \text{ vagy } \sqrt{ax^2+bx+c}=t(x-x_2);$$

2) ha $a>0$, akkor $\sqrt{ax^2+bx+c}=x\sqrt{a}+t$;

3) ha $c>0$, akkor $\sqrt{ax^2+bx+c}=xt+\sqrt{c}$.

48. Példa. Számítsuk ki $\displaystyle\int\frac{dx}{x+\sqrt{x^2+2x+2}}$.

Alkalmazzuk a 2). helyettesítést: $\sqrt{x^2+2x+2}=x+t$; ekkor

$$x=\frac{t^2-2}{2-2t} \quad \text{és} \quad dx=\frac{-t^2+2t-2}{2(1-t)^2}dt.$$

Innen

$$\begin{aligned}
&\int \frac{dx}{x+\sqrt{x^2+2x+2}} = \\
&= \int \frac{1}{\frac{t^2-2}{2-2t}+\frac{t^2-2}{2-2t}+t} \cdot \frac{-t^2+2t-2}{2(1-t)^2} dt = \\
&= \frac{1}{2}\int \frac{-t^2+2t-2}{(1-t)(t-2)} dt = \frac{1}{2}\int \left(1+\frac{t}{(t-1)(t-2)}\right) dt = \\
&= \frac{1}{2}\int \left(1-\frac{1}{t-1}+\frac{2}{t-2}\right) dt = \frac{t}{2}-\frac{1}{2}\ln|t-1|+\ln|t-2|+c = \\
&= \frac{1}{2}(\sqrt{x^2+2x+2}-x)-\frac{1}{2}\ln\left|\sqrt{x^2+2x+2}-x-1\right| + \\
&\quad + \ln\left|\sqrt{x^2+2x+2}-x-2\right|+c.
\end{aligned}$$

e) *Az* $\int x^m(ax^n+b)^p dx$ $(a,b\in\mathbb{R}; m,n,p\in\mathbb{Q})$ *binom integrálokat* az ún. Csebisev-féle helyettesítéssel vezetjük vissza racionális függvény határozatlan integráljára. Ez a következő esetekben lehetséges:

1) ha $p\in\mathbb{Z}$, akkor $x=t^r$, ahol r az m_2 és n_2 legkisebb közös többszöröse,

$m=\frac{m_1}{m_2}$, $(m_1,m_2)=1$ és $n=\frac{n_1}{n_2}$, $(n_1,n_2)=1$;

2) ha $\frac{m+1}{n}\in\mathbb{Z}$, akkor $ax^n+b=t^s$, ahol $p=\frac{r}{s}$, $(r,s)=1$;

3) ha $\frac{m+1}{n}+p\in\mathbb{Z}$, akkor $a+bx^{-n}=t^s$.

49. Példa. Számítsuk ki $\displaystyle\int \frac{\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x}}}{\sqrt{x}}dx$.

Az integrál ekvivalens formája: $\int x^{-\frac{1}{2}}(x^{\frac{1}{4}}+1)^{\frac{1}{3}}dx$. Így $m=-\frac{1}{2}$, $n=\frac{1}{4}$, $p=\frac{1}{3}$ és $\frac{m+1}{n}=2\in\mathbb{Z}$. Ezért a 2). eset alapján $x^{\frac{1}{4}}+1=t^3$, vagyis $x=(t^3-1)^4$ és $dx=12t^2(t^3-1)^3dt$. Tehát

$$\begin{aligned}
\int x^{-\frac{1}{2}}\left(x^{\frac{1}{4}}+1\right)^{\frac{1}{3}}dx &= 12\int(t^6-t^3)dt = \frac{12}{7}t^7-3t^4+c = \\
&= \frac{12}{7}(\sqrt[4]{x}+1)^{\frac{7}{3}}-3(\sqrt[4]{x}+1)^{\frac{4}{3}}+c.
\end{aligned}$$

f) *Elliptikus integrálok.* A határozatlan integrálok másik fontos osztálya az

$$\int R(x, \sqrt{P_n(x)})\ dx \tag{3.6.3}$$

alakú integrálok, ahol R kétváltozós racionális függvény és P_n olyan polinomfüggvény, amelynek n fokszáma > 2.

Ha $n = 3$ vagy $n = 4$, akkor a (3.6.3) alakú integrálokat **elliptikus integ-ráloknak** nevezzük, ha $n > 4$, akkor a (3.6.3) integrálok elnevezése **hiperelliptikus integrálok**. Abel és Liouville igazolta, hogy a (3.6.3) alakú integrál nem adható meg az elemi függvények segítségével. Viszont igazolható, hogy elemi transzformációk által az általános elliptikus integrál a következő integrálok egyikére vezethető vissza (eltekintve azon tagoktól, amelyek elemi függvények segítségével írhatóak fel):

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}, \tag{3.6.4}$$

$$\int \frac{x^2dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}} \qquad \text{és} \tag{3.6.5}$$

$$\int \frac{dx}{(1+hx^2)\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}, \tag{3.6.6}$$

ahol h és k valós paraméterek, $k \in]0, 1[$. Az $x = \sin\varphi$ helyettesítéssel a (3.6.4), (3.6.5) és (3.6.6) integrálok a következő kanonikus integrálok egyikére vagy ezek kombinációjára vezethetők vissza:

$$\int \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}, \tag{3.6.7}$$

$$\int \sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}\ d\varphi \qquad \text{illetve} \tag{3.6.8}$$

$$\int \frac{d\varphi}{(1+h\sin^2\varphi)\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}} \tag{3.6.9}$$

A (3.6.7), (3.6.8) és (3.6.9) integrálok elnevezései rendre **elsőfajú elliptikus integrál**, **másodfajú elliptikus integrál** illetve **harmad**

fajú elliptikus integrál (A.M. Legendre osztályozása szerint).

4. fejezet

Valós változós valós függvények integrálszámítása

4.1. Az integrálszámítás kialakulása

Az infinitezimális analízis megalkotói saját kalkulusuk fordított feladatait tanulmányozva vezették be az integrálszámítást. Newton fluxióelméletében különösen világos a fluxiók és fluensek kiszámításának feladata közötti kölcsönös inverz kapcsolat. Leibniznál a kérdés bonyolultabb volt: az integ-rál kezdetben határozott integrálként jelentkezett, mint végtelen sok végtelen kicsiny differenciál összege. Az integrálás azonban gyakorlatilag nála is a primitív függvény megkeresését jelentette. Kezdetben az integrálásnak ez a felfogása uralkodott.

A fordított feladatok ugyanakkor igen általános alakban jelentkeztek. Az integrálszámítás a függvény integrálásán kívül egyebek között még a differenciálegyenletek elméletének, a variációszámításnak és a speciális függvények elméletének feladatait is tartalmazta. A matematikai analízis e területei csak fokozatosan váltak ki az integrálszámításból a XVIII. sz. folyamán. Az integ-rálszámítás ilyen általános felfogása mellett e tudományág rendkivül gyorsan növekedett. Eulernek 1768-1770-ben az integrálszámítás szisztematikus kifejezéséhez már három vaskos kötetre volt szüksége, ezek címe: *Institutiones calculi integralis.* Általánosan elfogadott vélemény, így Euler véleménye is az volt, hogy az integrálszámítás nem más, mint módszer, amelynek segítségével, a differenciálok közötti megadott összefüggés alapján, megtalálható maguknak a mennyiségeknek az összefüggése. Integrálásnak azt a műveletet nevezzük, amellyel ez elérhető. Az ilyen kalkulus kiindulópontja természetesen a határozatlan integrál. A célja pedig az, hogy a függvények minél szélesebb osztályára ki legyen dolgozva a primitív függvény megkeresésének módszere.

A XVIII. sz. első felében az integrálszámítás felépítésének feladata lényegében megoldódott. A fő sikereket kezdetben e téren Johann Bernoulli érte el, aki megírta az integrálszámítás első rendszeres tankönyvét (1742), azután pedig Euler. Euler a határozatlan integrál fogalmából mint alapból kiindulva, a meghatározások egész rendszerét vezette be. A tetszőleges additív integrációs konstanssal együtt vett integrált teljes integrálnak nevezte, s a tetszőleges állandó rögzítése vezetett a partikuláris integrálhoz. Ez utóbbi az argumentum bizonyos meghatározott értékére a határozott integrállal ekvivalens értéket adott. Ezt a szigorú következetességet az alkalmazás kérdéseiben (abban az esetben, amikor a primitív függvény nem elemi) nem lehetett megtartani, így a megfelelő közelítő számításokban a határozott integrálokat a maival analóg módon összegezésként vezették be. A Leibniz-féle $\int f(x)dx$ szimbólumot a határozott integrál kifejezésre juttatása érdekében módosítani kellett, s ez szintén nem egyszerre történt meg. Az Euler-féle $\int f(x)dx \begin{bmatrix} ab & x=a \\ ad & x=b \end{bmatrix}$ szimbólumot Laplace javaslatára 1779-től nevezték "határozott integrálnak". Az általunk megszokott $\int_a^b f(x)dx$ szimbólumot csak 1819-1822-ben vezette be J.B.J. Fourier.

Az integrálszámítás terén elért eredményeit Cauchy a *Résumé* *des leçons donnès sur le calcul infinitésimal* című könyvében (1823) fejti ki. Nála az integrálszámítás felépítése gyökeresen különbözött Euler és sok más előd irányvonalától. Sajátossága mindenekelőtt az alapfogalom megválasztásában jutott kifejezésre. Ez a fogalom a határozott integrál fogalma volt. Új volt az is, hogy a tárgyalás elején analitikus bizonyítást adott arra, hogy egy folytonos függvénynek létezik határozott integrálja. Ez a bizonyítás az egzisztenciatételek későbbi bizonyításainak minden jegyét magán viselte. Gondolatmenete a következő: legyen adott az $[x_0, x]$ intervallumon folytonos f függvény. Osszuk fel ezt az intervallumot n részre az $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$ pontokkal. Előállítva az $S := \sum_{i=1}^{n} f(x_{i-1})(x_i - x_{i-1})$ összeget, bebizonyítjuk, hogy $S \to A$, ha $n \to \infty$ és $(x_i - x_{i-1}) \to 0$. Az A integrálérték ily módon úgy áll elő, mint az integrációs intervallum határainak és az f-nek a függvénye.

Az integrálszámítás fejlődésével párhuzamosan kialakultak az integrálás műveletének általánosításai is. 1743-ban A.K. Clairaut bevezette az L görbe mentén vett kétváltozós $\int_L (Pdx + Qdy)$ vonalintegrálokat. Euler 1770-ben gyakorlati feladatokkal kapcsolatban kidolgozta a kettős integrálok elméletét. Két évvel később (1772-ben) Lagrange a forgásellipszoidok vonzásának kérdését tanulmányozva meghonosította a matematikában a hármas integrálokat (a publikálás dátuma 1775).

Az integrálszámítás fejlődése során egész sor speciális jellegű probléma vetődött fel. Ezek megoldási kisérletei a matematikai analízis új területeinek kidolgozásához vezettek. E területek előbb vagy utóbb ki is váltak elsődleges forrásukból: a XVIII. századi integrálszámításból. Közülük mindenekelőtt a differenciálegyenletek elméletét és a variációszámítást kell megemlítenünk. A speciális alakú integrálok kiszámítása nyomán a speciális függvények elméletének egész sor tételét fedezték fel. Ezen a téren az első- és másodfajú Euler-féle függvények, vagyis a

$$B(a, b) = \int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{b-1}dx$$

béta-függvények (1730-1731) és a

$$\Gamma(a) = \int_0^\infty e^{-x} x^{a-1} dx$$

gamma-függvények (1729-1730) felfedezése jelentette az első lépéseket. Ugyancsak a speciális függvények osztályához tartoznak az elliptikus függvények, amelyek az elliptikus integrálok, vagyis az $\int R(x, \sqrt{P_n(x)})dx$ alakú integrálok inverzei (az R kétváltozós racionális függvény, $n = 3$ vagy $n = 4$, a P_n pedig többszörös gyökök nélküli polinom). Ezek az integrálok onnan kapták nevüket, hogy egyikükkel, az

$$\int_0^\alpha \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}\, d\varphi$$

(Legendre-féle normálalakban felírt másodfajú elliptikus) integrállal kifejezhető az ellipszis L ívhossza: $u = a \cos \varphi$, $v = b \sin \varphi$ $(a > b)$ esetén

$$\begin{aligned} L &= \int_0^\alpha \sqrt{\left(\frac{du}{d\varphi}\right)^2 + \left(\frac{dv}{d\varphi}\right)^2} d\varphi = \int_0^\alpha \sqrt{a^2 \cos^2 \varphi + b^2 \sin^2 \varphi}\, d\varphi = \\ &= a \int_0^\alpha \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}\, d\varphi, \end{aligned}$$

ahol $k = \frac{1}{a}\sqrt{a^2 - b^2}$ az ellipszis excentricitása. Az ilyen alakú integrálokat különféle görbék ívhosszának kiszámításához a XVIII. sz. sok matematikusa felhasználta. 1761-ben Euler megtalálta az elliptikus integrálok összegezésének tételét, invertálásuk gondolatát pedig a XVIII. sz. végén C.F. Gauss vetette fel elsőként. Az elliptikus függvények elmélete lényegében a XIX. században épült ki Abel, Jacobi, Liouville és más matematikusok munkája nyomán. Az említett függvények alkotják a speciális függvények egyik osztályát: a transzcendens függvényeket. Ezek mindegyikét olyan integrálokból származtatták, amelyeket elemi függvényekkel nem lehetett kifejezni.

Egy sor nehéz integrál kiszámításánál a komplex változók helyettesítésének módszerét is alkalmazták, ami később megteremtette a kapcsolatot az integrálszámítás és a komplex változós függvények elmélete között. Például már d'Alembert és Euler megállapította, hogy $\varphi(x+iy) = M + iN$ és ugyanakkor $\varphi(x-iy) = M - iN$. Akkor $P + iQ = \int (M+iN)(dx + i\,dy)$ és $P - iQ = \int (M - iN)(dx - i\,dy)$, amiből $P = \int M dx - N\,dy$ illetve $Q = \int N dx + M\,dy$. Abból pedig, hogy az integrandusok a P illetve Q teljes differenciáljai, máris következnek a nevezetes d'Alembert-Euler-féle relációk:

$$\frac{\partial M}{\partial y} = -\frac{\partial N}{\partial x}; \quad \frac{\partial N}{\partial y} = \frac{\partial M}{\partial x}.$$

Később Laplace olyan integrálokat vizsgált, amelyeknél az integráció határai voltak képzetesek.

Az integrálszámításnak ez a területe fontos szerepet játszott a komplex függvénytan létrejöttében; annak egyik forrása volt. A komplex függvénytan területén G.F.B. Riemann vizsgálatait a széles körű analógia jellemezte, amely összekapcsolja ezt az elméletet a matematika sok más területével. E vizsgálatok jelentős mértékben megváltoztatták a komplex változós függvényekről alkotott elképzelések izolált voltát. Egyidejűleg magának az elmé-letnek a keretei között olyan új fejezetek alakultak ki, amelyek szorosan ösz-szekapcsolták más diszciplinákkal. Riemann alapvető eredményeit *A komplex változós függvények általános elméletének alapjai* című disszertációja (1851) és *Az Abel-függvények elmélete* című műve (1857) tartalmazza. Ismeretes, hogy a $z = x+iy$ komplex argumentum $w = u+iv$ analitikus függvénye kielégíti a $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$ és $\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$ d'Alembert-Euler-egyenleteket. Ebből nyilvánvalóan következik a $\Delta u = 0$, $\Delta v = 0$ feltétel ($\Delta := \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$). Riemann korában e nevezetes ténynek számos interpretációja jelent meg. Helmholz az u-t úgy értelmezte, mint az összenyomhatatlan folyadék (x, y) síkon történő mozgása esetén a sebesség potenciálját, s ezáltal v volt az áramlás függvénye. Az elektrotechnikában stacionárius áramlás esetén G.R. Kirchhoff elektrosztatikus potenciálként vezette be az u függvényt. Ohm feszültségként definiálta, Fourier pedig a stacionárius hőmozgás feladatának megoldásakor hőmérsékletként interpretálta. Végül Gauss úgy értelmezte az említett tényt, mint annak a feltételét, hogy a $\frac{dw}{dz} = \frac{d(u+iv)}{d(x+iy)}$ értéke a $dx + i\,dy$ iránytól függetlenül csak az $x + iy$ ponttól függjön, vagyis az (x, y) síknak az (u, v) síkra való leképezése konformis leképezés legyen.

Riemann úgy vélte, hogy megértek a feltételek ahhoz, hogy a matematikai fizika gondolatait át lehessen vinni a függvényelméletbe. Az idő tájt már a Laplace-féle egyenlet megoldási módszereit is eléggé jól kidolgozták. A Dirichlet-problémának nevezett megfelelő peremfeladatot így fogalmazták meg: meghatározandó a függvény értéke a tartomány belső pontjaiban, ha ismeretesek a tartomány határán felvett értékei. A Dirichlet-feladat meg-oldását Gauss (1813-ban és 1840-ben), Green (1828-ban), Kirchhoff, Dirichlet és mások dolgozták ki a speciális esetek egész sorára. Ezekben a vizsgálatokban kristályosodott ki később az egzisztenciatétel, amely szerint, ha adott az egyszeresen összefüggő G tartomány határán az $u(x, y)$ folytonos függvény, akkor a G belsejében létezik olyan analitikus $w = u + iv$ függvény, amelynek valós része folytonosan közeledik a megadott peremértékekhez. E feladatkörben Riemann azt a problémát tanulmányozta, hogy a peremfeltételek milyen mértékben határozzák meg az analitikus függvényeket. Gyorsan tisztázódott, hogy egyszerű zárt görbével határolt véges tartomány esetén a $w(z) = u + iv$ $(z = x + iy)$ függvény meghatározásához elegendő megadni az u értékeinek határeloszlását és a v értékét a tartomány egy pontjában. Meg lehet adni fordítva is, vagyis a v értékeinek határeloszlását és az u értékét egy pontban; és végül meg lehet adni a $\varphi(u, v)$

összefüggést a tartomány határának minden pontjában vagy a határ minden pontpárjára két összefüggést, amelyet e pontokban az u és v értékeknek kell kielégíteniük.

Riemann minden megfontolásában az úgynevezett Dirichlet-féle elvre támaszkodott. E szerint az összes lehetséges olyan függvény közül, amelynek a G tartományon megegyezik a határeloszlása, az a függvény, amely eleget tesz a

$$min\ I = min \iiint_G \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z} \right)^2 \right] dx\ dy\ dz$$

feltételnek, az adott tartományon harmonikus lesz. Erről a feltételről Riemann, a jelek szerint Dirichlet előadásai nyomán szerzett tudomást. A matematikai fizika (potenciálelmélet) feladatainak megoldásával kapcsolatban a fenti már ismeretes volt Gauss, Thomson és Kirchhoff előtt is. A feltétel náluk teljesen határozott fizikai értelmet nyert: az I integrál a homogén, összenyomhatatlan folyadék megállapodott áramlásának kinetikus energiáját fejezte ki, ahol u a sebesség potenciálját jelölte. Riemann azonban nem tudta bebizonyítani, hogy létezik olyan u függvény, amely mellett az I integrál minimálissá válik. A fizikai analógiák alapján keletkezett és most vitássá vált Riemann-féle egzisztenciatétel sokáig a levegőben lógott. Bizonyítását más utakon H.A. Schwarz (1870) és C.G. Neumann (1884) adta meg, de Riemann következtetéseinek megalapozottságát – a variációszámítás direkt módszereit használva – csak Hilbertnek sikerült bebizonyítania (1901-1909). Ezt a kérdést általánosabb formában R. Courant és H. Weyl tette vizsgálat tárgyává.

4.2. A Riemann-féle integrál

1. Példa. Valamely anyagi pont egyenes vonalú mozgása során jelölje $s(t)$ a megtett útat a t időpillanatig, és $v(t) = s'(t)$ a sebességet ugyanabban a t időpillanatban. Feltételezzük, hogy ismert az anyagi pont $s(t_0)$ helyzete a t_0 időpontban és az anyagi pont sebességvektora tetszőleges időpillanatban. Keressük az $s(t)$ értékét tetszőleges $t > t_0$ időpontban.

Ha feltételezzük, hogy a $v(t)$ sebesség folytonosan változik, akkor kis időintervallumban az elmozdulás megközelítőleg megadható úgy, mint a $v(\tau)\Delta t$ szorzat, ahol $v(\tau)$ az időintervallum τ pontjában mért sebesség és Δt az időintervallum hossza. Tekintettel erre az észrevételre, osszuk fel a $[t_0, t]$ intervallumot "kicsi" részintervallumokra a t_i $(i = 0, \ldots, n)$ időpontok segítségével: $t_0 < t_1 < \ldots < t_n = t$. Legyen $\Delta t_i = t_i - t_{i-1}$ és $\tau_i \in [t_{i-1}, t_i]$ $(i = 1, \ldots, n)$. Ekkor

$$s(t) - s(t_0) \approx \sum_{i=1}^{n} v(\tau_i) \cdot \Delta t_i.$$

A közelítés annál pontosabb, minél jobb finomítását adjuk meg a $[t_0, t]$ intervallumnak. Következésképp

$$\lim_{\|\Delta\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} v(\tau_i)\Delta t_i = s(t) - s(t_0), \tag{4.2.1}$$

ahol $\Delta \in Par[t_0, t]$ és $\|\Delta\|$ a Δ felosztás normája.

2. Példa. Határozzuk meg az $y = x^2$ egyenletű parabola alatti terület nagyságát a $[0, 1]$ intervallumon.

Követve Arkhimédész gondolatát – anélkül, hogy a síkrész területét értelmeznénk – a parabola alatti területet megközelítjük hiánnyal bizonyos téglalapok területeinek az összegével (5.1. ábra).

Legyen $\Delta \in Par[0, 1]$, $\Delta : 0 = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = 1$. Ha σ

jelöli a keresett terület nagyságát, akkor

$$\sigma \approx \sum_{i=1}^{n} x_{i-1}^2 \cdot (x_i - x_{i-1}).$$

Ekkor

$$\lim_{\|\Delta\|\to 0} \sum_{i=1}^{n} x_{i-1}^2 (x_i - x_{i-1}) = \sigma.$$

Innen, az $f(x) = x^2$, $\xi_i = x_{i-1}$ és $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ $(i = 1, \ldots, n)$ jelölésekkel

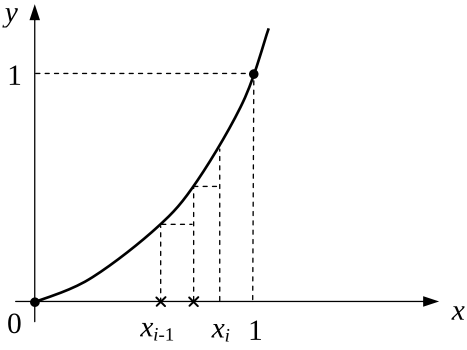
$$\lim_{\|\Delta\|\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i = \sigma \tag{4.2.2}$$

Az (4.2.1) és (4.2.2) összefüggések csupán jelölésben különböznek. Tekintettel (4.2.1)-re írható, hogy $\sigma = F(1) - F(0)$, ahol F az f primitív függvénye. Mivel $f(x) = x^2$, ezért $F(x) = \frac{1}{3}x^3 + c$. Így $\sigma = F(1) - F(0) = \frac{1}{3}$.

1. Értelmezés. *Legyen* $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$ *adott intervallum,* $\Delta \in Par[a, b]$, $\Delta : a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$ *és* $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$ $(i = 1, \ldots, n)$ *tetszőleges pontok. A* $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$ *pontrendszert a* Δ *felosztáshoz tartozó* ***közbeeső pontrend-szernek*** *nevezzük. Jelölje* P_Δ *a* Δ *felosztáshoz tartozó összes közbeeső pont-rendszerek halmazát. A* (Δ, ξ) *párt, ahol* $\Delta \in Par[a, b]$ *és* $\xi \in P_\Delta$, ***felosztásrendsz-ernek*** *nevezzük. Az* $[a, b]$ *intervallum összes felosztásrendszereinek halmazát jelölje* $Par_R[a, b]$, *amelyet* ***Riemann-féle felosztásrendsz-ernek*** *nevezünk. Következésképpen:*

$$\begin{aligned} P_\Delta &:= \{\xi \mid \xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n),\ \xi_i \in [x_{i-1}, x_i],\ i = 1, \ldots, n\} \quad \textit{és} \\ Par_R[a, b] &:= \{(\Delta, \xi) \mid \Delta \in Par[a, b],\ \xi \in P_\Delta\}. \end{aligned}$$

2. Értelmezés. *Adott az* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *függvény, és legyen* $(\Delta, \xi) \in$



y
1
0
x
x_{i-1}
x_i
1

$Par_R[a,b]$ tetszőleges felosztásrendszer. A

$$\sigma_\Delta(f,\xi) := \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1})$$

összeget az f függvényhez és a (Δ,ξ) felosztásrendszerhez tartozó ***Riemann-féle integrálösszegnek*** *nevezzük.*

3. Értelmezés. *Az $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ függvényt* ***Riemann-integrálhatónak*** *nevezzük, ha létezik $I(f) \in \mathbb{R}$ szám úgy, hogy bármely $\varepsilon > 0$ esetén létezik $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ azzal a tulajdonsággal, hogy minden $(\Delta,\xi) \in Par_R[a,b]$, $\|\Delta\| < \delta$ esetén teljesül az $|I(f) - \sigma_\Delta(f,\xi)| < \varepsilon$ egyenlőtlenség. Az $I(f)$ valós számot az f függvény* ***Riemann-integráljának*** *nevezzük. Jelölése: $\int_a^b f(x)dx$, ahol a és b az alsó illetve a felső integrálási határok, $f(x)dx$ a differenciálforma, és x az integrálási változó. Az $[a,b]$ intervallumon integrálható függvények halmazát $R[a,b]$ jelöli. Így $R[a,b] := \{f \mid f : [a,b] \to \mathbb{R}$ függvény Riemann-integrálható az $[a,b]$ intervallumon$\}$.*

A fenti értelmezés alapján az $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ függvény Riemann integrálhatósága azt jelenti, hogy létezik és véges a következő határérték:

$$\lim_{\|\Delta\|\to 0} \sigma_\Delta(f,\xi) = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) = \int_a^b f(x)\,dx.$$

Ez teljes összhangban van az 1. és 2. Példákkal.

1. Tulajdonság. *Legfeljebb egy $I(f)$ valós szám létezik a 3. Értelmezésben.*

Bizonyítás. Tételezzük fel, hogy két ilyen $I_1(f)$ és $I_2(f)$ valós szám létezik. Ekkor bármely $\varepsilon > 0$ számhoz létezik $\delta_1 = \delta_1(\varepsilon) > 0$ úgy, hogy tetszőleges $(\Delta,\xi) \in Par_R[a,b]$, $\|\Delta\| < \delta_1$ esetén $|\sigma_\Delta(f,\xi) - I_1(f)| <$

$\frac{\varepsilon}{2}$; hasonlóan létezik $\delta_2 = \delta_2(\varepsilon) > 0$ úgy, hogy tetszőleges $(\Delta, \xi) \in Par_R[a,b]$, $\|\Delta\| < \delta_2$ esetén $|\sigma_\Delta(f,\xi) - I_2(f)| < \frac{\varepsilon}{2}$. Legyen $\delta = \delta(\varepsilon) = \min\{\delta_1(\varepsilon), \delta_2(\varepsilon)\}$. Ekkor bármely $(\Delta, \xi) \in Par_R[a,b]$, $\|\Delta\| < \delta$ esetén

$$|I_1(f) - I_2(f)| \leq |\sigma_\Delta(f,\xi) - I_1(f)| + |\sigma_\Delta(f,\xi) - I_2(f)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Mivel ε tetszőleges, ezért $I_1(f) = I_2(f)$. □

2. Tétel. *(Cauchy). Annak szükséges és elégséges feltétele, hogy az $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ függvény Riemann-integrálható legyen az, hogy bármely $\varepsilon > 0$ számhoz létezzen olyan $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ szám, hogy bármely (Δ', ξ'), $(\Delta'', \xi'') \in Par_R[a,b]$, $\|\Delta'\| < \delta$, $\|\Delta''\| < \delta$ esetén $|\sigma_{\Delta'}(f,\xi') - \sigma_{\Delta''}(f,\xi'')| < \varepsilon$.*

Bizonyítás. Szükségesség. Ha $f \in R[a,b]$, akkor a 3. Értelmezés alapján bármely $\varepsilon > 0$ esetén létezik $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ úgy, hogy tetszőleges $(\Delta, \xi) \in Par_R[a,b]$, $\|\Delta\| < \delta$ esetén

$$\left|\sigma_\Delta(f,\xi) - \int_a^b f(x)dx\right| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Ha (Δ', ξ'), $(\Delta'', \xi'') \in Par_R[a,b]$, $\|\Delta'\| < \delta$, $\|\Delta''\| < \delta$, akkor

$$\left|\sigma_{\Delta'}(f,\xi') - \int_a^b f(x)dx\right| < \frac{\varepsilon}{2}$$

és

$$\left|\sigma_{\Delta''}(f,\xi'') - \int_a^b f(x)dx\right| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Innen $|\sigma_{\Delta'}(f,\xi') - \sigma_{\Delta''}(f,\xi'')| < \varepsilon$, amit igazolni kellett.

Elégségesség. A feltétel szerint bármely $\varepsilon > 0$ számhoz létezik $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ úgy, hogy minden $(\Delta', \xi'), (\Delta'', \xi'') \in Par_R[a,b]$, $\|\Delta'\| < \delta$, $\|\Delta''\| < \delta$ esetén

$$|\sigma_{\Delta'}(f,\xi) - \sigma_{\Delta''}(f,\xi'')| < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{4.2.3}$$

Legyen $(\Delta_n, \xi^n) \in Par_R[a,b]$ úgy, hogy $\lim\limits_{n\to\infty} \|\Delta_n\| = 0$. Ekkor a $\delta = \delta(\varepsilon)$ számhoz létezik $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ úgy, hogy bármely $n > n_\varepsilon$ esetén $\|\Delta_n\| < \delta$. Így bármely $m, n \in \mathbb{N}$, $m > n_\varepsilon$, $n > n_\varepsilon$ esetén

$$|\sigma_{\Delta_m}(f, \xi^m) - \sigma_{\Delta_n}(f, \xi^n)| < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{4.2.4}$$

Ez viszont azt jelenti, hogy a $(\sigma_{\Delta_n}(f, \xi^n))$ sorozat fundamentális, ezért az 1. Fejezet, 25. Tétele alapján $(\sigma_{\Delta_n}(f, \xi^n))$ konvergens sorozat. Jelölje $\alpha := \lim\limits_{n\to\infty} \sigma_{\Delta_n}(f, \xi^n)$. Ekkor bármely $n > n_\varepsilon$ és $\|\Delta_n\| < \delta$ esetén, áttérve határértékre $m \to \infty$ szerint az (4.2.4) egyenlőtlenségben kapjuk, hogy $|\alpha - \sigma_{\Delta_n}(f, \xi^n)| \le \frac{\varepsilon}{2}$. Innen, bármely $(\Delta, \xi) \in Par_R[a,b]$, $\|\Delta\| < \delta$ esetén

$$|\sigma_\Delta(f,\xi) - \alpha| \le |\sigma_\Delta(f,\xi) - \sigma_{\Delta_n}(f,\xi^n)| + |\sigma_{\Delta_n}(f,\xi^n) - \alpha| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

ahol alkalmaztuk az (4.2.3) feltételt. Következésképp $f \in R[a,b]$. □

4. Értelmezés. *Az $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ függvényt **korlátosnak** nevezzük, ha létezik $M > 0$ úgy, hogy $|f(x)| \le M$, bármely $x \in [a,b]$ esetén. Az $[a,b]$ intervallumon korlátos f függvények halmazát $B[a,b]$ szimbólummal jelöljük (bounded function = korlátos függvény).*

3. Tulajdonság. *Annak szükséges feltétele, hogy az $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ függvény Riemann-integrálható legyen az, hogy f korlátos függvény az $[a,b]$ intervallumon.*

Bizonyítás. Feltételezzük, hogy $f \in R[a,b] \setminus B[a,b]$. Mivel $f \in R[a,b]$, ezért létezik $I(f) \in \mathbb{R}$ azzal a tulajdonsággal, hogy bármely $\varepsilon > 0$ számhoz létezzen $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ úgy, hogy minden $(\Delta, \xi) \in Par_R[a,b]$, $\|\Delta\| < \delta$ esetén

$$I(f) - \varepsilon < \sigma_\Delta(f,\xi) < I(f) + \varepsilon. \tag{4.2.5}$$

Legyen $\Delta \in Par[a,b]$, $\Delta : a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$ rögzített úgy, hogy $\|\Delta\| < \delta$. Továbbá, legyen $\xi \in P_\Delta$ tetszőleges. Mivel $f \notin B[a,b]$, ezért létezik $i_0 \in \{1,\ldots,n\}$ úgy, hogy f nem korlátos az $[x_{i_0-1}, x_{i_0}]$ intervallumon. Ekkor tekintsük azt az esetet, amikor f felülről nem korlátos: bármely $r \in \mathbb{R}$ esetén létezik $x_r \in [x_{i_0-1}, x_{i_0}]$ úgy, hogy $f(x_r) > r$. Jelölje

$$S = \sum_{\substack{i=1 \\ i\neq i_0}}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) \quad \text{és} \quad r_0 = \frac{I(f)+\varepsilon - S}{x_{i_0} - x_{i_0-1}}.$$

Ekkor létezik $x_{r_0} \in [x_{i_0-1}, x_{i_0}]$, amelyre $f(x_{r_0}) > r_0$. Legyen $\xi_{i_0} = x_{r_0}$. Így

$$f(\xi_{i_0}) > \frac{I(f)+\varepsilon - S}{x_{i_0} - x_{i_0-1}},$$

vagyis

$$\sigma_\Delta(f,\xi) = S + f(\xi_{i_0})(x_{i_0} - x_{i_0-1}) > S + I(f) + \varepsilon - S = I(f) + \varepsilon,$$

ellentmondás az f integrálhatóságának (lásd (4.2.5)). $\square$

5. Értelmezés. *Adott az $f : X \to \mathbb{R}$ függvény, $X \subseteq \mathbb{R}$ és az $E \subseteq X$ nem üres halmaz. Az f függvény $\omega(f;E)$* ***oszcillációja*** *alatt az*

$$\omega(f;E) := \sup\{|f(x') - f(x'')| : x', x'' \in E\}$$

számot értjük. Ha $a \in X \subseteq \mathbb{R}$, akkor az $f : X \to \mathbb{R}$ függvényhez rendelt

$$\omega(f;a) := \lim_{\delta \searrow 0} \omega(f;]a-\delta, a+\delta[\cap X)$$

mennyiséget az f függvény ***oszcillációjának az*** *a* ***pontban****.*

Az f függvény $\omega(f;E)$ oszcillációját nem szoktuk az E egyelemű halmaz esetén használni (ekkor ugyanis $\omega(f;E) = 0$). Ezért az $\omega(f;E)$ értelmezésében E legalább kételemű halmaz, míg $\omega(f;a)$ mindig az f

oszcillációját jelenti az a pontban (az 5. Értelmezés szerint).

Észrevehető, hogy $\omega(f;E)$ akkor és csak akkor véges, ha f korlátos az E halmazon. Továbbá $\omega(f;a)=0 \Leftrightarrow f$ folytonos az a pontban.

3. Példa.

$$\begin{array}{llll} \omega(f;[-1,2])=4, \ \text{ha} \ f(x)=x^2; & \omega(f;[-1,2])=3, \ \text{ha} \ f(x)=x; \\ \omega(f;]-1,2[)=3, \ \text{ha} \ f(x)=x; & \omega(f;[-1,2])=2, \ \text{ha} \ f(x)=\operatorname{sgn} x; \\ \omega(f;[0,2])=1, \ \text{ha} \ f(x)=\operatorname{sgn} x; & \omega(f;]0,2])=0, \ \text{ha} \ f(x)=\operatorname{sgn} x. \end{array}$$

$$\omega(f;0)=1, \quad \text{ha} \quad f(x)=\begin{cases} 0, & \text{ha} \quad x\le 0 \\ x+1, & \text{ha} \quad x>0; \end{cases}$$

$$\omega(f;0)=2, \quad \text{ha} \quad f(x)=\begin{cases} \sin\frac{1}{x}, & \text{ha} \quad x\in\mathbb{R}\setminus\{0\} \\ 0, & \text{ha} \quad x=0. \end{cases}$$

Az utolsó példa azt is mutatja, hogy az f függvény oszcillációja egy pontban nem azonos a függvény ugyanazon pontban tekintett ugrásával.

4. Tulajdonság. *Annak elégséges feltétele, hogy az $[a,b]$ intervallumon korlátos $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ függvény Riemann-integrálható legyen az, hogy bármely $\varepsilon>0$ számhoz létezzen a $\delta=\delta(\varepsilon)>0$ úgy, hogy bármely $\Delta\in Par[a,b]$, $\Delta: a=x_0<x_1<\ldots<x_n=b$, $\|\Delta\|<\delta$ esetén*

$$\sum_{i=1}^{n}\omega(f;[x_{i-1},x_i])\cdot(x_i-x_{i-1})<\varepsilon.$$

Bizonyítás. Legyen $\Delta\in Par[a,b]$, $\Delta: a=x_0<x_1<\ldots<x_n=b$ és $\widetilde{\Delta}\in Par[a,b]$ a Δ felosztás finomítása. Ekkor $\widetilde{\Delta}$ az $[x_{i-1},x_i]$ $(i=1,\ldots,n)$ intervallumnak a következő felosztását származtatja: $x_{i-1}=x_{i0}<x_{i1}<\ldots<x_{in_i}=x_i$. Vezessük be a következő jelöléseket: $\Delta_i:=[x_{i-1},x_i]$, $\Delta x_i:=x_i-x_{i-1}$ $(i=1,\ldots,n)$ és $\Delta_{ij}:=[x_{i,j-1},x_{ij}]$,

$\Delta x_{ij} := x_{ij} - x_{i,j-1}$ $(j = 1, \ldots, n_i\,;\ i = 1, \ldots, n)$. Ekkor

$$
\begin{aligned}
&|\sigma_{\widetilde{\Delta}}(f, \widetilde{\xi}) - \sigma_\Delta(f, \xi)| = \\
&\quad = \left| \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n_i} f(\xi_{ij}) \Delta x_{ij} - \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i) \Delta x_i \right| = \\
&\quad = \left| \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n_i} f(\xi_{ij}) \Delta x_{ij} - \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n_i} f(\xi_i) \Delta x_{ij} \right| = \\
&\quad = \left| \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n_i} (f(\xi_{ij}) - f(\xi_i)) \Delta x_{ij} \right| \le \\
&\quad \le \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n_i} |f(\xi_{ij}) - f(\xi_i)| \Delta x_{ij} \le \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n_i} \omega(f; \Delta_i) \Delta x_{ij} = \\
&\quad = \sum_{i=1}^{n} \omega(f; \Delta_i) \Delta x_i = \sum_{i=1}^{n} \omega(f; [x_{i-1}, x_i]) \cdot (x_i - x_{i-1}).
\end{aligned}
$$

A feltételt alkalmazva, bármely $\varepsilon > 0$ számhoz létezik $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ úgy, hogy minden (Δ, ξ), $(\widetilde{\Delta}, \widetilde{\xi}) \in Par_R[a, b]$, $\|\Delta\| < \delta$ és $\widetilde{\Delta}$ a Δ felosztás finomítása esetén teljesül az $|\sigma_{\widetilde{\Delta}}(f, \widetilde{\xi}) - \sigma_\Delta(f, \xi)| < \varepsilon$. Továbbá, ha (Δ', ξ'), $(\Delta'', \xi'') \in Par_R[a, b]$ és $\|\Delta'\| < \delta$, $\|\Delta''\| < \delta$, akkor $\widetilde{\Delta} = \Delta' \cup \Delta'' \in Par[a, b]$ és $\widetilde{\Delta}$ a Δ' és Δ'' felosztások finomításai. Így a $(\widetilde{\Delta}, \widetilde{\xi}) \in Par_R[a, b]$ esetén írható, hogy $|\sigma_{\widetilde{\Delta}}(f, \widetilde{\xi}) - \sigma_{\Delta'}(f, \xi')| < \varepsilon$ és $|\sigma_{\widetilde{\Delta}}(f, \widetilde{\xi}) - \sigma_{\Delta''}(f, \xi'')| < \varepsilon$. Innen $|\sigma_{\Delta'}(f, \xi') - \sigma_{\Delta''}(f, \xi'')| < 2\varepsilon$. Következésképpen: tetszőleges $\varepsilon > 0$ számhoz létezik $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ úgy, hogy bármely $(\Delta', \xi'), (\Delta'', \xi'') \in Par_R[a, b]$, $\|\Delta'\| < \delta$ és $\|\Delta''\| < \delta$ esetén $|\sigma_{\Delta'}(f, \xi') - \sigma_{\Delta''}(f, \xi'')| < 2\varepsilon$. Alkalmazva a Cauchy-kritériumot (a 2. Tételt) következik, hogy $f \in R[a, b]$. □

5. Következmény. *Az $[a, b]$ intervallumon folytonos bármely $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ függvény Riemann-integrálható.*

Bizonyítás. Igazolnunk kell, hogy $f \in C[a, b] \Rightarrow f \in R[a, b]$. Ha $f \in C[a, b]$, akkor $f \in B[a, b]$. Így teljesül a Riemann integrálhatóság szükséges feltétele. Ugyanakkor a 3. Fejezet, 14. Tétele alapján az f egyenletesen folytonos. Ezért bármely $\varepsilon > 0$ számhoz létezik $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ úgy, hogy $\omega(f; J) < \frac{\varepsilon}{b-a}$, bármely $J \subseteq [a, b]$ zárt intervallum esetén, ahol a J hossza $< \delta$. Ekkor bármely $\Delta \in Par[a, b]$, $\Delta : a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$ esetén, ahol $\|\Delta\| < \delta$, írható:

$$\sum_{i=1}^{n} \omega(f; [x_{i-1}, x_i]) \cdot (x_i - x_{i-1}) < \frac{\varepsilon}{b-a} \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1}) = \frac{\varepsilon}{b-a} \cdot (b-a) = \varepsilon.$$

Így a 4. Tulajdonság alapján $f \in R[a, b]$. $\square$

6. Következmény. *Ha $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ tetszőleges monoton függvény az $[a, b]$ intervallumon, akkor f Riemann-integrálható.*

Bizonyítás. Mivel f monoton függvény az $[a, b]$ intervallumon, ezért $\omega(f; [a, b]) = |f(b) - f(a)|$. Legyen $\varepsilon > 0$ adott és $\delta = \varepsilon/(|f(b) - f(a)|)$. Feltételezhető, hogy $f(a) \neq f(b)$, mert ellenkező esetben az f állandó függvény, és az 5. Következmény alapján azonnal következik, hogy f Riemann-integrálható. Legyen $\Delta \in Par_R[a, b]$, $\Delta : a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$, $\|\Delta\| < \delta$. Ekkor az f monotonításából következik, hogy

$$\begin{aligned} &\sum_{i=1}^{n} \omega(f; [x_{i-1}, x_i]) \cdot (x_i - x_{i-1}) < \\ &\quad < \ \delta \sum_{i=1}^{n} \omega(f; [x_{i-1}, x_i]) = \delta \sum_{i=1}^{n} |f(x_i) - f(x_{i-1})| = \\ &\quad = \ \delta \left| \sum_{i=1}^{n} (f(x_i) - f(x_{i-1})) \right| = \delta \ |f(b) - f(a)| = \varepsilon. \end{aligned}$$

Így a 4. Tulajdonság alapján $f \in R[a, b]$. $\square$

A továbbiakban bevezetjük a Darboux-féle összegeket, az alsó és felső Darboux-integrálokat, illetve a Darboux-integrálhatóság fogalmát.

6. Értelmezés. *Legyen $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ korlátos függvény. Ha $\Delta \in$*

$Par[a,b]$, $\Delta : a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$, akkor jelölje $m_i = \inf\{f(x) : x \in [x_{i-1}, x_i]\}$ és $M_i = \sup\{f(x) : x \in [x_{i-1}, x_i]\}$, $i = 1, \ldots, n$. Az

$$\underline{S}_\Delta(f) := \sum_{i=1}^{n} m_i(x_i - x_{i-1}) \quad \text{és} \quad \overline{S}_\Delta(f) := \sum_{i=1}^{n} M_i(x_i - x_{i-1})$$

összegeket ***alsó Darboux-összegnek*** *illetve* ***felső Darboux-összegnek*** *nevezzük.*

7. Tétel. *a) Bármely $(\Delta, \xi) \in Par_R[a,b]$ esetén*

$$\underline{S}_\Delta(f) \leq \sigma_\Delta(f, \xi) \leq \overline{S}_\Delta(f).$$

b) Ha $\Delta, \Delta' \in Par[a,b]$ úgy, hogy Δ' a Δ felosztás finomítása, akkor $\underline{S}_\Delta(f) \leq \underline{S}_{\Delta'}(f)$ és $\overline{S}_\Delta(f) \geq \overline{S}_{\Delta'}(f)$.

c) Ha $\Delta_1, \Delta_2 \in Par[a,b]$, akkor $\underline{S}_{\Delta_1}(f) \leq \overline{S}_{\Delta_2}(f)$.

d) Bármely $\Delta \in Par[a,b]$ esetén $\underline{S}_\Delta(f) = \inf\{\sigma_\Delta(f,\xi) \mid \xi \in P_\Delta\}$ és $\overline{S}_\Delta(f) = \sup\{\sigma_\Delta(f,\xi) \mid \xi \in P_\Delta\}$.

e) Léteznek az $\underline{I}(f) := \sup\{\underline{S}_\Delta(f) \mid \Delta \in Par[a,b]\}$ és $\overline{I}(f) := \inf\{\overline{S}_\Delta(f) \mid \Delta \in Par[a,b]\}$ véges felső illetve alsó határok. Ugyanakkor $\underline{I}(f) \leq \overline{I}(f)$.

Bizonyítás. a) Legyen $\Delta \in Par[a,b]$, $\Delta : a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$ és $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n) \in P_\Delta$. Tekintettel a 6. Értelmezésre, $m_i \leq f(\xi_i) \leq M_i$, bármely $i = 1, \ldots, n$ esetén. Innen kapjuk az $\underline{S}_\Delta(f) \leq \sigma_\Delta(f,\xi) \leq \overline{S}_\Delta(f)$ egyenlőtlenségeket.

b) Legyen $\Delta \in Par[a,b]$, $\Delta : a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$. Az állítást elegendő olyan Δ' felosztásra igazolni, amely a következő alakú: $\Delta' = \Delta \cup \{\overline{x}\}$ és $\overline{x} \notin \Delta$. Ekkor létezik $j \in \{1, \ldots, n\}$ úgy, hogy

$x_{j-1} < \overline{x} < x_j$. Így

$$\begin{aligned}
\underline{S}_\Delta(f) &= \sum_{\substack{i=1\\ i\neq j}}^{n} m_i(x_i - x_{i-1}) + m_j(x_j - x_{j-1}) \leq \\
&= \sum_{\substack{i=1\\ i\neq j}}^{n} m_i(x_i - x_{i-1}) + m_j(\overline{x} - x_{j-1}) + m_j(x_j - \overline{x}) \qquad (4.2.6)
\end{aligned}$$

Jelölje: $m_j' = \inf\{f(x) : x \in [x_{j-1}, \overline{x}]\}$ és $m_j'' = \inf\{f(x) : x \in [\overline{x}, x_j]\}$. Ekkor $m_j \leq m_j'$ és $m_j \leq m_j''$. Ezért az (4.2.6)-ból következik, hogy

$$\underline{S}_\Delta(f) \leq \sum_{\substack{i=1\\ i\neq j}}^{n} m_i(x_i - x_{i-1}) + m_j'(\overline{x} - x_{j-1}) + m_j''(x_j - \overline{x}) = \underline{S}_{\Delta'}(f),$$

amit igazolni kellett. Hasonlóan igazolható az $\overline{S}_\Delta(f) \geq \overline{S}_{\Delta'}(f)$ egyenlőtlenség is.

c) Legyen $\Delta_1, \Delta_2 \in Par[a,b]$. Ekkor $\Delta = \Delta_1 \cup \Delta_2 \in Par[a,b]$ és Δ a Δ_1 illetve Δ_2 finomítása. Alkalmazva a b) illetve a) tulajdonságokat kapjuk, hogy

$$\underline{S}_{\Delta_1}(f) \leq \underline{S}_\Delta(f) \leq \overline{S}_\Delta(f) \leq \overline{S}_{\Delta_2}(f).$$

d) Az $\underline{S}_\Delta(f) = \inf\{\sigma_\Delta(f,\xi) \mid \xi \in P_\Delta\}$ egyenlőség igazolásához az 1. Fejezet, 3. Tulajdonságát alkalmazzuk. Az $\underline{S}_\Delta(f) \leq \sigma_\Delta(f,\xi)$, $\xi \in P_\Delta$, egyenlőtlenség teljesül az a) pont alapján. Amit még igazolni kell az, hogy bármely $\varepsilon > 0$ számhoz létezik $\xi_\varepsilon \in P_\Delta$ úgy, hogy $\sigma_\Delta(f,\xi_\varepsilon) < \varepsilon + \underline{S}_\Delta(f)$. Mivel $m_i = \inf\{f(x) : x \in [x_{i-1}, x_i]\}$, ezért az 1. Fejezet, 3. Tulajdonsága miatt az ε számhoz létezik $\xi_{\varepsilon i} \in [x_{i-1}, x_i]$ úgy, hogy

$$f(\xi_{\varepsilon i}) < m_i + \frac{\varepsilon}{b-a}.$$

Innen

$$\sigma_\Delta(f,\xi_\varepsilon) < \underline{S}_\Delta(f) + \frac{\varepsilon}{b-a}\cdot\sum_{i=1}^n (x_i - x_{i-1}) = \underline{S}_\Delta(f) + \varepsilon.$$

Ezzel a bizonyítás teljes.

Az $\overline{S}_\Delta(f) = \sup\{\sigma_\Delta(f,\xi) \mid \xi \in P_\Delta\}$ egyenlőséget hasonlóan igazoljuk.

e) Legyen $\Delta_0 \in Par[a,b]$ rögzített és $\Delta \in Par[a,b]$ tetszőleges. A c) alapján $\underline{S}_\Delta(f) \leq \overline{S}_{\Delta_0}(f)$ és $\underline{S}_{\Delta_0}(f) \leq \overline{S}_\Delta(f)$. Így a $\{\underline{S}_\Delta(f) \mid \Delta \in Par[a,b]\}$ halmaz felülről korlátos, míg a $\{\overline{S}_\Delta(f) \mid \Delta \in Par[a,b]\}$ halmaz alulról korlátos. Az 1. Fejezet 6. Tétele illetve 5. Tétele alapján léteznek a $\sup\{\underline{S}_\Delta(f) \mid \Delta \in Par[a,b]\} =: \underline{I}(f) \in \mathbb{R}$ és $\inf\{\overline{S}_\Delta(f) \mid \Delta \in Par[a,b]\} =: \overline{I}(f) \in \mathbb{R}$ értékek. A c) alapján azonnal következik, hogy $\underline{I}(f) \leq \overline{I}(f)$. $\square$

7. Értelmezés. *A 7. Tételben szereplő $\underline{I}(f)$ és $\overline{I}(f)$ valós számokat **alsó Darboux-integrálnak** illetve **felső Darboux-integrálnak** nevezzük. Az $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ korlátos függvényt **Darboux-integrálhatónak** nevezzük, ha $\underline{I}(f) = \overline{I}(f)$. Jelölések:*

$$\underline{I}(f) = \underline{\int_a^b} f(x)\, dx \quad \textit{és} \quad \overline{I}(f) = \overline{\int_a^b} f(x)\, dx.$$

*Az $\underline{I}(f) = \overline{I}(f)$ közös értéket a $D\int_a^b f(x)dx$ szimbólummal jelöljük és az f függvény **Darboux-integráljának** nevezzük. Jelölje $D[a,b] := \{f \mid f : [a,b] \to \mathbb{R}$ függvény Darboux-integrálható az $[a,b]$ intervallumon$\}$.*

8. Tétel. *Legyen $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ úgy, hogy $f \in B[a,b]$. Ekkor léteznek a*

$$\lim_{\|\Delta\|\to 0} \underline{S}_\Delta(f) \quad \textit{és} \quad \lim_{\|\Delta\|\to 0} \overline{S}_\Delta(f)$$

határértékek úgy, hogy

$$\lim_{\|\Delta\|\to 0} \underline{S}_\Delta(f) = \underline{I}(f) \quad \textit{és} \quad \lim_{\|\Delta\|\to 0} \overline{S}_\Delta(f) = \overline{I}(f).$$

Bizonyítás. A tételt $\underline{I}(f)$-re igazoljuk, $\overline{I}(f)$ esetén az eljárás hasonló. Mivel $\underline{I}(f) = \sup\{\underline{S}_\Delta(f) \mid \Delta \in Par[a,b]\}$, ezért minden $\varepsilon > 0$ számhoz létezik $\Delta_\varepsilon \in Par[a,b]$, $\Delta_\varepsilon : a = x_{\varepsilon 0} < x_{\varepsilon 1} < \ldots < x_{\varepsilon n} = b$ úgy, hogy $\underline{S}_{\Delta_\varepsilon}(f) > \underline{I}(f) - \frac{\varepsilon}{2}$. Értelmezzük a $g : [a,b] \to \mathbb{R}$,

$$g(x) = \begin{cases} m_{\varepsilon i}, & \text{ha} \quad x \in \,]x_{\varepsilon,i-1}, x_{\varepsilon i}[\quad (i = 1, \ldots, n) \\ -M, & \text{ha} \quad x \in \{x_{\varepsilon i} \mid i = 0, \ldots, n\} \end{cases}$$

segédfüggvényt, ahol $M = \sup\{|f(x)| : x \in [a,b]\} < +\infty$ és $m_{\varepsilon i} = \inf\{f(x) : x \in [x_{\varepsilon,i-1}, x_{\varepsilon i}]\}$, $i = 1, \ldots, n$. Ekkor $g \in R[a,b]$ (lásd a 8. Példát alább) és

$$\begin{aligned} \lim_{\|\Delta\|\to 0} \sigma_\Delta(g,\xi) &= \int_a^b g(x)\, dx = \\ &= m_{\varepsilon 1}(x_{\varepsilon 1} - x_{\varepsilon 0}) + \ldots + m_{\varepsilon n}(x_{\varepsilon n} - x_{\varepsilon,n-1}) = \\ &= \underline{S}_{\Delta_\varepsilon}(f) > \underline{I}(f) - \frac{\varepsilon}{2} \end{aligned}$$

(felhasználva a 3. Értelmezést). A határérték értelmezése alapján az $\varepsilon > 0$ számhoz létezik $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ úgy, hogy bármely $(\Delta, \xi) \in Par_R[a,b]$, $\|\Delta\| < \delta$ esetén

$$\sigma_\Delta(g,\xi) > \underline{S}_{\Delta_\varepsilon}(f) - \frac{\varepsilon}{2} > \underline{I}(f) - \varepsilon. \tag{4.2.7}$$

Tekintsük a $\Delta \in Par[a,b]$, $\Delta : a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$ felosztást úgy, hogy $\|\Delta\| < \delta$, és legyen $m_i = \inf\{f(x) : x \in [x_{i-1}, x_i]\}$ és $\mu_i = \inf\{g(x) : x \in [x_{i-1}, x_i]\}$ $(i = 1, \ldots, n)$. Nyilván $\mu_i \le m_i$ $(i = 1, \ldots, n)$, és így $\underline{S}_\Delta(g) \le \underline{S}_\Delta(f)$. A g értelmezéséből következik, hogy létezik $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$, melyre $\mu_i = g(\xi_i)$, tehát $\underline{S}_\Delta(g) = \sigma_\Delta(g, \xi)$. Ezen észrevétel alapján az (4.2.7) egyenlőtlenségből kapjuk, hogy $\underline{S}_\Delta(g) = \sigma_\Delta(g, \xi) > \underline{I}(f) - \varepsilon$. Felhasználva még, hogy $\underline{S}_\Delta(g) \leq \underline{S}_\Delta(f)$, következik: $\underline{S}_\Delta(f) > \underline{I}(f) - \varepsilon$. Az $\underline{I}(f)$ értelmezése alapján $\underline{S}_\Delta(f) \leq \underline{I}(f)$, tehát $\underline{S}_\Delta(f) < \underline{I}(f) + \varepsilon$. Következésképp, ha $\|\Delta\| < \delta$, akkor $\underline{I}(f) - \varepsilon < \underline{S}_\Delta(f) < \underline{I}(f) + \varepsilon$, vagyis $|\underline{S}_\Delta(f) - \underline{I}(f)| < \varepsilon$, ami azt jelenti, hogy létezik a $\lim\limits_{\|\Delta\| \to 0} \underline{S}_\Delta(f)$ határérték és $\lim\limits_{\|\Delta\| \to 0} \underline{S}_\Delta(f) = \underline{I}(f)$. $\square$

9. Tétel. *Adott az $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ függvény úgy, hogy $f \in B[a, b]$. Annak szükséges és elégséges feltétele, hogy $f \in R[a, b]$ az, hogy $f \in D[a, b]$.*

Bizonyítás. Szükségesség. Feltételezzük, hogy $f \in R[a, b] \setminus D[a, b]$. Ekkor $\underline{I}(f) < \overline{I}(f)$ (lásd 7. Tétel, e) pont). Legyen $\alpha > 0$ rögzített úgy, hogy $\alpha < \frac{1}{2}(\overline{I}(f) - \underline{I}(f))$. Továbbá, ha $\Delta \in Par[a, b]$, $\Delta : a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$, akkor tekintettel a 6. Értelmezésre, léteznek a ξ_i, $\xi_i' \in [x_{i-1}, x_i]$ $(i = 1, \ldots, n)$ pontok úgy, hogy teljesüljenek az $f(\xi_i) \leq m_i + \frac{\alpha}{b-a}$ és $f(\xi_i') \geq M_i - \frac{\alpha}{b-a}$ egyenlőtlenségek. A $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$ és $\xi' = (\xi_1', \ldots, \xi_n')$ pontrendszereknek megfelelő integrálösszegekre igazak az alábbi egyenlőtlenségek:

$$\sigma_\Delta(f, \xi) \leq \underline{S}_\Delta(f) + \alpha < \overline{S}_\Delta(f) - \alpha \leq \sigma_\Delta(f, \xi')$$

(felhasználtuk az α megválasztását és az $\underline{I}(f)$ és $\overline{I}(f)$ értelmezéseit). Innen, áttérve határértékre $\|\Delta\| \to 0$ szerint, és figyelembevéve, hogy $f \in R[a, b]$, a 8. Tétel alapján írható:

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x)\,dx &= \lim_{\|\Delta\| \to 0} \sigma_\Delta(f, \xi) \leq \underline{I}(f) + \alpha \leq \overline{I}(f) - \alpha \leq \\ &\leq \lim_{\|\Delta\| \to 0} \sigma_\Delta(f, \xi') = \int_a^b f(x)\,dx. \end{aligned}$$

Így $\underline{I}(f) + \alpha = \overline{I}(f) - \alpha$, vagyis $\alpha = \frac{1}{2}(\overline{I}(f) - \underline{I}(f))$, ellentmondás az α megválasztásának.

Elégségesség. A 7. Tétel, a) pontja szerint $\underline{S}_\Delta(f) \leq \sigma_\Delta(f,\xi) \leq \overline{S}_\Delta(f)$, bármely $(\Delta,\xi) \in Par_R[a,b]$ esetén. Mivel $f \in B[a,b]$, ezért alkalmazható a 8. Tétel:

$$\underline{I}(f) = \lim_{\|\Delta\|\to 0} \underline{S}_\Delta(f) \leq \lim_{\|\Delta\|\to 0} \sigma_\Delta(f,\xi) \leq \lim_{\|\Delta\|\to 0} \overline{S}_\Delta(f) = \overline{I}(f).$$

A feltétel szerint $f \in D[a,b]$, tehát $\underline{I}(f) = \overline{I}(f)$. Így létezik a $\lim\limits_{\|\Delta\|\to 0} \sigma_\Delta(f,\xi)$ véges határérték, tehát $f \in R[a,b]$ és

$$\int_a^b f(x)\,dx = D\int_a^b f(x)\,dx.$$

□

10. Következmény. *Annak szükséges és elégséges feltétele, hogy a korlátos $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ függvény Riemann-integrálható legyen az, hogy bármely $\varepsilon > 0$ számhoz létezzen a $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ úgy, hogy bármely $\Delta \in Par[a,b]$, $\Delta : a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$, $\|\Delta\| < \delta$ esetén*

$$\sum_{i=1}^{n} \omega(f;[x_{i-1},x_i]) \cdot (x_i - x_{i-1}) < \varepsilon.$$

Bizonyítás. Szükségesség. Ha $f \in R[a,b]$, akkor $f \in D[a,b]$ a 9. Tétel alapján. Ekkor a 8. Tétel szerint léteznek a

$$\lim_{\|\Delta\|\to 0} \underline{S}_\Delta(f) = \lim_{\|\Delta\|\to 0} \overline{S}_\Delta(f)$$

határértékek. Másrészt, ha $\Delta \in Par[a,b]$, $\Delta : a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$, akkor $\omega(f;[x_{i-1},x_i]) = M_i - m_i$ (lásd a 6. Értelmezést), és így

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n} \omega(f;[x_{i-1},x_i]) \cdot (x_i - x_{i-1}) &= \sum_{i=1}^{n} (M_i - m_i) \cdot (x_i - x_{i-1}) = \\ &= \overline{S}_\Delta(f) - \underline{S}_\Delta(f). \qquad (4.2.8)\end{aligned}$$

Innen kapjuk, hogy

$$\lim_{\|\Delta\|\to 0}\sum_{i=1}^{n}\omega(f;[x_{i-1},x_i])\cdot(x_i-x_{i-1})=0,$$

amit átírva az $\varepsilon-\delta$ nyelvezetre megkapjuk a keresett állítást.

Elégségesség. Azonos a 4. Tulajdonsággal. □

11. Következmény. *(Darboux). Annak szükséges és elégséges feltétele, hogy az $[a,b]$ intervallumon korlátos $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ függvény Riemann-integrálható legyen az, hogy bármely $\varepsilon>0$ számhoz létezzen a $\delta=\delta(\varepsilon)>0$ szám úgy, hogy tetszőleges $\Delta\in Par[a,b]$, $\|\Delta\|<\delta$ esetén teljesüljön az $\overline{S}_\Delta(f)-\underline{S}_\Delta(f)<\varepsilon$ egyenlőtlenség.*

Bizonyítás. Azonnal igazolható a 10. Következmény és az (4.2.8) alapján. □

4. Példa. A $\mathcal{D}|_{[0,1]}:[0,1]\to\mathbb{R}$,
$$\mathcal{D}|_{[0,1]}(x)=\begin{cases}1, & \text{ha} \quad x\in[0,1]\cap\mathbb{Q}\\ 0, & \text{ha} \quad x\in[0,1]\setminus\mathbb{Q}\end{cases}$$
függvény *nem* Riemann-integrálható.

Valóban, legyen $\Delta\in Par[0,1]$, $\Delta:0=x_0<x_1<\ldots<x_n=1$. Tekintettel az 1. Fejezet, 12. Következmény, e) pontjára: $[x_{i-1},x_i]\cap\mathbb{Q}\neq\emptyset$. Hasonlóan $[x_{i-1},x_i]\cap(\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q})\neq\emptyset$. Ezért $m_i=0$ és $M_i=1$ $(i=1,\ldots,n)$. Így $\overline{S}_\Delta(\mathcal{D}|_{[0,1]})-\underline{S}_\Delta(\mathcal{D}|_{[0,1]})=1$, vagyis a 11. Következmény alapján $\mathcal{D}|_{[0,1]}\notin R[0,1]$.

12. Tétel. *Legyen $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ olyan függvény, hogy $f\in B[a,b]$. Annak szükséges és elégséges feltétele, hogy $f\in R[a,b]$ az, hogy bármely $\varepsilon>0$ számhoz létezzen olyan $\Delta_\varepsilon\in Par[a,b]$, amelyre $\overline{S}_{\Delta_\varepsilon}(f)-\underline{S}_{\Delta_\varepsilon}(f)<\varepsilon$.*

Bizonyítás. Szükségesség. Ha $f\in R[a,b]$, akkor $f\in D[a,b]$ (9. Tétel), tehát $\underline{I}(f)=\overline{I}(f)=I(f)$. A 7. Tétel, e) pontja alapján bármely $\varepsilon>0$

számhoz létezik $\Delta_{\varepsilon 1}, \Delta_{\varepsilon 2} \in Par[a,b]$ úgy, hogy $I(f) - \frac{\varepsilon}{2} < \underline{S}_{\Delta_{\varepsilon 1}}(f)$ és $\overline{S}_{\Delta_{\varepsilon 2}}(f) < I(f) + \frac{\varepsilon}{2}$. Ha $\Delta_\varepsilon := \Delta_{\varepsilon 1} \cup \Delta_{\varepsilon 2}$, akkor $\Delta_\varepsilon \in Par[a,b]$ és a 7. Tétel, b) és a) pontjai szerint $\underline{S}_{\Delta_{\varepsilon 1}}(f) \leq \underline{S}_{\Delta_\varepsilon}(f) \leq \overline{S}_{\Delta_\varepsilon}(f) \leq \overline{S}_{\Delta_{\varepsilon 2}}(f)$. Következésképp

$$I(f) - \frac{\varepsilon}{2} < \underline{S}_{\Delta_\varepsilon}(f) < \overline{S}_{\Delta_\varepsilon}(f) < I(f) + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Innen

$$\overline{S}_{\Delta_\varepsilon}(f) - \underline{S}_{\Delta_\varepsilon}(f) \leq \left(I(f) + \frac{\varepsilon}{2}\right) - \left(I(f) - \frac{\varepsilon}{2}\right) = \varepsilon.$$

Elégségesség. Feltételezzük, hogy minden $\varepsilon > 0$ számhoz létezik $\Delta_\varepsilon \in Par[a,b]$ úgy, hogy $\overline{S}_{\Delta_\varepsilon}(f) - \underline{S}_{\Delta_\varepsilon}(f) < \varepsilon$. A 7. Értelmezés alapján $\underline{S}_{\Delta_\varepsilon}(f) \leq \underline{I}(f) \leq \overline{I}(f) \leq \overline{S}_{\Delta_\varepsilon}(f)$, ezért $0 \leq \overline{I}(f) - \underline{I}(f) \leq \overline{S}_{\Delta_\varepsilon}(f) - \underline{S}_{\Delta_\varepsilon}(f) < \varepsilon$. Mivel ε tetszőleges, ezért $\underline{I}(f) = \overline{I}(f)$, vagyis $f \in D[a,b]$. A 9. Tétel miatt $f \in R[a,b]$. □

A következő tételben az $R[a,b]$ teret tanulmányozzuk.

13. Tétel. *Ha $f, g \in R[a,b]$ és $\alpha \in \mathbb{R}$, akkor*

a) $f + g \in R[a,b]$ és $\int_a^b (f+g)(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$;

b) $\alpha f \in R[a,b]$ és $\int_a^b (\alpha f)(x)dx = \alpha \int_a^b f(x)dx$;

c) $f \cdot g \in R[a,b]$;

d) a $0 \leq f(x)$, bármely $x \in [a,b]$ feltétel mellett $0 \leq \int_a^b f(x)dx$ is teljesül;

e) $f(x) \leq g(x)$, bármely $x \in [a,b]$ feltétel mellett

$$\int_a^b f(x)\, dx \leq \int_a^b g(x)\, dx$$

is teljesül;

f) $|f| \in R[a,b]$ és $\left|\int_a^b f(x)\, dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|\, dx$.

Bizonyítás. a) Azonnal következik a

$$\sum_{i=1}^{n}(f+g)(\xi_i)(x_i-x_{i-1})=\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i)(x_i-x_{i-1})+\sum_{i=1}^{n}g(\xi_i)(x_i-x_{i-1})$$

egyenlőségből, ahol $(\Delta,\xi)\in Par_R[a,b]$, $\Delta : a=x_0<x_1<\ldots<x_n=b$ és $\xi=(\xi_1,\ldots,\xi_n)\in P_\Delta$.

b) A $\sum_{i=1}^{n}(\alpha f)(\xi_i)(x_i-x_{i-1})=\alpha\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i)(x_i-x_{i-1})$ egyenlőség következménye.

c) Ha $f\in R[a,b]$, akkor $f\in B[a,b]$ (3. Tulajdonság). Legyen $M>0$ úgy, hogy $|f(x)|\le M$, bármely $x\in[a,b]$ esetén. Ekkor

$$\begin{aligned}|f^2(x_1)-f^2(x_2)| &= |f(x_1)+f(x_2)|\cdot|f(x_1)-f(x_2)|\le\\ &\le 2M\cdot|f(x_1)-f(x_2)|,\end{aligned}$$

ahol $x_1,x_2\in[a,b]$ tetszőlegesek. Így $\omega(f^2;E)\le 2M\omega(f;E)$, ha $E\subset[a,b]$. Ezért

$$\sum_{i=1}^{n}\omega(f^2;[x_{i-1},x_i])\cdot(x_i-x_{i-1})\le 2M\sum_{i=1}^{n}\omega(f;[x_{i-1},x_i])\cdot(x_i-x_{i-1}).$$

Alkalmazva a 10. Következményt kapjuk, hogy $f^2\in R[a,b]$. Tekintettel az $(f\cdot g)(x)=\frac{1}{4}[(f+g)^2(x)-(f-g)^2(x)]$, $x\in[a,b]$ azonosságra és az a) és b) pontokra következik, hogy $f\cdot g\in R[a,b]$.

d) A 9. Tétel, a 8. Tétel és $f(x)\ge 0$, $x\in[a,b]$ miatt $I(f)=\underline{I}(f)=\overline{I}(f)\ge 0$.

e) Mivel $(g-f)(x)=g(x)-f(x)\ge 0$, $x\in[a,b]$, ezért a d), a) és b) pontok alapján

$$\int_a^b f(x)dx\le\int_a^b g(x)dx.$$

f) Mivel $\omega(|f|;E) \leq \omega(f;E)$, ezért a $\Delta \in Par[a,b]$, $\Delta : a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$ esetén

$$\sum_{i=1}^{n} \omega(|f|;[x_{i-1},x_i]) \cdot (x_i - x_{i-1}) \leq \sum_{i=1}^{n} \omega(f;[x_{i-1},x_i]) \cdot (x_i - x_{i-1}).$$

Alkalmazva a 10. Következményt kapjuk, hogy $f \in R[a,b] \Rightarrow |f| \in R[a,b]$. Továbbá, $a - |f|(x) \leq f(x) \leq |f|(x)$, $x \in [a,b]$ egyenlőtlenségek és f, $|f| \in R[a,b]$ miatt, tekintettel az e) és b) pontokra,

$$-\int_a^b |f|(x)\ dx \leq \int_a^b f(x)\ dx \leq \int_a^b |f|(x)\ dx,$$

vagyis

$$\left|\int_a^b f(x)\ dx\right| \leq \int_a^b |f|(x)\ dx = \int_a^b |f(x)|\ dx.$$

□

4.3. A Riemann - integrálhatóság Lebesgue - féle kritériuma

Az $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ függvény Riemann-integrálhatóságának tanulmányozására az egyik legfontosabb kritérium a Lebesgue-tétel. Ezt mutatjuk be az alábbiakban.

8. Értelmezés. *Az $E \subset \mathbb{R}$ halmaz **Lebesgue szerint nullamértékű**, ha E lefedhető intervallumok olyan véges vagy megszámlálhatóan végtelen rend-szerével, amelynek összhosszúsága kisebb mint ε, ahol $\varepsilon > 0$ tetszőleges.*

Ha a korlátos $I \subseteq \mathbb{R}$ intervallum hosszát $|I|$ jelöli, akkor a 8. Értelmezés szerint az $E \subset \mathbb{R}$ *nullamértékű halmaz*, ha bármely $\varepsilon > 0$

számhoz létezik olyan (I_k) intervallumsorozat, amelyre

$$E \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} I_k \quad \text{és} \quad \sum_{k\geq 1} |I_k| < \varepsilon.$$

14. Tétel. *a) Bármely véges vagy megszámlálhatóan végtelen ponthalmaz nullamértékű.*

b) Bármely véges vagy megszámlálhatóan végtelen sok nullamértékű halmaz egyesítése is nullamértékű.

c) Nullamértékű halmaz bármely részhalmaza is nullamértékű.

d) Az $[a,b]$ intervallum nem nullamértékű ($a, b \in \mathbb{R}$ és $a < b$).

Bizonyítás. a) A b) állítás következménye.

b) Legyen $E = \bigcup\limits_{n\geq 1} E_n$, ahol E_n nullamértékű halmaz ($n \in \mathbb{N}$). Ekkor tetszőleges $\varepsilon > 0$ szám esetén, minden E_n halmazhoz megszerkeszthető az $(I_{n,k})_{k\geq 1}$ intervallumsorozat úgy, hogy $E_n \subset \bigcup\limits_{k\geq 1} I_{n,k}$ és $\sum\limits_{k\geq 1} |I_{n,k}| < \frac{\varepsilon}{2^n}$. Mivel megszámlálhatóan sok megszámlálható halmaz egyesítése szintén megszámlálható (1. Fejezet, 19. Tulajdonság), ezért a $\{I_{n,k} \mid n, k \in \mathbb{N}\}$ halmaz megszámlálható. Továbbá,

$$\sum_{n\geq 1} \sum_{k\geq 1} |I_{n,k}| < \sum_{n\geq 1} \frac{\varepsilon}{2^n} = \varepsilon.$$

A $\sum\limits_{n,k\geq 1} |I_{n,k}|$ abszolút konvergens sorban a tagok sorrendje nem lényeges. Így $\sum\limits_{n,k\geq 1} |I_{n,k}| < \varepsilon$ is teljesül.

c) A 8. Értelmezés azonnali következménye.

d) Először igazoljuk indukcióval, hogy ha $[a,b] \subset \bigcup\limits_{k=1}^{n} \,]a_k, b_k[$, akkor

$$\sum_{k=1}^{n} (b_k - a_k) > b - a.$$

Ha $n = 1$, akkor $[a,b] \subset \,]a_1, b_1[\,$. Így $a_1 < a < b < b_1$ és $b_1 - a_1 > b - a$.

Feltételezzük, hogy az állítás igaz $n = m$ esetén, és igazoljuk $n = m+1$ esetén is. Legyen $[a,b] \subset \bigcup_{k=1}^{m+1}]a_k, b_k[$ és az $]a_i, b_i[$ olyan intervallum, hogy $a \in]a_i, b_i[$. Ha $b_i \geq b$, akkor $b_i - a_i > b - a$; ezért $\sum_{k=1}^{m+1} (b_k - a_k) \geq b_i - a_i > b - a$, így az állítás igazolva van. Ha $a < b_i < b$, akkor $[b_i, b] \subset \bigcup_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^{m+1}]a_k, b_k[$. Az indukciós feltétel alapján $\sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^{m+1} (b_k - a_k) > b - b_i$. Viszont $b - a = (b - b_i) + b_i - a < (b - b_i) + (b_i - a_i)$, ezért

$$b - a < \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^{m+1} (b_k - a_k) + (b_i - a_i) = \sum_{k=1}^{m+1} (b_k - a_k),$$

amit igazolni kellett.

Ha az $[a,b]$ zárt intervallumnak tekintjük valamely nyílt befedését meg-számlálhatóan sok nyílt intervallum segítségével, amelynek összhossza $< \varepsilon$, akkor a Borel-Lebesgue tulajdonság alapján az $[a,b]$ intervallumnak létezik véges befedése nyílt intervallumok által. Viszont a fenti tulajdonság alapján ennek a véges nyílt befedésnek az összhossza $> (b-a)$. Ha ε-t úgy választjuk meg, hogy $\varepsilon \in]0, b-a[$, akkor ellentmondáshoz jutunk. Így az $[a,b]$ intervallum valóban nem nullamértékű. $\square$

5. Példa. A $\mathbb{Q}$ racionális számok halmaza nullamértékű.

6. Példa. A Cantor-féle $\mathcal{C}$ halmaz nem megszámlálható nullamértékű halmaz.

A $\mathcal{C}$ halmazt az 1. Fejezet, 16. Példájában vezettük be, ahol igazoltuk, hogy card $\mathcal{C}$ = card $\mathbb{R}$. Tekintettel a Cantor-halmaz szerkesztésére, a $\mathcal{C}$ nullamértékű, mert mértéke =

$$\begin{aligned}
&= 1-\left(\frac{1}{3}+2\cdot\frac{1}{3^2}+4\cdot\frac{1}{3^3}+8\cdot\frac{1}{3^4}+\dots\right)=\\
&= 1-\frac{1}{3}\left[1+\frac{2}{3}+\left(\frac{2}{3}\right)^2+\left(\frac{2}{3}\right)^3+\dots\right]=1-\frac{1}{3}\cdot\left(1-\frac{2}{3}\right)^{-1}=0.
\end{aligned}$$

9. Értelmezés. *Ha egy tulajdonság teljesül az $X\subseteq\mathbb{R}$ halmaz összes pontjaira, leszámítva egy nullamértékű halmazt, akkor azt mondjuk, hogy a tulajdonság* ***majdnem mindenütt*** *(rövidítve: m.m.)* ***teljesül az X halmazon****.*

A fenti értelmezés alapján az $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ függvényről azt mondjuk, hogy *m.m. folytonos az $[a,b]$ intervallumon*, ha az f függvény szakadási pontjainak a halmaza nullamértékű.

15. Tétel. *(Lebesgue). Annak szükséges és elégséges feltétele, hogy az $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ függvény Riemann-integrálható legyen az, hogy $f\in B[a,b]$ és f majdnem mindenütt folytonos legyen az $[a,b]$ intervallumon.*

Bizonyítás. A tétel állítása a következő:

$$f\in R[a,b]\Leftrightarrow f\in B[a,b]\ \textit{ és }\ f\ \textit{m.m. folytonos az}\ [a,b]\ \textit{intervallumon.}$$

Szükségesség. Ha $f\in R[a,b]$, akkor $f\in B[a,b]$ (3. Tulajdonság). Legyen $x_0\in[a,b]$ és $r>0$; jelölje

$$M(f,x_0,r):=\sup\{f(x):x\in[a,b]\cap\,]x_0-r,x_0+r[\}$$

és

$$m(f,x_0,r):=\inf\{f(x):x\in[a,b]\cap\,]x_0-r,x_0+r[\}$$

Ekkor az f függvény oszcillációja az x_0 pontban az

$$\omega(f;x_0)=\lim_{r\searrow 0}\left(M(f,x_0,r)-m(f,x_0,r)\right)$$

határérték, mert az $r \to M(f, x_0, r) - m(f, x_0, r)$ függvény csökkenő (lásd az 5. Értelmezést). Nyilván az f ott nem folytonos, ahol $\omega(f; x_0) > 0$. Könnyen igazolható, hogy $E = \bigcup_{n\geq 1} E_n$, ahol $E = \{x \in [a,b] : \omega(f;x) > 0\}$ és

$$E_n = \left\{x \in [a,b] : \omega(f;x) > \frac{1}{n}\right\},\ n \in \mathbb{N}.$$

Ha sikerül igazolni, hogy E_n nullamértékű, bármely $n \in \mathbb{N}$ esetén, akkor a 14. Tétel, b) pontja alapján E is nullamértékű, tehát f m.m. folytonos az $[a,b]$ intervallumon.

Legyen $\varepsilon > 0$ tetszőleges és $\Delta \in Par[a,b]$, $\Delta : a = x_0 < x_1 < \ldots < x_m = b$ úgy, hogy

$$\sum_{i=1}^{m} (M_i - m_i)(x_i - x_{i-1}) < \frac{\varepsilon}{2n},$$

ahol $M_i = \sup\{f(x) : x \in [x_{i-1}, x_i]\}$ és $m_i = \inf\{f(x) : x \in [x_{i-1}, x_i]\}$, $i = 1, \ldots, m$ (a Δ felosztás ilyen megválasztása lehetséges a Darboux-féle kritérium miatt – lásd a 11. Következményt). Ha $x_0 \in E_n \cap]x_{i-1}, x_i[$, akkor $M_i - m_i \geq \omega(f; x_0) > \frac{1}{n}$. A $\sum_{i=1}^{m} (M_i - m_i)(x_i - x_{i-1})$ összegből hagyjuk el azokat a tagokat, amelyek a Δ olyan részintervallumaihoz tartoznak, amelyek nem tartalmazzák E_n valamelyik pontját a belsejükben, a megmaradó tagokban írjunk $(M_i - m_i)$ helyett $(1/n)$-et. Ezzel az összeget kisebbítettük, és így még inkább teljesül:

$$\sum{}' \frac{1}{n}(x_i - x_{i-1}) < \frac{\varepsilon}{2n} \quad \text{vagyis} \quad \sum{}'(x_i - x_{i-1}) < \frac{\varepsilon}{2},$$

ahol $\sum'$ a megmaradt részintervallumokra való összegezést jelenti. Ha E_n-nek azokat a pontjait (ha ilyenek vannak), amelyek a tekintett Δ felosztás osztópontjaiba esnek, egy $(\varepsilon/2)$-nél kisebb összhosszúságú intervallumrend-szerbe foglaljuk be, akkor végeredményben megadtuk az E_n olyan intervallumrendszerrel való befedését, amelynek összhosszúsága kisebb mint ε. Mivel ε tetszőleges, ezért E_n nullamértékű.

Elégségesség. Feltételezzük, hogy $f \in B[a,b]$ és f m.m. folytonos az $[a,b]$ intervallumon. Ahhoz, hogy $f \in R[a,b]$ teljesüljön, elegendő igazolni a 12. Tétel alapján azt, hogy bármely $\varepsilon > 0$ számhoz megadható olyan $\Delta_\varepsilon \in Par[a,b]$, amelyre $\overline{S}_{\Delta_\varepsilon}(f) - \underline{S}_{\Delta_\varepsilon}(f) < \varepsilon$.

Mivel $f \in B[a,b]$, ezért léteznek a véges $M = \sup\{f(x) : x \in [a,b]\}$ és $m = \inf\{f(x) : x \in [a,b]\}$ értékek. Az $[a,b]$ intervallum azon pontjainak a halmazát, ahol f nem folytonos, fedjük be nyitott intervallumok olyan (I_k) rendszerével, hogy

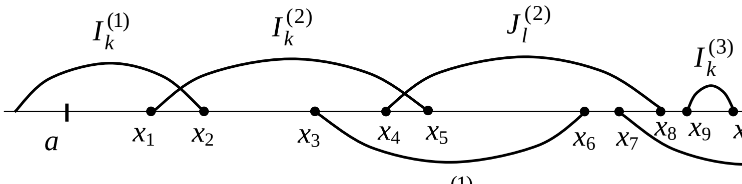
$$\sum_{k \geq 1} |I_k| < \frac{\varepsilon}{2(M-m)}.$$

Ez lehetséges a feltétel alapján. Az f függvény minden $x \in [a,b]$ folytonossági pontját zárjuk be egy-egy olyan J nyílt intervallumba, ahol $\omega(f;J) < \frac{\varepsilon}{2(b-a)}$; ezeknek az intervallumoknak a rendszere legyen (J_l). Ekkor nyilván

$$[a,b] \subset \left(\bigcup_{k \geq 1} I_k \right) \bigcup \left(\bigcup_{l \geq 1} J_l \right).$$

A Borel-Lebesgue tulajdonság alapján kiválasztható véges sok I_k és J_l, amelyek együtt szintén befedik az $[a,b]$ intervallumot. Tekintsük a kiválasztott I_k és J_l intervallumok végpontjait: ezek az $[a,b]$ egy felosztását származtatják. Jelölje ezt Δ_ε.

A Δ_ε felosztáshoz tartozó $\sum\limits_i (M_i - m_i)(x_i - x_{i-1})$ összegnek tekintsük azokat a tagjait, amelyek valamelyik I_k intervallumhoz tartoznak (az 5.2. ábra esetén ilyen például az első (az $[a, x_1]$ részintervallum), de nem ilyen például a hatodik tag (az $[x_5, x_6]$ részintervallum)).


$I_k^{(1)}$
$I_k^{(2)}$
$J_l^{(2)}$
$I_k^{(3)}$
a
x_1
x_2
x_3
x_4
x_5
x_6
x_7
x_8
x_9
$J_l^{(1)}$

Az ezekre kiterjesztett összegezést $\sum'$-vel jelölve:

$$\begin{aligned}\sum{}'(M_i - m_i) \cdot (x_i - x_{i-1}) \leq& \\ \leq\ & \sum{}'(M-m)(x_i - x_{i-1}) \leq (M-m)\sum_{k\geq 1}|I_k| < \\ <\ & (M-m)\cdot\frac{\varepsilon}{2(M-m)} = \frac{\varepsilon}{2}.\end{aligned}$$

A többi tagra kiterjedő összegezést $\sum''$-vel jelölve írható, hogy

$$\begin{aligned}\sum{}''(M_i - m_i)\cdot(x_i - x_{i-1}) \ &<\ \sum{}''\frac{\varepsilon}{2(b-a)}\cdot(x_i - x_{i-1}) \leq \\ &\leq\ \frac{\varepsilon}{2(b-a)}\cdot(b-a) = \frac{\varepsilon}{2}.\end{aligned}$$

Tehát a teljes összeg $< \varepsilon$, amivel a bizonyítást befejeztük. $\square$

7. Példa. Az 5. és 6. Következmények azonnal adódnak a Lebesgue-kritériumból. Ha $f \in C[a,b]$, akkor $f \in B[a,b]$ és szakadási pontjainak halmaza az üres halmaz, amely nyilván nullamértékű. Így a 15. Tétel alapján $f \in R[a,b]$. Ha f monoton függvény az $[a,b]$ intervallumon, akkor az f szakadási pontjainak halmaza megszámlálható (a 3. Fejezet, 8. Tétele szerint). Alkalmazva a 14. Tétel, a) pontját kapjuk, hogy f m.m. folytonos az $[a,b]$ intervallumon. Nyilván az f monoton függvényre $f \in B[a,b]$, ezért a 15. Tétel alapján $f \in R[a,b]$.

8. Példa. Ha az $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ függvény esetén $f \in B[a,b]$ és f folytonos az $[a,b]$ intervallumon, véges számú pontot leszámítva, akkor $f \in R[a,b]$.

Az f függvény szakadási pontjainak halmaza véges számú pontot tartalmaz, amely a 14. Tétel, a) pontja szerint nullamértékű. Alkalmazva a 15. Tételt, a következtetés az, hogy $f \in R[a,b]$.

9. Példa. Az $\mathcal{R}|_{[0,1]} : [0,1] \to \mathbb{R}$,

$$\mathcal{R}|_{[0,1]}(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{q}, & \text{ha} \quad x = \frac{p}{q} \in \,]0,1] \cap \mathbb{Q},\ (p,q) = 1 \\ 0, & \text{ha} \quad x = 0 \text{ vagy } x \in [0,1] \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$$

függvény Riemann-integrálható.

Mivel az $\mathcal{R}|_{[0,1]}$ függvény szakadási pontjainak halmaza $]0,1] \cap \mathbb{Q}$, ezért a 14. Tétel, a) pontja alapján $\mathcal{R}|_{[0,1]}$ m.m. folytonos a $[0,\ 1]$ intervallumon. A 15. Tételt alkalmazva, $\mathcal{R}|_{[0,1]} \in R[0,1]$.

10. Példa. Két Riemann-integrálható függvény összetettje általában *nem* Riemann-integrálható.

Tekintsük az $f : [0,1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \mathcal{R}|_{[0,1]}(x)$ és $g : [0,1] \to \mathbb{R}$,

$$g(x) = \begin{cases} 0, & \text{ha} \quad x = 0 \\ 1, & \text{ha} \quad x \in \,]0,1] \end{cases}$$

függvényeket. Az $f \in R[0,1]$ a 9. Példa alapján és $g \in R[0,1]$ a 8. Példa szerint. Viszont $g \circ f : [0,1] \to \mathbb{R}$,

$$(g \circ f)(x) = \begin{cases} 1, & \text{ha} \quad x \in \,]0,1] \cap \mathbb{Q} \\ 0, & \text{ha} \quad x = 0 \text{ vagy } x \in [0,1] \setminus \mathbb{Q}, \end{cases}$$

amely Dirichlet típusú függvény, tehát $g \circ f \notin R[0,1]$ (lásd a 4. Példát).

16. Tulajdonság. *Ha $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ Riemann-integrálható függvény, $m \le f(x) \le M$, bármely $x \in [a,b]$ esetén, és $g : [m,M] \to \mathbb{R}$ folytonos függvény, akkor $g \circ f : [a,b] \to \mathbb{R}$ függvény Riemann-integrálható.*

Bizonyítás. Mivel g folytonos, ezért $\{x \in [a,b] : \omega(g \circ f; x) > 0\} \subset \{x \in [a,b] : \omega(f; x) > 0\}$. Így a 15. Tétel alapján $g \circ f \in R[a,b]$. $\square$

11. Példa. Ha $f \in R[a,b]$ és $0 < m \le f(x) \le M$, bármely $x \in [a,b]$ esetén, akkor $\frac{1}{f} \in R[a,b]$. Valóban, a $g : [m,M] \to \mathbb{R}$, $g(x) = \frac{1}{x}$ függvény folytonos a $[m, M]$ intervallumon, ezért a 16. Tulajdonság alapján $\frac{1}{f} \in R[a, b]$.

Ha $f : [a, b] \to [0, +\infty[$ függvény Riemann-integrálható, akkor $\sqrt[m]{f} \in R[a, b]$ $(m = 2, 3, \ldots)$. Ebben az esetben a folytonos g függvény a következő: $g : [0, M] \to \mathbb{R}$, $g(x) = \sqrt[m]{x}$, ahol $M = \sup\{f(x) : x \in [a, b]\} < +\infty$.

17. Tétel. *a) Ha $f \in R[a, b]$ és $[c, d] \subseteq [a, b]$, akkor $f|_{[c,d]} \in R[c, d]$ (az $f|_{[c,d]}$ az f leszűkítése a $[c, d]$ intervallumra).*

b) Ha $f \in R[a, b]$ és $a < c < b$, akkor $f|_{[a,c]} \in R[a, c]$, $f|_{[c,b]} \in R[c, b]$ és

$$\int_a^b f(x)\, dx = \int_a^c f(x)\, dx + \int_c^b f(x)\, dx.$$

c) Legyen $a < c < b$ és $f : [a, b] \to \mathbb{R}$. Ha $f \in R[a, c] \cap R[c, b]$, akkor $f \in R[a, b]$ és

$$\int_a^b f(x)\, dx = \int_a^c f(x)\, dx + \int_c^b f(x)\, dx.$$

*A tételben szereplő egyenlőségek az integrál **additív tulajdonsága intervallumra** nézve.*

Bizonyítás. Az additív tulajdonságot leszámítva minden a Lebesgue-tétel következménye (15. Tétel).

b) Ha $(\Delta', \xi') \in Par_R[a, c]$ és $(\Delta'', \xi'') \in Par_R[c, b]$, akkor $(\Delta, \xi) \in Par_R[a, b]$, ahol $\Delta = \Delta' \cup \Delta''$ és $\xi = (\xi', \xi'') \in P_\Delta$. Így a bizonyítandó egyenlőség a $\sigma_\Delta(f, \xi) = \sigma_{\Delta'}(f|_{[a,c]}, \xi') + \sigma_{\Delta''}(f|_{[c,b]}, \xi'')$ összefüggés következménye.

c) Legyen $\Delta \in Par[a, b]$, $\Delta : a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$. Mivel $c \in \,]a, b[\,$, ezért létezik $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$ úgy, hogy $x_{k-1} \le c \le x_k$. Ekkor $\Delta' \in Par[a, c]$, $\Delta' : a = x_0 < x_1 < \ldots < x_{k-1} \le c$ és $\Delta'' \in Par[c, b]$, $\Delta'' : c \le x_k < x_{k+1} < \ldots < x_n = b$. Ha $c = x_{k-1}$ vagy $c = x_k$, akkor a $(\Delta, \xi) \in Par_R[a, b]$, $(\Delta', \xi') \in Par_R[a, c]$, $(\Delta'', \xi'') \in Par_R[c, b]$

és $\xi = (\xi', \xi'')$ esetén $\sigma_\Delta(f, \xi) = \sigma_{\Delta'}(f|_{[a,c]}, \xi') + \sigma_{\Delta''}(f|_{[c,b]}, \xi'')$, ahonnan áttérve határértékre $\|\Delta\| \to 0$ szerint,

$$\int_a^b f(x)\ dx = \int_a^c f(x)\ dx + \int_c^b f(x)\ dx.$$

Ha $x_{k-1} < c < x_k$, akkor $(\Delta, \xi) \in Par_R[a,b]$, $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n) \in P_\Delta$ esetén legyen $\Delta' : a = x_0 < x_1 < \ldots < x_{k-1} < c$, $\xi' = (\xi_1, \ldots, \xi_{k-1}, c)$ és $\Delta'' : c < x_k < \ldots < x_n = b$, $\xi'' = (c, \xi_{k+1}, \ldots, \xi_n)$. Ekkor $(\Delta', \xi') \in Par_R[a,c]$ és $(\Delta'', \xi'') \in Par_R[c,b]$; továbbá

$$\begin{aligned}
&|\sigma_\Delta(f,\xi) - \sigma_{\Delta'}(f,\xi') - \sigma_{\Delta''}(f,\xi'')| = \\
&\quad = \ |f(\xi_k)(x_k - x_{k-1}) - f(c)(c - x_{k-1}) - \ f(c)(x_k - c)| = \\
&\quad = \ |f(\xi_k) - f(c)| \cdot (x_k - x_{k-1}).
\end{aligned}$$

Másrészt, az $f \in R[a,b]$ miatt $f \in B[a,b]$. Így létezik $M > 0$ úgy, hogy $|f(x)| \le M$, bármely $x \in [a,b]$ esetén. Ezért $|\sigma_\Delta(f,\xi) - \sigma_{\Delta'}(f,\xi') - \sigma_{\Delta''}(f,\xi'')| \le 2M(x_k - x_{k-1}) \to 0$, ha $\|\Delta\| \to 0$ (ekkor $\|\Delta'\| \to 0$ és $\|\Delta''\| \to 0$ is teljesül). Tehát az

$$\int_a^b f(x)\ dx = \int_a^c f(x)\ dx + \int_c^b f(x)\ dx$$

egyenlőség újból teljesül, mert $f \in R[a,c] \cap R[c,b]$. $\square$

Ha elfogadjuk, hogy $\int\limits_a^b f(x)dx := -\int\limits_b^a f(x)dx$, ha $a > b$, és $\int\limits_a^a f(x)dx := 0$, akkor az

$$\int_a^b f(x)\ dx = \int_a^c f(x)\ dx + \int_c^b f(x)\ dx$$

additív tulajdonság kiterjeszthető bármilyen helyzetű $a, b, c \in \mathbb{R}$ pontra.

4.4. Az integrálszámítás középértéktételei

18. Tétel. *a) Ha* $a \leq b$*,* $f \in R[a,b]$ *és* $m = \inf\{f(x) : x \in [a,b]\}$*,* $M = \sup\{f(x) : x \in [a,b]\}$*, akkor*

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)\ dx \leq M(b-a).$$

Sőt, létezik $\mu \in [m, M]$ *úgy, hogy* $\int\limits_a^b f(x)\ dx = \mu(b-a)$*.*

b) Ha $f \in C[a,b]$*, akkor létezik* $\xi \in [a,b]$ *úgy, hogy* $\int\limits_a^b f(x)dx = f(\xi)(b-a)$*.*

Bizonyítás. a) A 3. Tulajdonság alapján $f \in B[a,b]$, tehát m és M véges értékek. Ugyanakkor $m \leq f(x) \leq M$, bármely $x \in [a,b]$ esetén. Alkalmazva a 13. Tétel, e) pontját megkapjuk a kért egyenlőtlenségeket. Ha $a < b$, akkor legyen $\mu = \frac{1}{b-a} \cdot \int\limits_a^b f(x)dx$.

b) Mivel $\mu \in [m, M]$, és az $f \in C[a,b]$ feltétel miatt f Darboux-tulajdonságú függvény az $[a,b]$ intervallumon, illetve $m = \min\{f(x) : x \in [a,b]\}$, $M = \max\{f(x) : x \in [a,b]\}$, ezért létezik $\xi \in [a,b]$ úgy, hogy

$$f(\xi) = \mu = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx.$$

□

19. Tétel. *(az integrálszámítás első középértéktétele).*

Legyen $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ *olyan függvény, hogy* $f, g \in R[a,b]$*,* $m = \inf\{f(x) : x \in [a,b]\}$*,* $M = \sup\{f(x) : x \in [a,b]\}$ *és* $g(x) \geq 0$ *(vagy* $g(x) \leq 0$*), bármely* $x \in [a,b]$ *esetén. Ekkor létezik* $\mu \in [m, M]$*, melyre*

$$\int_a^b (f \cdot g)(x)\ dx = \mu \int_a^b g(x)\ dx.$$

Ha feltételezzük, hogy $f \in C[a,b]$*, akkor létezik* $\xi \in [a,b]$ *úgy,* *hogy*

$$\int_a^b (f \cdot g)(x)\ dx = f(\xi) \int_a^b g(x)\ dx.$$

Bizonyítás. A tétel igazolása hasonló a 18. Tétel bizonyításához. Mivel $m \leq f(x) \leq M$, $x \in [a, b]$ és $g(x) \geq 0$, bármely $x \in [a, b]$ esetén, ezért $m \cdot g(x) \leq f(x)g(x) \leq M \cdot g(x)$, $x \in [a, b]$. Viszont $m \cdot g \in R[a, b]$, $f \cdot g \in R[a, b]$ és $M \cdot g \in R[a, b]$, ezért a 13. Tétel, e) és b) pontjai alapján

$$m \int_a^b g(x)\ dx \leq \int_a^b (f \cdot g)(x)\ dx \leq M \int_a^b g(x)\ dx.$$

Ha $\int\limits_a^b g(x)dx = 0$, akkor az állítás azonnali. Ha $\int\limits_a^b g(x)dx \neq 0$, akkor

$$\mu = \left(\int_a^b g(x)\ dx \right)^{-1} \cdot \int_a^b (f \cdot g)(x)\ dx \ \in \ [m, M].$$

Ha $f \in C[a, b]$, akkor a $\xi \in [a, b]$ pont létezését a Darboux-tulajdonság biztosítja.

Megjegyezzük, hogy $g(x) \equiv 1$, $x \in [a, b]$ esetben a 18. Tételt kapjuk vissza. □

Az integrálszámítás második középértéktételéhez olyan segédtételeket használunk fel, amelyek önmagukban is jelentősek.

Először

az **Abel-transzformációt** (vagy **Abel-féle összegezési képletet**) mutatjuk be, amely a $\sum\limits_{i=1}^{n} a_i b_i$ összeg átalakítását jelenti (lásd az (4.4.1) képletet alább).

Legyen $A_0 = 0$ és $A_k = \sum\limits_{i=1}^{k} a_i$ $(k = 1, \ldots, n)$. Ekkor

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n} a_i b_i &= \sum_{i=1}^{n} (A_i - A_{i-1}) b_i = \sum_{i=1}^{n} A_i b_i - \sum_{i=1}^{n} A_{i-1} b_i = \\ &= \sum_{i=1}^{n} A_i b_i - \sum_{i=0}^{n-1} A_i b_{i+1} = A_n b_n - A_0 b_1 + \sum_{i=1}^{n-1} A_i (b_i - b_{i+1}). \end{aligned}$$

Mivel $A_0 = 0$, ezért

$$\sum_{i=1}^{n} a_i b_i = A_n b_n + \sum_{i=1}^{n-1} A_i (b_i - b_{i+1}) \tag{4.4.1}$$

20. Segédtétel. *Ha az* $A_k = \sum\limits_{i=1}^{k} a_i$ $(k = 1, \ldots, n)$ *számok kielégítik a* $m \leq A_k \leq M$ $(k = 1, \ldots, n)$ *egyenlőtlenségeket és* $b_i \geq b_{i+1} \geq 0$ $(i = 1, \ldots, n-1)$, *akkor*

$$m\, b_1 \leq \sum_{i=1}^{n} a_i b_i \leq M\, b_1 \tag{4.4.2}$$

Bizonyítás. Mivel $b_n \geq 0$ és $b_i - b_{i+1} \geq 0$ $(i = 1, \ldots, n-1)$, ezért az (4.4.1)-ből következik, hogy

$$\sum_{i=1}^{n} a_i b_i \leq M b_n + \sum_{i=1}^{n-1} M (b_i - b_{i+1}) = M b_n + M (b_1 - b_n) = M b_1.$$

Az (4.4.2) egyenlőtlenség bal oldala hasonlóan igazolható. □

21. Segédtétel. *Ha* $f \in R[a,b]$, *akkor bármely* $x \in [a,b]$ *esetén* $F(x) := \int\limits_a^x f(t) dt$ *függvényt értelmez és* $F \in C[a,b]$.

Bizonyítás. Mivel $f \in R[a,b]$ és $[a,x] \subseteq [a,b]$, ha $x \in [a,b]$, akkor a 17. Tétel, a) pontja szerint $f|_{[a,x]} \in R[a,x]$, tehát F függvényt értelmez az 1. Tulajdonság alapján.

A feltétel szerint $f \in R[a,b]$, így $f \in B[a,b]$, tekintettel a 3. Tulajdonság-ra. Következésképp létezik $M > 0$ úgy, hogy $|f(x)| \leq M$, bármely $x \in [a,b]$ esetén. Felhasználva a 17. Tétel, b) pontját és a 13. Tételt,

$$\begin{aligned} |F(x+h) - F(x)| &= \left| \int_a^{x+h} f(t)\,dt - \int_a^x f(t)\,dt \right| = \left| \int_x^{x+h} f(t)\,dt \right| \leq \\ &\leq \int_x^{x+h} |f(t)|\,dt \leq \int_x^{x+h} M\,dt = Mh, \end{aligned}$$

ahol $x \in [a,b]$ és $h > 0$ úgy, hogy $x + h \in [a,b]$. A $h < 0$ esetben hasonlóan járunk el. Tehát $|F(x+h) - F(x)| \leq M|h|$, ha $x \in [a,b]$ és $h \in \mathbb{R}$ úgy, hogy $x + h \in [a,b]$. Viszont ez utóbbi egyenlőtlenségből azonnal következik F folytonossága a tetszőleges $x \in [a,b]$ pontban. □

22. Segédtétel. *Ha $f, g \in R[a,b]$ és g csökkenő függvény az $[a,b]$ intervallumon, $g(x) \geq 0$, bármely $x \in [a,b]$ esetén, akkor létezik $\xi \in [a,b]$ úgy, hogy*

$$\int_a^b (f \cdot g)(x)\ dx = g(a) \cdot \int_a^{\xi} f(x)\ dx$$

Bizonyítás. Legyen $\Delta \in Par[a,b]$, $\Delta : a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$. Ekkor

$$\begin{aligned} &\int_a^b (f \cdot g)(x)\ dx = \\ &\qquad = \sum_{i=1}^n \int_{x_{i-1}}^{x_i} (f \cdot g)(x)\ dx = \\ &\qquad = \sum_{i=1}^n g(x_{i-1}) \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)\ dx + \sum_{i=1}^n \int_{x_{i-1}}^{x_i} [g(x) - g(x_{i-1})]\ f(x)\ dx. \end{aligned}$$

Mivel $f \in R[a,b]$, ezért a 3. Tulajdonság alapján létezik $M > 0$ úgy, hogy $|f(x)| \leq M$, $x \in [a,b]$. Ekkor a 13. Tétel felhasználásával kapjuk, hogy

$$\left|\sum_{i=1}^{n}\int_{x_{i-1}}^{x_i}[g(x)-g(x_{i-1})]\ f(x)\ dx\right| \leq$$
$$\leq \sum_{i=1}^{n}\int_{x_{i-1}}^{x_i}|g(x)-g(x_{i-1})|\cdot|f(x)|\ dx \leq$$
$$\leq M\sum_{i=1}^{n}\int_{x_{i-1}}^{x_i}|g(x)-g(x_{i-1})|\ dx \leq$$
$$\leq M\sum_{i=1}^{n}\omega(g;[x_{i-1},x_i])\cdot(x_i-x_{i-1})\to 0,$$

ha $\|\Delta\| \to 0$ (az utolsó állításunk a $g \in R[a,b]$ feltételből és a 10. Következményből adódik). Következésképpen

$$\int_a^b (f\cdot g)(x)dx = \lim_{\|\Delta\|\to 0}\sum_{i=1}^{n} g(x_{i-1})\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)dx \tag{4.4.3}$$

Most megbecsüljük az (4.4.3) jobb oldalán található összeget. Ha $F(x) = \int\limits_a^x f(t)dt$, akkor a 21. Segédtétel alapján $F \in C[a,b]$. Legyen $m = \min\{F(x) : x \in [a,b]\}$ és $M = \max\{F(x) : x \in [a,b]\}$. Mivel

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)\ dx = F(x_i) - F(x_{i-1})$$

következik, hogy

$$\sum_{i=1}^{n} g(x_{i-1})\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)\ dx = \sum_{i=1}^{n}[F(x_i)-F(x_{i-1})]\ g(x_{i-1}). \tag{4.4.4}$$

Figyelembe véve, hogy $g(x) \geq 0$, $x \in [a,b]$ és g csökkenő függvény az $[a,b]$ intervallumon, az $a_i := F(x_i) - F(x_{i-1})$, $b_i := g(x_{i-1})$ jelölésekkel a 20. Segédtétel alapján kapjuk, hogy

$$m\,g(a) \le \sum_{i=1}^{n} [F(x_i) - F(x_{i-1})]\,g(x_{i-1}) \le M\,g(a), \tag{4.4.5}$$

mivel

$$A_k = \sum_{i=1}^{k} a_i = F(x_k) - F(x_0) = F(x_k) - F(a) = F(x_k).$$

Így az (4.4.4) összeg kielégíti az (4.4.5) egyenlőtlenségeket; tekintettel az (4.4.3) egyenlőségre, kapjuk az

$$m\,g(a) \le \int_a^b (f \cdot g)(x)\;dx \le M\,g(a) \tag{4.4.6}$$

egyenlőtlenségeket. Ha $g(a) = 0$, akkor az (4.4.6) alapján következik a segédtétel állítása. Ha $g(a) > 0$, akkor legyen

$$\mu = \frac{1}{g(a)} \int_a^b (f \cdot g)(x) dx.$$

Ekkor (4.4.6) szerint $m \le \mu \le M$. Viszont $F \in C[a,b]$, ezért a Darboux-tulajdonság alapján létezik $\xi \in [a,b]$ úgy, hogy $F(\xi) = \mu$. Ez az egyenlőség viszont a segédtétel állítása. □

23. Tétel. *(az integrálszámítás második középértéktétele).*

Ha $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ olyan függvények, hogy $f, g \in R[a,b]$ és g monoton függvény az $[a,b]$ intervallumon, akkor létezik $\xi \in [a,b]$ pont úgy, hogy

$$\int_a^b (f \cdot g)(x)\;dx = g(a) \int_a^{\xi} f(x)\;dx + g(b) \int_{\xi}^{b} f(x)\;dx \tag{4.4.7}$$

Az (4.4.7) egyenlőtlenséget még ***Bonnet-féle képletnek*** *is szokás nevezni.*

Bizonyítás. Legyen g növekvő függvény az $[a, b]$ intervallumon. Ekkor a $G(x) = g(b) - g(x)$, $x \in [a, b]$ függvény csökkenő az $[a, b]$ intervallumon, $G(x) \geq 0$, bármely $x \in [a, b]$ esetén, és $G \in R[a, b]$. Ezért alkalmazható a 22. Segédtétel: létezik $\xi \in [a, b]$ úgy, hogy

$$\int_a^b (f \cdot G)(x)\ dx = G(a) \int_a^\xi f(x)\ dx. \tag{4.4.8}$$

Másrészt,

$$\int_a^b (f \cdot G)(x)\ dx = g(b) \int_a^b f(x)\ dx - \int_a^b (f \cdot g)(x)\ dx$$

és

$$G(a) \int_a^\xi f(x)\ dx = g(b) \int_a^\xi f(x)\ dx - g(a) \int_a^\xi f(x)\ dx.$$

Figyelembe véve ezen összefüggéseket és az integrál additivítását, az (4.4.8) egyenlőség alapján megkapjuk az (4.4.7) képletet.

Ha g csökkenő függvény az $[a, b]$ intervallumon, akkor legyen $G(x) = g(x) - g(b)$, $x \in [a, b]$, és az eljárás azonos a fentivel. □

4.5. A Newton-Leibniz képlet és következményei

A továbbiakban a célunk az ún. *Newton-Leibniz képlet* igazolása, amely az integrálszámítás alapvető tétele.

24. Segédtétel. *Ha $f \in R[a, b]$ és f folytonos az $x \in [a, b]$ pontban, akkor az $F : [a, b] \to \mathbb{R}$, $F(x) = \int\limits_a^x f(x)dt$ függvény differenciálható az x pontban, és érvényes az $F'(x) = f(x)$ egyenlőség.*

Bizonyítás. Legyen $h \in \mathbb{R}$ úgy, hogy $x + h \in [a, b]$. Mivel f folytonos az x pontban, ezért $f(t) = f(x) + \alpha(t)$, $t \in [a, b]$, ahol $\lim\limits_{t \to x} \alpha(t) = 0$.

Másrészt $f \in R[a,b]$, ezért az α függvény mint két integrálható függvény különbsége írható fel (a $t \to f(x)$, $t \in [a,b]$ állandó függvény Riemann-integrálható). Következésképp $\alpha \in R[a,b]$. Jelölje $M(h) = \sup\{|\alpha(t)| : t \in I(h)\}$, ahol $I(h) = [x, x+h]$, ha $h > 0$ illetve $I(h) = [x+h, x]$, ha $h < 0$. A feltétel szerint $\lim\limits_{h\to 0} M(h) = 0$.

Másrészt

$$\begin{aligned}
&F(x+h) - F(x) = \\
&\quad = \int_a^{x+h} f(t)\, dt - \int_a^x f(t)\, dt = \int_x^{x+h} f(t)\, dt = \\
&\quad = \int_x^{x+h} [f(x) + \alpha(t)]\, dt = \int_x^{x+h} f(x)\, dt + \int_x^{x+h} \alpha(t)\, dt = \\
&\quad = f(x)\, h + \int_x^{x+h} \alpha(t)\, dt.
\end{aligned}$$

Viszont

$$\left|\int_x^{x+h} \alpha(t)\, dt\right| \le \left|\int_x^{x+h} |\alpha(t)|\, dt\right| \le \left|\int_x^{x+h} M(h)\, dt\right| = M(h) \cdot |h|;$$

így $|F(x+h) - F(x) - f(x)\, h| \le M(h) \cdot |h|$ vagy

$$\left|\frac{F(x+h) - F(x)}{h} - f(x)\right| \le M(h).$$

Tekintettel a $\lim\limits_{h\to 0} M(h) = 0$ egyenlőségre következik, hogy

$$\lim_{h\to 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} = f(x),$$

vagyis létezik $F'(x)$ és $F'(x) = f(x)$. $\square$

25. Tétel. *Az $[a,b]$ intervallumon folytonos bármely $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ függvénynek van primitív függvénye, és az f tetszőleges primitív függvénye $\mathcal{F}(x) := \int_a^x f(t)dt + c$ alakú, ahol $c \in \mathbb{R}$.*

Bizonyítás. Mivel $f \in C[a,b]$, ezért $f \in R[a,b]$ (lásd az 5. Következményt). Alkalmazva a 24. Segédtételt, az $F(x) = \int\limits_a^x f(t)dt$, $x \in [a,b]$ függvény az f primitív függvénye. Tekintettel a 3. Fejezet, 36. Tulajdonság, a) pontjára, az f bármely $\mathcal{F}$ primitív függvénye $\mathcal{F}(x) = F(x) + c$ alakú, $x \in [a,b]$. $\square$

10. Értelmezés. *Legyen $I \subseteq \mathbb{R}$ intervallum és $f : I \to \mathbb{R}$ adott függvény. Az $\mathcal{F} : I \to \mathbb{R}$ folytonos függvény az f* ***általánosított primitív függvénye****, ha az $\mathcal{F}'(x) = f(x)$ egyenlőség teljesül az I intervallumon, véges számú pontot kivéve.*

26. Tétel. *Adott az $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ függvény úgy, hogy $f \in B[a,b]$ és véges számú szakadási pontja van az $[a,b]$ intervallumon. Ekkor f-nek létezik általánosított primitív függvénye az $[a,b]$ intervallumon, és f bármely $\mathcal{F}$ általánosított primitív függvénye $\mathcal{F}(x) = \int\limits_a^x f(t)dt + c$ alakú, ahol $x \in [a,b]$ és $c \in \mathbb{R}$.*

Bizonyítás. Mivel az f függvénynek véges számú szakadási pontja van az $[a,b]$ intervallumon, ezért $f \in R[a,b]$ (lásd a 8. Példát). Így a 24. Segédtétel szerint $F(x) = \int\limits_a^x f(t)dt$ az f általánosított primitív függvénye, Ha $\mathcal{F}$ az f valamely általánosított primitív függvénye, akkor $\mathcal{F} - F$ állandó függvény az $[a,b]$ intervallum minden olyan részintervallumán, amelyet az f szakadási pontjai határoznak meg (alkalmazzuk a 3. Fejezet, 36. Tulajdonság, a) pontját). Viszont $(\mathcal{F} - F) \in C[a,b]$ (lásd 21. Segédtétel), ezért létezik $c \in \mathbb{R}$ úgy, hogy $\mathcal{F}(x) - F(x) = c$, $x \in [a,b]$. $\square$

27. Tétel. *(Newton-Leibniz képlet - 1. változat) Ha $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ korlátos függvény és véges számú szakadási pontja van az $[a,b]$ intervallumon, akkor $f \in R[a,b]$ és*

$$\int_a^b f(x)\, dx = \mathcal{F}(b) - \mathcal{F}(a), \tag{4.5.1}$$

ahol $\mathcal{F} : [a, b] \to \mathbb{R}$ az f tetszőleges általánosított primitív függvénye az $[a, b]$ intervallumon.

Bizonyítás. A 8. Példa és az $f \in B[a, b]$ feltétel szerint $f \in R[a, b]$. Az $\mathcal{F}$ általánosított primitív függvény létezését a 26. Tétel biztosítja. Így $\mathcal{F}(x) = \int_a^x f(t)dt + c$ alakú, ahol $x \in [a, b]$. Ekkor $\mathcal{F}(b) = \int_a^b f(t)dt + c$ és $\mathcal{F}(a) = c$. Következésképp $\mathcal{F}(b) - \mathcal{F}(a) = \int_a^b f(t)dt$. □

Az (4.5.1) képletet szokás az $\int_a^b f(x)dx = \mathcal{F}(x)\big|_a^b$ formában is használni. A Newton-Leibniz képletnek több általánosítása is ismert. Az egyik ilyen kiterjesztése az **általánosított Stokes-képlet** illetve az ún. **Poincaré-Stokes-féle képlet**. Egy más általánosítás, amely formailag közelebb áll az (4.5.1)-es képlethez, Lebesgue nevéhez kötődik

A következő tétel is az (4.5.1) képlettel kapcsolatos, viszont a feltételek általánosabbak, mint a 27. Tételben.

28. Tétel. *(Newton-Leibniz képlet - 2. változat). Tekintsük az $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ függvényt úgy, hogy létezzen a primitív függvénye az $[a, b]$ intervallumon és $f \in R[a, b]$. Ekkor*

$$\int_a^b f(x)\, dx = F(b) - F(a) = F(x)\big|_a^b,$$

ahol F az f valamely primitív függvénye.

Bizonyítás. Mivel $f \in R[a, b]$, ezért bármely $\varepsilon > 0$ számhoz létezik $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ úgy, hogy minden $(\Delta, \xi) \in Par_R[a, b]$, $\|\Delta\| < \delta$ esetén

$$\left|\sigma_\Delta(f, \xi) - \int_a^b f(x)\, dx\right| < \varepsilon.$$

Legyen $(\Delta_n, \xi^n) \in Par_R[a, b]$, melyre $\lim\limits_{n\to\infty} \|\Delta_n\| = 0$. Ekkor létezik $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ úgy, hogy $\|\Delta_n\| < \delta$, bármely $n > n_\varepsilon$ esetén. Így

$$\left|\sigma_{\Delta_n}(f, \xi^n) - \int_a^b f(x)\, dx\right| < \varepsilon,$$

ha $n > n_\varepsilon$. Következésképp

$$\lim_{n\to\infty} \sigma_{\Delta_n}(f, \xi^n) = \int_a^b f(x)\ dx \tag{4.5.2}$$

Tekintsük a $\Delta_n \in Par[a, b]$, $\Delta_n : a = x_{n0} < x_{n1} < \ldots < x_{nk_n} = b$ felosztásokat úgy, hogy $\lim\limits_{n\to\infty} \|\Delta_n\| = 0$. Alkalmazva a Lagrange-tételt (3. Fejezet, 25. Következmény) létezik $\xi_{ni} \in]x_{n,i-1}, x_{n,i}[$ azzal a tulajdonsággal, hogy

$$F(x_{ni}) - F(x_{n,i-1}) = F'(\xi_{ni}) \cdot (x_{ni} - x_{n,i-1}) = f(\xi_{ni}) \cdot (x_{ni} - x_{n,i-1}),$$

$i = 1, \ldots, k_n$. Következésképp

$$\begin{aligned}\sigma_{\Delta_n}(f, \xi^n) &= \sum_{i=1}^{k_n} f(\xi_{ni})(x_{ni} - x_{n,i-1}) = \\ &= \sum_{i=1}^{k_n} (F(x_{ni}) - F(x_{n,i-1})) = F(b) - F(a).\end{aligned}$$

Tekintettel az (4.5.2) egyenlőségre megkapjuk az $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$ képletet. □

Az alábbi tételek tekinthetők a Newton-Leibniz képlet alkalmazásainak.

29. Tulajdonság. *(parciális integrálás képlete). Ha $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ foly-tonosan differenciálható függvények az $[a, b]$ intervallumon, akkor fennáll az*

$$\int_a^b f'(x)g(x)\ dx = f(b)g(b) - f(a)g(a) - \int_a^b f(x)g'(x)\ dx \tag{4.5.3}$$

egyenlőség. Az (4.5.3) ekvivalens írásmódja:

$$\int_a^b f'(x)g(x)\ dx = (f\cdot g)(x)\big|_a^b - \int_a^b f(x)g'(x)\ dx.$$

Bizonyítás. A 3. Fejezet, 16. Tétel, b) pontja alapján $(f\cdot g)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$, $x\in[a,b]$. A jobb oldalon folytonos függvények összege van, mert $f,g\in C^1[a,b]$, tehát a bal oldal is folytonos függvény. Alkalmazva az 5. Következményt, az egyenlőség mindkét oldalát integrálhatjuk, és a bal oldalra alkalmazzuk a Newton-Leibniz-féle képletet (28. Tétel):

$$(f\cdot g)(x)\big|_a^b = \int_a^b (f\cdot g)'(x)dx = \int_a^b f'(x)g(x)dx + \int_a^b f(x)g'(x)dx.$$

□

12. Példa. Számítsuk ki az $\int\limits_0^{\pi/2} \sin^n x\ dx$ integrált, ahol $n = 0,1,2,\ldots$

Jelölje $I_n = \int\limits_0^{\pi/2} \sin^n x\ dx$; a 29. Tulajdonság alapján

$$\begin{aligned}
I_n &= \int_0^{\pi/2} \sin x\cdot \sin^{n-1} x\ dx = \int_0^{\pi/2} (-\cos)'(x)\cdot \sin^{n-1} x\ dx = \\
&= -\cos x\ \sin^{n-1} x\big|_0^{\pi/2} + \int_0^{\pi/2} \cos x\cdot (n-1)\sin^{n-2} x\cdot \cos x\ dx = \\
&= (n-1)\int_0^{\pi/2} \sin^{n-2} x\cdot \cos^2 x\ dx = \\
&= (n-1)\int_0^{\pi/2} \sin^{n-2} x\ (1-\sin^2 x)\ dx = \\
&= (n-1)I_{n-2} - (n-1)I_n.
\end{aligned}$$

Innen

$$I_n = \frac{n-1}{n}\ I_{n-2}, \quad n\geq 2.$$

Mivel $I_0 = \int\limits_0^{\pi/2} 1\ dx = \frac{\pi}{2}$, ezért $n = 2k$ esetén

$$\begin{aligned} I_{2k} &= \frac{2k-1}{2k} \cdot \frac{2k-3}{2k-2} \cdot \ldots \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot I_0 = \frac{(2k-1)(2k-3)\ldots 3 \cdot 1}{(2k)(2k-2)\ldots 4 \cdot 2} \cdot \frac{\pi}{2} = \\ &= \frac{(2k-1)!!}{(2k)!!} \cdot \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

Hasonlóan, $I_1 = \int\limits_0^{\pi/2} \sin x\ dx = -\cos x\Big|_0^{\pi/2} = 1$ miatt $n = 2k+1$ esetén

$$\begin{aligned} I_{2k+1} &= \frac{2k}{2k+1} \cdot \frac{2k-2}{2k-1} \cdot \ldots \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{2}{3} \cdot I_1 = \frac{(2k)(2k-2)\ldots 4 \cdot 2}{(2k+1)(2k-1)\ldots 5 \cdot 3} \cdot 1 = \\ &= \frac{(2k)!!}{(2k+1)!!}. \end{aligned}$$

13. Példa. Igazoljuk a **Wallis-féle képletet**:

$$\frac{\pi}{2} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2n+1} \cdot \left[\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\right]^2$$

Mivel $\sin : \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \to [0,1]$, ezért $\sin^{2k+2} x \leq \sin^{2k+1} x \leq \sin^{2k} x$, bármely $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ esetén. Az egyenlőtlenségeket integrálva a $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ intervallumon és alkalmazva a 12. Példát kapjuk, hogy $I_{2k+2} \leq I_{2k+1} \leq I_{2k}$ vagy

$$\frac{I_{2k+2}}{I_{2k}} \leq \frac{I_{2k+1}}{I_{2k}} \leq 1$$

vagy

$$\frac{2k+1}{2k+2} \leq \frac{2}{\pi} \cdot \left[\frac{(2k)!!}{(2k-1)!!}\right]^2 \cdot \frac{1}{2k+1} \leq 1.$$

Áttérve határértékre $k \to \infty$ szerint, eljutunk a kívánt képlethez.

14. Példa. Adjuk meg a Taylor-képlet (3. Fejezet, 32. Tétel) maradéktagjának integrál alakját.

Alkalmazva a Newton-Leibniz képletet és az (4.5.3)-es egyenlőséget, írható az $f \in C^n[a,b]$ függvény esetén, hogy

$$
\begin{aligned}
f(x) - f(a) = & \\
= & \int_a^x f'(t)dt = -\int_a^x f'(t)(x-t)'dt = \\
= & -f'(t)(x-t)\Big|_a^x + \int_a^x f''(t)(x-t)dt = \\
= & f'(a)(x-a) - \frac{1}{2}\int_a^x f''(t)\cdot((x-t)^2)'dt = \\
= & f'(a)(x-a) - \frac{1}{2}f''(t)(x-t)^2\Big|_a^x + \frac{1}{2}\int_a^x f'''(t)\cdot(x-t)^2dt = \\
= & f'(a)(x-a) + \frac{1}{2}f''(a)(x-a)^2 - \frac{1}{2\cdot 3}\int_a^x f'''(t)\cdot((x-t)^3)'dt = \\
= & \ldots = f'(a)(x-a) + \frac{1}{2!}f''(a)(x-a)^2 + \ldots + \\
& + \frac{1}{(n-1)!}f^{(n-1)}(a)(x-a)^{n-1} + \frac{1}{(n-1)!}\int_a^x f^{(n)}(t)(x-t)^{n-1}dt.
\end{aligned}
$$

Mivel a Taylor-képlet

$$f(x) = f(a) + \frac{1}{1!}f'(a)(x-a) + \ldots + \frac{1}{(n-1)!}f^{(n-1)}(a)(x-a)^{n-1} + R_{n-1}(x)$$

alakú, ezért

$$R_{n-1}(x) = \frac{1}{(n-1)!}\int_a^x f^{(n)}(t)(x-t)^{n-1}dt.$$

Ha alkalmazzuk az integrálszámítás első középértéktételét (19. Tétel), akkor létezik $\xi \in [a,b]$ úgy, hogy

$$
\begin{aligned}
R_{n-1}(x) &= \frac{1}{(n-1)!}\int_a^x f^{(n)}(t)(x-t)^{n-1}dt = \\
&= \frac{1}{(n-1)!}f^{(n)}(\xi)\cdot\int_a^x (x-t)^{n-1}dt = \\
&= \frac{1}{(n-1)!}f^{(n)}(\xi)\cdot\left(-\frac{1}{n}(x-t)^n\right)\Big|_a^x = \frac{1}{n!}f^{(n)}(\xi)(x-a)^n,
\end{aligned}
$$

vagyis visszakaptuk a jól ismert Lagrange-maradéktagot.

15. Példa. Ha $f, g \in C^{n+1}[a,b]$, akkor a 29. Tulajdonság alapján:

$$\begin{aligned}
&\int_a^b f(x) g^{(n+1)}(x)\, dx = \\
&= f(x)g^{(n)}(x)\Big|_a^b - \int_a^b f'(x)g^{(n)}(x)\, dx = \\
&= f(x)g^{(n)}(x)\Big|_a^b - f'(x)g^{(n-1)}(x)\Big|_a^b + \int_a^b f''(x)g^{(n-1)}(x)\, dx = \ldots = \\
&= \left[f(x)g^{(n)}(x) - f'(x)g^{(n-1)}(x) + \ldots + (-1)^n f^{(n)}(x)\cdot g(x)\right]\Big|_a^b + \\
&\quad + (-1)^{n+1}\int_a^b f^{(n+1)}(x)g(x)\, dx.
\end{aligned}$$

Így igazoltuk a következő képletet:

$$\begin{aligned}
&\int_a^b f(x) g^{(n+1)}(x)\, dx = \\
&= \left[f(x)g^{(n)}(x) - f'(x)g^{(n-1)}(x) + \ldots + (-1)^n f^{(n)}(x)g(x)\right]\Big|_a^b + \\
&\quad + (-1)^{n+1}\int_a^b f^{(n+1)}(x)g(x)\, dx,
\end{aligned}$$

amely az (4.5.3) általánosítása.

30. Tulajdonság. *(helyettesítés módszere - 1. változat). Ha $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ folytonos és $g : [\alpha, \beta] \to [a,b]$ folytonosan differenciálható függvény, ahol $a = g(\alpha)$ és $b = g(\beta)$, akkor igaz a következő egyenlőség:*

$$\int_a^b f(x)\, dx = \int_\alpha^\beta f(g(t))\cdot g'(t)\, dt.$$

Bizonyítás. Legyen F az f függvény valamely primitív függvénye. A 3.

Fejezet, 18. Tétele alapján:

$$(F \circ g)'(t) = F'(g(t)) \cdot g'(t) = f(g(t)) \cdot g'(t), \quad t \in [\alpha, \beta].$$

A Newton-Leibniz képlet szerint: $\int_a^b f(x)dx = F(x)\big|_a^b$ és

$$\begin{aligned}\int_a^b f(g(t)) \cdot g'(t)\ dt &= \int_a^b (F \circ g)'(t)\ dt = (F \circ g)(t)\big|_\alpha^\beta = \\ &= F(g(\beta)) - F(g(\alpha)) = F(b) - F(a) = \\ &= F(x)\big|_a^b.\end{aligned}$$

Következésképp:

$$\int_a^b f(x)\ dx = \int_a^\beta f(g(t)) \cdot g'(t)\ dt.$$

$\square$

A következő tétel szintén helyettesítési módszer a Riemann-integrá-lokban, melynek feltételei különböznek a 30. Tulajdonság feltételeitől.

31. Tétel. *(helyettesítés módszere – 2. változat). Legyen $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ Riemann-integrálható függvény és $g : [\alpha, \beta] \to [a, b]$ folytonosan differenciálható, szigorúan monoton függvény úgy, hogy $g(\alpha) = a$, $g(\beta) = b$ vagy $g(\alpha) = b$, $g(\beta) = a$. Ekkor $(f \circ g) \cdot g' \in R[\alpha, \beta]$ és*

$$\int_{g(\alpha)}^{g(\beta)} f(x)\ dx = \int_\alpha^\beta f(g(t)) \cdot g'(t)\ dt.$$

Bizonyítás. Legyen $\Delta_t \in Par[\alpha, \beta]$, $\Delta_t : \alpha = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = \beta$. Mivel $g : [\alpha, \beta] \to [a, b]$ szigorúan monoton függvény, ezért $\{g(t_0), g(t_1), \ldots, g(t_n)\}$ az $[a, b]$ intervallum felosztása. Jelölje Δ_x ezt a felosztást; így $\Delta_x : a = g(t_0) < g(t_1) < \ldots < g(t_n) = b$ vagy $\Delta_x : a = g(t_n) < g(t_{n-1}) < \ldots < g(t_0) = b$. Továbbá, ha $\|\Delta_t\| \to 0$, akkor $\|\Delta_x\| \to 0$, mert a g függvény egyenletesen folytonos az $[\alpha, \beta]$ intervallumon.

Legyen $\tau \in P_{\Delta_t}$ tetszőleges, $\tau = (\tau_1, \dots, \tau_n)$. Mivel g szigorúan monoton az $[\alpha, \beta]$ intervallumon és $g \in C[\alpha, \beta]$, ezért a 4. Fejezet, 5. Tétele miatt léteznek az egyértelműen meghatározott $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$ $(i = 1, \dots, n)$ pontok úgy, hogy $g(\tau_i) = \xi_i$ $(i = 1, \dots, n)$. Alkalmazva a Lagrange-tételt (3. Fejezet, 25. Következmény) írható, hogy

$$\begin{aligned}\sigma_{\Delta_x}(f, \xi) &= \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) = \sum_{i=1}^{n} f(g(\tau_i)) \cdot [g(t_i) - g(t_{i-1})] = \\ &= \sum_{i=1}^{n} f(g(\tau_i)) \cdot g'(\overline{\tau}_i)(t_i - t_{i-1}),\end{aligned}$$

ahol $\overline{\tau}_i \in \left]t_{i-1}, t_i\right[$. Ekkor

$$\begin{aligned}\sigma_{\Delta_x}(f, \xi) &= \sum_{i=1}^{n} f(g(\tau_i))\; g'(\tau_i)(t_i - t_{i-1}) + \\ &\quad + \sum_{i=1}^{n} f(g(\tau_i))\; [g'(\overline{\tau}_i) - g'(\tau_i)](t_i - t_{i-1}). \qquad (4.5.4)\end{aligned}$$

Mivel $f \in R[a, b]$, ezért létezik $M > 0$ úgy, hogy $|f(x)| \leq M$, bármely $x \in [a, b]$ esetén. Így

$$\begin{aligned}&\left|\sum_{i=1}^{n} f(g(\tau_i))\; [g'(\overline{\tau}_i) - g'(\tau_i)]\; (t_i - t_{i-1})\right| \leq \\ &\qquad \leq M \sum_{i=1}^{n} |g'(\overline{\tau}_i) - g'(\tau_i)| \cdot (t_i - t_{i-1}) \leq \\ &\qquad \leq M \sum_{i=1}^{n} \omega(g'; [t_{i-1}, t_i]) \cdot (t_i - t_{i-1}).\end{aligned}$$

Feltétel szerint $g' \in C[\alpha, \beta]$, ezért $g' \in R[a, b]$ (lásd az 5.

Következményt). Így a 10. Következmény figyelembevételével

$$\lim_{\|\Delta_t\|\to 0}\sum_{i=1}^{n}\omega(g';[t_{i-1},t_i])\cdot(t_i-t_{i-1})=0,$$

vagyis

$$\lim_{\|\Delta_t\|\to 0}\sum_{i=1}^{n}f(g(\tau_i))\ [g'(\overline{\tau}_i)-g'(\tau_i)]\ (t_i-t_{i-1})=0. \tag{4.5.5}$$

Továbbá, az $f\in R[a,b]$ feltétel miatt

$$\lim_{\|\Delta_x\|\to 0}\sigma_{\Delta_x}(f,\xi)=\lim_{\|\Delta_x\|\to 0}\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i)(x_i-x_{i-1})=\int_{g(\alpha)}^{g(\beta)}f(x)\ dx.$$

Így az (4.5.4) egyenlőség alapján, ha $\|\Delta_t\|\to 0$ (amely esetben $\|\Delta_x\|\to 0$ is teljesül), akkor létezik a

$$\lim_{\|\Delta_t\|\to 0}\sum_{i=1}^{n}f(g(\tau_i))\ g'(\tau_i)\ (t_i-t_{i-1})$$

véges határérték, ahol $(\Delta_t,\tau)\in Par_R[\alpha,\beta]$ tetszőleges. Következésképp $(f\circ g)\cdot g'\in R[\alpha,\beta]$, és az (4.5.4), (4.5.5) alapján

$$\int_{g(\alpha)}^{g(\beta)}f(x)\ dx=\int_{\alpha}^{\beta}f(g(t))\cdot g'(t)\ dt.$$

□

16. Példa. Legyen $f\in R[-a,a]$. Ekkor

$$\int_{-a}^{a}f(x)dx=\begin{cases}2\displaystyle\int_0^a f(x)dx, & \text{ha} \quad f \text{ páros függvény}\\ 0, & \text{ha} \quad f \text{ páratlan függvény.}\end{cases}$$

Valóban, ha $f(-x) = f(x)$, bármely $x \in [-a, a]$ esetén, akkor

$$\begin{aligned}
&\int_{-a}^{a} f(x)\ dx = \\
&\quad = \int_{-a}^{0} f(x)\ dx + \int_{0}^{a} f(x)\ dx = \int_{a}^{0} f(-t) \cdot (-1)\ dt + \int_{0}^{a} f(x)\ dx = \\
&\quad = \int_{0}^{a} f(-t)\ dt + \int_{0}^{a} f(x)\ dx = \int_{0}^{a} f(-x)\ dx + \int_{0}^{a} f(x)\ dx = \\
&\quad = \int_{0}^{a} (f(-x) + f(x))\ dx = 2\int_{0}^{a} f(x)\ dx.
\end{aligned}$$

Ha $f(-x) = -f(x)$, bármely $x \in [-a, a]$ esetén, akkor az előbbi eljáráshoz hasonlóan,

$$\int_{-a}^{a} f(x)\ dx = \int_{0}^{a} (f(-x) + f(x))\ dx = \int_{0}^{a} 0\ dx = 0.$$

17. Példa. Az $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény legyen T periódusú: létezik $T \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ úgy, hogy $f(x+T) = f(x)$, bármely $x \in \mathbb{R}$ esetén. Ha $f \in R[\alpha, \beta]$ tetszőleges $[\alpha, \beta] \subseteq \mathbb{R}$ intervallumra, akkor

$$\int_{a}^{a+T} f(x)\ dx = \int_{0}^{T} f(x)\ dx,$$

ahol $a \in \mathbb{R}$ tetszőleges.

Felhasználva az $x = t + T$ helyettesítést és az f függvény periodikusságát kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}
\int_{a}^{a+T} f(x)\ dx &= \int_{a}^{0} f(x)\ dx + \int_{0}^{T} f(x)\ dx + \int_{T}^{a+T} f(x)\ dx = \\
&= \int_{0}^{T} f(x)\ dx + \int_{a}^{0} f(x)\ dx + \int_{0}^{a} f(t+T) \cdot 1\ dt = \\
&= \int_{0}^{T} f(x)\ dx + \int_{a}^{0} f(x)\ dx + \int_{0}^{a} f(t)\ dt = \int_{0}^{T} f(x)\ dx.
\end{aligned}$$

18. Példa. A $\mu = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$ mennyiséget az f függvény **integrál-**

átlagértékének nevezzük az $[a,b]$ intervallumon. Legyen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ olyan függvény, hogy $f \in R[\alpha,\beta]$, bármely $[\alpha,\beta] \subseteq \mathbb{R}$ intervallum esetén. Értelmezzük az

$$F_\delta(x) = \frac{1}{2\delta} \int_{x-\delta}^{x+\delta} f(t)\ dt, \quad x \in \mathbb{R}$$

függvényt, mint az f függvény integrál-átlagértékét az $[x-\delta, x+\delta]$ intervallumon. Igazoljuk, hogy $F_\delta \in C(\mathbb{R})$; mitöbb, ha $f \in C(\mathbb{R})$, akkor $F_\delta \in C^1(\mathbb{R})$.

Valóban, ha $f \in R[x-\delta, x+\delta]$, akkor létezik $M > 0$ úgy, hogy $|f(t)| \le M$, $t \in [x-\delta, x+\delta]$ tetszőleges. Ekkor

$$\begin{aligned}
|F_\delta(x+h) - F_\delta(x)| &= \frac{1}{2\delta} \left| \int_{x+h-\delta}^{x+h+\delta} f(t)dt - \int_{x-\delta}^{x+\delta} f(t)dt \right| = \\
&= \frac{1}{2\delta} \left| \int_{x+h-\delta}^{x-\delta} f(t)dt + \int_{x+\delta}^{x+h+\delta} f(t)dt \right| \le \\
&\le \frac{1}{2\delta} \left(M|h| + M|h| \right) = \frac{M}{\delta} \cdot |h|.
\end{aligned}$$

Innen következik, hogy F_δ folytonos az x pontban. Mivel $x \in \mathbb{R}$ tetszőleges, ezért $F_\delta \in C(\mathbb{R})$.

Ha $f \in C(\mathbb{R})$, akkor az összetett függvények deriválási szabálya alapján és a 24. Segédtétel szerint írható, hogy

$$\frac{d}{dx} \int_a^{\varphi(x)} f(t)\ dt = \frac{d}{d\varphi} \left(\int_a^{\varphi} f(t)\ dt \right) \cdot \frac{d\varphi(x)}{dx} = f(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x).$$

Így az

$$F_\delta(x) = \frac{1}{2\delta} \int_a^{x+\delta} f(t)\ dt - \frac{1}{2\delta} \int_a^{x-\delta} f(t)\ dt$$

deriválásából kapjuk, hogy

$$F_\delta'(x) = \frac{f(x+\delta) - f(x-\delta)}{2\delta}.$$

Továbbá, a $t = x + u$ helyettesítéssel

$$F_\delta(x) = \frac{1}{2\delta}\int_{-\delta}^{\delta} f(x+u)\ du.$$

Ha $f \in C(\mathbb{R})$, akkor a 18. Tétel alkalmazásával kapjuk, hogy valamely $\tau \in [-\delta, \delta]$ esetén

$$F_\delta(x) = \frac{1}{2\delta}\cdot f(x+\tau)\cdot 2\delta = f(x+\tau).$$

Következésképp $\lim\limits_{\delta \searrow 0} F_\delta(x) = f(x)$.

19. Példa. Határozzuk meg az elektromos áram munkáját.

Az egyenáram munkája: ha egy áramkörben I erősségű és U feszültségű egyenáram t ideig kering, akkor az áram által végzett munka: $W = I \cdot U \cdot t$.

A váltakozó áram munkája: határozzuk meg a munkát, ha az áram erőssége és feszültsége az $[\alpha, \beta]$ időtartamban változik. Osszuk fel az $[\alpha, \beta]$ időtartamot az $\alpha = t_0, t_1, \ldots, t_n = \beta$ időpillanatokkal; vegyük a $\Delta t_i = t_i - t_{i-1}$ időtartamban a feszültséget és az intenzitást állandónak, akkorának, mint a τ_i pillanatban ($\tau_i \in\,]t_{i-1}, t_i[$). A végzett munka Δt_i idő alatt: $\Delta W_i \approx I(\tau_i)U(\tau_i)\Delta t_i$. Az egész munka:

$$W \approx \sum_{i=1}^{n} I(\tau_i)U(\tau_i)\Delta t_i.$$

Ha I és U véges számú pont kivételével folytonos függvények, akkor

$$W = \lim_{\|\Delta\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} I(\tau_i)\cdot U(\tau_i)\cdot \Delta t_i = \int_{\alpha}^{\beta} I(t)U(t)\ dt.$$

a) *A váltakozó áram munkája tiszta ohmikus ellenállás esetén*: ha egy áramkörben $U = U_0 \sin \omega t = U_0 \sin \frac{2\pi t}{T}$ váltakozó áram kering, tiszta ohmikus ellenállás esetén az áramerősség:

$$I = I_0 \sin \omega t = I_0 \sin \frac{2\pi t}{T},$$

ahol T egy periódus, $\omega = \frac{2\pi}{T}$ a körfrekvencia, I_0 a maximális áramerősség, U_0 a maximális feszültség. A váltakozó áram munkája egy periódus alatt:

$$\begin{aligned} W &= \int_0^T I_0 U_0 \sin^2 \omega t \; dt = \frac{1}{2} I_0 U_0 \int_0^T (1 - \cos 2\omega t) \; dt = \\ &= \frac{1}{2} I_0 U_0 \cdot \left(t - \frac{1}{2\omega} \sin 2\omega t \right) \Big|_0^T = \frac{1}{2} I_0 U_0 T. \end{aligned}$$

A teljesítmény:

$$P = \frac{W}{T} = \frac{1}{2} I_0 U_0.$$

Tiszta ohmikus ellenállást tartalmazó áramkörben, ha R az ellenállás, Ohm törvénye értelmében $U = IR$. Az áram munkája a $[0, T]$ időszakaszban:

$$W = \int_0^T R \; I^2(t) \; dt.$$

Jelentse $\overline{I}$ azon egyenáram intenzitását, amely a kérdéses áramkörben ugyan-annyi idő alatt ugyanannyi munkát végez, mint a váltakozó áram. Az egyenáram munkája T idő alatt: $W = \overline{I}^2 \cdot R \cdot T$. Így

$$\overline{I}^2 \cdot R \cdot T = R \int_0^T I^2(t) \; dt.$$

Innen

$$\overline{I}^2 = \frac{1}{T} \int_0^T I^2(t) \; dt = \frac{1}{T} \int_0^T I_0^2 \sin^2 \omega t \; dt = \frac{I_0^2}{2}.$$

Tehát $\overline{I} = \frac{1}{\sqrt{2}} I_0$; ezt az értéket a váltakozó áram *effektív* *áramerősségének* nevezzük:

$$I_{\text{eff}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\ I_0.$$

Ha azon egyenáram feszültségét, amely ugyanannyi idő alatt ugyanannyi munkát végez, mint a váltakozó áram, $\overline{U}$-val jelölve, hasonló módon nyerhetjük a

$$W = \frac{\overline{U}^2}{R} \cdot T \quad \text{és} \quad W = \frac{1}{R}\int_0^T U^2(t)\ dt = \frac{1}{R}\int_0^T U_0 \sin^2 \omega t\ dt$$

egyenletekből, hogy $\overline{U} = \frac{1}{\sqrt{2}} U_0$. Ezt az értéket a váltakozó áram *effektív feszültségének* nevezzük:

$$U_{\text{eff}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\ U_0.$$

A váltakozó áram teljesítménye:

$$P = I_{\text{eff}} \cdot U_{\text{eff}} = \frac{I_0 U_0}{2}.$$

b) *A váltakozó áram munkája, ha az áramkörben önindukció van*: ha a váltakozó áramú áramkörben önindukció van, a feszültség és intenzítás már nincsenek egy fázisban, közöttük φ fáziskülönbség van: $U = U_0 \sin \omega t$, $I = I_0 \sin(\omega t + \varphi)$, ahol $\omega = \frac{2\pi}{T}$. Ekkor

$$\begin{aligned}
W &= \int_0^T I_o U_0 \sin \frac{2\pi t}{T} \sin\left(\frac{2\pi t}{T} + \varphi\right) dt = \\
&= \frac{1}{2} I_0 U_0 \int_0^T \left[\cos\varphi - \cos\left(\frac{4\pi t}{T} + \varphi\right)\right] dt = \\
&= \frac{1}{2} I_0 U_0 \cdot \left[t \cos\varphi - \frac{T}{4\pi} \sin\left(\frac{4\pi t}{T} + \varphi\right)\right] \Bigg|_0^T = \\
&= \frac{1}{2} I_0 U_0 \cdot T \cos\varphi - \frac{1}{2} I_0 U_0 \cdot \frac{T}{4\pi}(\sin\varphi - \sin\varphi) = \frac{I_0 U_0 T}{2} \cos\varphi.
\end{aligned}$$

Következésképp

$$W = I_{\text{eff}} \cdot U_{\text{eff}} \cdot \cos\varphi \cdot T,$$

míg a teljesítmény:

$$P = I_{\text{eff}} \cdot U_{\text{eff}} \cdot \cos\varphi.$$

4.6. Numerikus integrálás

Amint láttuk, a Newton-Leibniz-féle képlet az $\int_a^b f(x)dx$ integrál ki-számítására csak abban az esetben használható, amikor ismerjük az f függvény primitív függvényének analitikus formáját. Ettől különböző esetekben a fenti integrál kiszámítására nincs általános módszer. Ilyenkor az integrált megközelíthetjük az integrálértékek közelítő számításával. Ezt az eljárást nevezzük **numerikus integrálásnak**. Az alább sorra kerülő numerikus integrálási módszerek bemutatásához szükségünk van a Lagrange-féle interpolációs képletre.

Tekintsük
az $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ függvényt és az $a \leq x_0 < x_1 < \ldots < x_n \leq b$ pontokat. Célunk olyan legfeljebb n-ed fokú L_n polinomot szerkeszteni, amelyre $L_n(x_i) = f(x_i)$, $i = 0, \ldots, n$. Ennek a polinomnak a megszerkesztését nevezzük **interpolációnak**.

Legyen $L_n(x) = a_0 + a_1x + \ldots + a_nx^n, a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$, $a_n \neq 0$. Az $L_n(x_i) = f(x_i)\ \ (i = 0, \ldots, n)$ feltételek alapján eljutunk a

$$\begin{cases} a_0 + a_1x_0 + \ldots + a_nx_0^n = f(x_0) \\ a_0 + a_1x_1 + \ldots + a_nx_1^n = f(x_1) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_0 + a_1x_n + \ldots + a_nx_n^n = f(x_n) \end{cases}$$

egyenletrendszerhez. A rendszer determinánsa a következő

Vandermonde-determináns:

$$\begin{vmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \dots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^n \end{vmatrix} = \prod_{0\le i<j\le n} (x_j - x_i) \neq 0.$$

Így az egyenletrendszernek egyetlen megoldása van, ezért L_n létezik és egyértelmű, melyet **Lagrange-féle polinomnak** nevezünk. Az $L_n(x_i) = f(x_i)$ $(i = 0, \dots, n)$ miatt

$$\begin{vmatrix} L_n(x) & 1 & x & x^2 & \dots & x^n \\ f(x_0) & 1 & x_0 & x_0^2 & \dots & x_0^n \\ f(x_1) & 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ f(x_n) & 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^n \end{vmatrix} = 0.$$

Innen

$$L_n(x) = -\frac{\begin{vmatrix} 0 & 1 & x & \dots & x^n \\ f(x_0) & 1 & x_0 & \dots & x_0^n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ f(x_n) & 1 & x_n & \dots & x_n^n \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \dots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^n \end{vmatrix}}.$$

Ha az L_n Lagrange-polinomot az

$$L_n(x) = \sum_{i=0}^{n} A_i(x - x_0)(x - x_1)\dots(x - x_{i-1})(x - x_{i+1})\dots(x - x_n)$$

alakban keressük, akkor az $L_n(x_i) = f(x_i)$ $(i = 0, \dots, n)$ feltételek miatt

$$A_i = \frac{f(x_i)}{(x_i - x_0)(x_i - x_1)\dots(x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1})\dots(x_i - x_n)},$$

ahol $i = 0, \dots, n$. Mivel a Lagrange-polinom egyértelműen meghatározott, ezért

$$L_n(x) = \sum_{i=0}^{n} \frac{(x - x_0)(x - x_1)\dots(x - x_{i-1})(x - x_{i+1})\dots(x - x_n)}{(x_i - x_0)(x_i - x_1)\dots(x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1})\dots(x_i - x_n)} \cdot f(x_i)$$

32. Tétel. *Legyen* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *adott függvény és* $a \le x_0 < x_1 < \dots < x_n \le b$. *Az* $x \in [a, b]$ *pont esetén jelölje* $\alpha := \min\{x, x_0, \dots, x_n\}$ *és* $\beta := \max\{x, x_0, \dots, x_n\}$. *Ha* $f \in C^n[\alpha, \beta]$ *és* $f^{(n)}$ *deriválható az* $]\alpha, \beta[$ *intervallumon, akkor létezik* $\xi \in]\alpha, \beta[$ *úgy, hogy*

$$f(x) - L_n(x) = \frac{1}{(n+1)!}\ (x - x_0)\dots(x - x_n)\ f^{(n+1)}(\xi). \tag{4.6.1}$$

Sajátos esetek az $f \in C^{n+1}[a, b]$ *feltétel esetén:*

$$|f(x) - L_n(x)| \le \frac{M}{(n+1)!}\ |(x - x_0)\dots(x - x_n)|,\ x \in [a, b] \tag{4.6.2}$$

és

$$|f(x) - L_n(x)| \le \frac{M}{(n+1)!} \cdot (b - a)^{n+1},\ x \in [a, b], \tag{4.6.3}$$

ahol $M = \max\{|f^{(n+1)}(x)| : x \in [a, b]\}$.

Bizonyítás. Értelmezzük a $\varphi : [a, b] \to \mathbb{R}$,

$$\varphi(z) = \begin{vmatrix} (z - x_0)\dots(z - x_n) & f(z) - L_n(z) \\ (x - x_0)\dots(x - x_n) & f(x) - L_n(x) \end{vmatrix}$$

segédfüggvényt. Mivel $f \in C^n[\alpha, \beta]$, ezért $\varphi \in C^n[\alpha, \beta]$ és létezik $\varphi^{(n+1)}$ az $]\alpha, \beta[$ intervallumon. Ugyanakkor $\varphi(x) = 0$ és $\varphi(x_i) = 0$, $i = 0, \dots, n$.

Így a φ függvénynek $(n+2)$ különböző zérushelye van az $[\alpha, \beta]$ intervallumon. Alkalmazva rendre a Rolle-tételt (3. Fejezet, 23. Tétel) következik, hogy létezik $\xi \in \,]\alpha, \beta[\,$, amelyre $\varphi^{(n+1)}(\xi) = 0$. Viszont $z \in \,]\alpha, \beta[$ esetén

$$\begin{aligned}\varphi^{(n+1)}(z) &= \begin{vmatrix} (n+1)! & f^{(n+1)}(z) - L_n^{(n+1)}(z) \\ (x-x_0)\dots(x-x_n) & f(x) - L_n(x) \end{vmatrix} = \\ &= \begin{vmatrix} (n+1)! & f^{(n+1)}(z) \\ (x-x_0)\dots(x-x_n) & f(x) - L_n(x) \end{vmatrix}.\end{aligned}$$

Következésképp

$$f(x) - L_n(x) = \frac{1}{(n+1)!}(x-x_0)\dots(x-x_n)\; f^{(n+1)}(\xi),$$

vagyis az (4.6.1) összefüggés. Az (4.6.2) és (4.6.3) egyenlőtlenségek az (4.6.1) azonnali következményei. □

Az (4.6.1) képletet szokás a **Lagrange-féle interpolációs képletnek** nevezni, míg az $L_n \equiv L_n f$ polinom a **Lagrange-féle interpolációs polinom**. Az

$$l_i(x) = \frac{(x-x_0)\dots(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\dots(x-x_n)}{(x_i-x_0)\dots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\dots(x_i-x_n)}, \quad i = 0, 1\dots, n$$

polinomokat az interpoláció **fundamentális polinomjainak** nevezzük.

33. Tétel. *(trapézformula). Legyen $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ kétszer folytonosan differenciálható függvény és $x_i = a + i \cdot \frac{b-a}{n}$, $i = 0, \dots, n$. Ekkor*

$$\begin{aligned}&\left| \int_a^b f(x)\; dx - \frac{b-a}{2n} \cdot \{f(a) + f(b) + 2[f(x_1) + \ldots + f(x_{n-1})]\} \right| \le \\ &\qquad \le \frac{M(b-a)^3}{12n^2},\end{aligned}$$

ahol $M = \max\{|f''(x)\mid : x \in [a,b]\}$.

Bizonyítás. A tétel azt állítja, hogy az $\int_a^b f(x)dx$ integrál közelítő kiszámítására a következő képlet érvényes:

$$\int_a^b f(x)\ dx \approx \frac{b-a}{2n} \cdot \{f(a) + f(b) + 2[f(x_1) + \ldots + f(x_{n-1})]\},$$

amelyet **trapézformulának** nevezünk. Az elnevezést a következő indokolja: $\displaystyle\int_a^b f(x)\ dx = \sum_{i=1}^{n} \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)\ dx$ és

$$\begin{aligned}
\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)\ dx &\approx \int_{x_{i-1}}^{x_i} L_1(x)\ dx = \\
&= \int_{x_{i-1}}^{x_i} \left(\frac{x-x_i}{x_{i-1}-x_i} \cdot f(x_{i-1}) + \frac{x-x_{i-1}}{x_i-x_{i-1}} \cdot f(x_i) \right) dx = \\
&= (x_i - x_{i-1}) \cdot \frac{f(x_{i-1}) + f(x_i)}{2}
\end{aligned}$$

(L_1 az x_{i-1} és x_i pontokhoz tartozó Lagrange-polinomot jelöli); ha $f(x) \geq 0$, $x \in [a,b]$, akkor az $\frac{1}{2}[f(x_{i-1}) + f(x_i)] \cdot (x_i - x_{i-1})$ tag az $f(x_{i-1})$ és $f(x_i)$ alapú és $x_i - x_{i-1}$ magasságú trapéz területe.

Most térjünk rá a tétel bizonyítására. Legyen $a \leq \alpha < \beta \leq b$. A parciális integrálás képlete (29. Tulajdonság) alapján:

$$
\begin{aligned}
\int_\alpha^\beta f(x)\,dx &= \int_\alpha^\beta f(x)\cdot(x-\alpha)'\,dx = \\
&= f(\beta)\cdot(\beta-\alpha) - \int_\alpha^\beta f'(x)(x-\alpha)\,dx = \\
&= f(\beta)\cdot(\beta-\alpha) - \int_\alpha^\beta f'(x)\cdot(x-\alpha)\cdot(x-\beta)'\,dx = \\
&= f(\beta)\cdot(\beta-\alpha) + \int_a^\beta [f'(x)\cdot(x-\alpha)]'\cdot(x-\beta)\,dx = \\
&= f(\beta)\cdot(\beta-\alpha) + \int_\alpha^\beta f''(x)\cdot(x-\alpha)\cdot(x-\beta)\,dx + \\
&\quad + \int_\alpha^\beta f'(x)\cdot(x-\beta)\,dx = \\
&= f(\beta)\cdot(\beta-\alpha) + \int_\alpha^\beta f''(x)\cdot(x-\alpha)\cdot(x-\beta)\,dx + \\
&\quad + f(\alpha)\cdot(\beta-\alpha) - \int_\alpha^\beta f(x)\,dx,
\end{aligned}
$$

ahonnan következik, hogy

$$
\left|\int_\alpha^\beta f(x)\,dx - \frac{f(\alpha)+f(\beta)}{2}\cdot(\beta-\alpha)\right| \le
$$

$$
\begin{aligned}
&\le \frac{1}{2}\int_\alpha^\beta |f''(x)|\cdot(x-\alpha)\cdot(\beta-x)\,dx \le \\
&\le \frac{M}{2}\int_\alpha^\beta (x-\alpha)(\beta-x)\,dx = \frac{M(\beta-\alpha)^3}{12}.
\end{aligned}
$$

Ha $\alpha = x_{i-1}$ és $\beta = x_i$ $(i = 1, \ldots, n)$, akkor

$$\begin{aligned}
&\left| \int_a^b f(x)\ dx - \sum_{i=1}^{n} \frac{f(x_{i-1}) + f(x_i)}{2} \cdot (x_i - x_{i-1}) \right| = \\
&= \left| \sum_{i=1}^{n} \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)\ dx - \sum_{i=1}^{n} \frac{f(x_{i-1}) + f(x_i)}{2} \cdot (x_i - x_{i-1}) \right| \leq \\
&\leq \sum_{i=1}^{n} \left| \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)\ dx - \frac{f(x_{i-1}) + f(x_i)}{2} \cdot (x_i - x_{i-1}) \right| \leq \\
&\leq \sum_{i=1}^{n} \frac{M(x_i - x_{i-1})^3}{12} = \frac{M(b-a)^3}{12n^2},
\end{aligned}$$

amit igazolni kellett. □

34. Tétel. *(Simpson-féle képlet). Legyen* $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ *négyszer folytonosan differenciálható függvény és* $x_i = a + i \cdot \frac{b-a}{2n}$, $i = 0, \ldots, 2n$. *Ekkor*

$$\left| \int_a^b f(x)\ dx - \frac{b-a}{6n} \cdot \sum_{i=0}^{n-1} [f(x_{2i}) + 4f(x_{2i+1}) + f(x_{2i+2})] \right| \leq \frac{M(b-a)^5}{2880n^4},$$

ahol $M = \max\{|f^{(4)}(x)| : x \in [a,b]\}$.

Bizonyítás. Legyen $c \in\ ]a,b[$ és $h > 0$ úgy, hogy $a \leq c-h < c < c+h \leq b$. A $[c-h, c+h]$ intervallumon az f függvényt helyettesítjük a $c-h, c, c+h$ pontokhoz tartozó L_2 Lagrange-féle polinommal:

$$\begin{aligned}
&\int_{c-h}^{c+h} f(x)\ dx \approx \\
&\approx \int_{c-h}^{c+h} L_2(x)\ dx = \int_{c-h}^{c+h} \left\{ \frac{(x-c)(x-c-h)}{2h^2} \cdot f(c-h) + \right. \\
&\quad \left. + \frac{(x-c+h)(x-c-h)}{-h^2} \cdot f(c) + \frac{(x-c+h)(x-c)}{2h^2} \cdot f(c+h) \right\} dx = \\
&= \frac{h}{3} \cdot [f(c-h) + 4f(c) + f(c+h)].
\end{aligned}$$

Ezt a képletet **parabolaformulának** is szokás nevezni, mert geometriailag azt jelenti, hogy az f függvényt a $[c-h, c+h]$ intervallumon az intervallum c középpontján és végpontjain áthaladó másodfokú parabolával helyettesítjük (5.3. ábra).

Továbbá, tekintsük a $\varphi : [0, h] \to \mathbb{R}$,

$$\varphi(t) = \int_{c-t}^{c+t} f(x)\ dx - \frac{t}{3}[f(c-t) + 4f(c) + f(c+t)]$$

segédfüggvényt. Mivel $f \in C^4[a, b]$, ezért $\varphi \in C^4[0, h]$. Így

$$\begin{aligned}
\varphi'(t) &= \frac{2}{3}[f(c+t) + f(c-t)] - \frac{4}{3}f(c) - \frac{t}{3}[f'(c+t) - f'(c-t)],\\
\varphi''(t) &= \frac{1}{3}[f'(c+t) - f'(c-t)] - \frac{t}{3}[f''(c+t) + f''(c-t)] \quad \text{és}\\
\varphi'''(t) &= -\frac{t}{3}[f'''(c+t) - f'''(c-t)].
\end{aligned}$$

Alkalmazva Lagrange-tételét (3. Fejezet, 25. Következmény) az f''' függvényre a $[c-t, c+t]$ intervallumon következik, hogy $f'''(c+t) - f'''(c-t) = 2tf^{(4)}(\xi)$, ahol $\xi \in \,]c-t, c+t[$. Ha $m^* = \min\{f^{(4)}(x) : x \in [c-h, c+h]\}$ és $M^* = \max\{f^{(4)}(x) : x \in [c-h, c+h]\}$, akkor írható, hogy $m^* \leq f^{(4)}(\xi) \leq M^*$. Innen

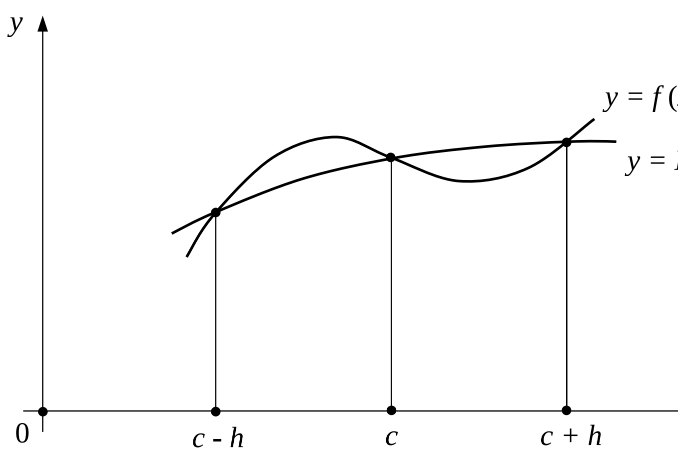
$$-\frac{2t^2}{3}M^* \leq \varphi'''(t) \leq -\frac{2t^2}{3}m^*.$$

Integrálva ezen egyenlőtlenségeket a $[0, u] \subseteq [0, h]$ intervallumon, és figyelembe véve, hogy $\varphi''(0) = 0$, kapjuk:

$$-\int_0^u \frac{2t^2}{3}M^* dt \leq \int_0^u \varphi'''(t)\ dt \leq -\int_0^u \frac{2t^2}{3}m^* dt,$$

vagyis

$$-\frac{2u^3}{9}\ M^* \leq \varphi''(u) \leq -\frac{2u^3}{9}m^*,$$



y
y = f (
y =
0
c - h
c
c + h

bármely $u \in [0,h]$ esetén. Újból integrálva a $[0,v] \subseteq [0,h]$ intervallumon, és felhasználva a $\varphi'(0) = 0$ egyenlőséget, a

$$-\frac{v^4}{18}\, M^* \le \varphi'(v) \le -\frac{v^4}{18}\, m^*, \quad v \in [0,h]$$

egyenlőtlenségekhez jutunk. Harmadszori integrálás után, a $\varphi(0) = 0$ miatt kapjuk:

$$-\frac{h^5}{90}\, M^* \le \varphi(h) \le -\frac{h^5}{90}\, m^*.$$

Az m^* és M^* értelmezése alapján

$$-\frac{h^5}{90}\, M^* \le -\frac{h^5}{90}\, f^{(4)}(x) \le -\frac{h^5}{90}\, m^*,$$

ahol $x \in [c-h, c+h]$. Mivel $f^{(4)} \in C[c-h, c+h]$, ezért létezik $\zeta \in [c-h, c+h]$ úgy, hogy $-\frac{h^5}{90} f^{(4)}(\zeta) = \varphi(h)$. Így

$$\int_{c-h}^{c+h} f(x)\, dx - \frac{h}{3}\, [f(c-h) + 4f(c) + f(c+h)] = -\frac{h^5}{90} \cdot f^{(4)}(\zeta).$$

Ha alkalmazzuk ezt az összefüggést az $x_{2i}, x_{2i+1}, x_{2i+2}$ $(i = 0, \ldots, n-1)$ pontokra és $h = \frac{b-a}{2n}$ esetre, akkor

$$\begin{aligned}
&\left| \int_a^b f(x)\, dx - \frac{b-a}{6n} \sum_{i=0}^{n-1} [f(x_{2i}) + 4f(x_{2i+1}) + f(x_{2i+2})] \right| = \\
&= \left| \sum_{i=0}^{n-1} \left\{ \int_{x_{2i}}^{x_{2i+2}} f(x)\, dx - \frac{b-a}{6n} [f(x_{2i}) + 4f(x_{2i+1}) + f(x_{2i+2})] \right\} \right| = \\
&= \left| \sum_{i=0}^{n-1} -\frac{(b-a)^5}{90(2n)^5} \cdot f^{(4)}(\zeta_i) \right| \le \sum_{i=0}^{n-1} \frac{(b-a)^5}{2880 n^5} \cdot M = \frac{M(b-a)^5}{2880 n^4},
\end{aligned}$$

amit igazolni kellett.

□