ANALIZĂ MATEMATICĂ pentru examenul de licenţă, Specializarea Matematică, începând cu sesiunea iunie 2016

coordonator: Dorel I. Duca

Cuprins

CAPITOLUL 1

Şiruri şi serii de numere reale

1. Şiruri de numere reale

Noţiunea de şir este una din noţiunile fundamentale ale analizei matematice. În acest capitol prezentăm noţiunile de şir, şir care are limită, şir convergent, şir divergent.

2. Definiţia şirului de numere reale

Fie m un număr natural fixat şi

$$\mathbb{N}_m = \{n \in \mathbb{N} : n \geq m\}.$$

Definiţia 1.2.1 *Se numeşte* ***şir de numere reale*** *orice funcţie* $f : \mathbb{N}_m \to \mathbb{R}$. $\Diamond$

Aşadar, şirul $f : \mathbb{N}_m \to \mathbb{R}$ ataşează fiecărui număr natural $n \geq m$, numărul real $f(n)$.

Notând, pentru fiecare număr natural $n \geq m$, pe $f(n)$ cu x_n, şirul de numere reale definit de funcţia f se notează în unul din următoarele moduri:

$$(x_n)_{n \in \mathbb{N}_m}, \quad \text{sau} \quad (x_n)_{n \geq m}, \quad \text{sau} \quad (x_m, x_{m+1}, \cdots, x_n, \cdots)$$

sau, când nu este pericol de confuzie, simplu (x_n).

Dacă $(x_n)_{n \in \mathbb{N}_m}$ este un şir de numere reale, atunci numărul real x_n se numeşte **termenul de rang** n al şirului $(x_n)_{n \in \mathbb{N}_m}$ sau **termenul general** al şirului $(x_n)_{n \in \mathbb{N}_m}$.

Menţionăm că termenii unui şir se pot nota cu orice literă în locul literei x. De asemenea indicii termenilor unui şir nu trebuie notaţi neapărat cu $m, m+1, ...$ Se poate utiliza şi o altă notaţie, dar ea trebuie să fie în aşa fel aleasă încât întotdeauna să fie clar care este primul termen al şirului, care este al doilea termen al şirului ş.a.m.d., care este termenul de rang n al şirului.

Dacă $(x_n)_{n \in \mathbb{N}_m}$ este un şir de numere reale, atunci mulţimea

$$\{x \in \mathbb{R} : \text{există } n \in \mathbb{N}_m \text{ astfel încât } x = x_n\} = \{x_n : \ n \in \mathbb{N}_m\}$$

se numeşte **mulţimea termenilor şirului** (x_n).

Aşa cum este important de făcut distincţie între o funcţie şi mulţimea valorilor funcţiei, este important de făcut distincţie între un şir $(x_n)_{n \in \mathbb{N}_m}$ şi mulţimea termenilor şirului

$$\{x \in \mathbb{R} : \text{există } n \in \mathbb{N}_m \text{ aşa încât } x = x_n\} = \{x_n : \ n \in \mathbb{N}_m\},$$

deci

$$(x_n)_{n\in\mathbb{N}_m} \neq \{x \in \mathbb{R} : \text{există } n \in \mathbb{N}_m \text{ aşa încât } x = x_n\}.$$

3. Limita unui şir de numere reale, unicitatea limitei

În cele ce urmează vom defini noţiunea de limită a unui şir de numere reale şi vom da câteva exemple.

Definiţia 1.3.1 *Fie $(x_n)_{n\in\mathbb{N}_m}$ un şir de numere reale. Spunem că şirul (x_n)* ***are limită*** *(în $\overline{\mathbb{R}}$) dacă există un element $x \in \overline{\mathbb{R}}$ cu proprietatea că pentru fiecare vecinătate V a lui x există un număr natural $n_V \geq m$ astfel încât, oricare ar fi numărul natural $n \geq n_V$, avem $x_n \in V$.* $\Diamond$

Exemplul 1.3.2 Şirul $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ cu termenul general $x_n = 0$, $(n \in \mathbb{N})$ are limită deoarece elementul $x = 0 \in \mathbb{R}$ are proprietatea că pentru fiecare vecinătate V a lui $x = 0$, luând $n_V := 1$ avem că $x_n \in V$, oricare ar fi numărul natural $n \geq n_V = 1$. $\Diamond$

O formulare echivalentă a definiţiei 1.3.1 este dată în teorema următoare:

Teorema 1.3.3 *Fie $(x_n)_{n\in\mathbb{N}_m}$ un şir de numere reale. Şirul (x_n) are limită (în $\overline{\mathbb{R}}$) dacă şi numai dacă există un element $x \in \overline{\mathbb{R}}$ cu proprietatea că în afara fiecărei vecinătăţi V a lui x se află cel mult un număr finit de termeni ai şirului (x_n).* $\Diamond$

Vom arăta în cele ce urmează că limita unui şir, dacă există, este unică.

Teorema 1.3.4 (*teorema de unicitate a limitei*) *Dacă $(x_n)_{n\in\mathbb{N}_m}$ este un şir de numere reale, atunci există cel mult un element $x \in \overline{\mathbb{R}}$ cu proprietatea că pentru fiecare vecinătate V a lui x există un număr natural $n_V \geq m$ astfel încât, oricare ar fi numărul natural $n \geq n_V$, avem $x_n \in V$.*

Demonstraţie. Presupunem, prin absurd, că ar exista două elemente $x, y \in \overline{\mathbb{R}}$, $x \neq y$ care satisfac cerinţele teoremei. Din $x \neq y$ deducem că există o vecinătate V a punctului x şi o vecinătate W a punctului y astfel încât $V \cap W = \emptyset$.

Mulţimea V fiind vecinătate a punctului x, există un număr natural $n_V \geq m$ astfel încât

$$x_n \in V, \text{ oricare ar fi numărul natural } n \geq n_V. \tag{1.3.1}$$

Analog, W fiind vecinătate a punctului y, există un număr natural $n_W \geq m$ astfel încât

$$x_n \in W, \text{ oricare ar fi numărul natural } n \geq n_W. \tag{1.3.2}$$

Acum, din (1.3.1) şi (1.3.2), deducem că

$$x_n \in V \cap W = \emptyset, \text{ oricare ar fi numărul natural } n \geq \max\{n_V, n_W\},$$

ceea ce este absurd.■

Prin urmare, fiind dat un şir $(x_n)_{n\in\mathbb{N}_m}$, de numere reale, putem să avem una şi numai una din următoarele două situaţii:

i) Există un element $x \in \overline{\mathbb{R}}$ cu proprietatea că pentru fiecare vecinătate V a lui x există un număr natural $n_V \geq m$ astfel încât, oricare ar fi numărul natural $n \geq n_V$, avem $x_n \in V$. În acest caz, în baza teoremei 1.3.4, elementul x este unic. Elementul x se va nota

$$\lim_{n\to\infty} x_n \quad \text{(se citeşte: } \textit{limită din } x_n \textit{ atunci când } n \textit{ tinde către } +\infty\text{)}$$

şi se va numi **limita şirului** (x_n). Dacă $x \in \overline{\mathbb{R}}$ este limita şirului (x_n), atunci se mai spune că **şirul** (x_n) **are limita** x sau că şirul (x_n) **converge în** $\overline{\mathbb{R}}$ **către** x.

ii) Nu există nici un element $x \in \overline{\mathbb{R}}$ cu proprietatea că pentru fiecare vecinătate V a lui x există un număr natural $n_V \geq m$ astfel încât, oricare ar fi numărul natural $n \geq n_V$, avem $x_n \in V$. În acest caz spunem că şirul (x_n) **nu are limită**, în $\overline{\mathbb{R}}$ sau că şirul (x_n) este **divergent în** $\overline{\mathbb{R}}$.

Aşadar şirurile de numere reale care au limită $\left(\text{în } \overline{\mathbb{R}}\right)$ se împart în şiruri convergente şi şiruri divergente.

Definiţia 1.3.5 *Fie $(x_n)_{n\in\mathbb{N}_m}$ un şir de numere reale. Spunem că şirul (x_n) este* ***convergent*** *dacă are limită şi limita este un număr real.* $\Diamond$

Din cele de mai sus rezultă imediat următoarea teoremă.

Teorema 1.3.6 *Şirul de numere reale $(x_n)_{n\in\mathbb{N}_m}$ este convergent dacă şi numai dacă există un număr real x cu proprietatea că pentru fiecare vecinătate V a lui x există un număr natural $n_V \geq m$ astfel încât, oricare ar fi numărul natural $n \geq n_V$, avem $x_n \in V$.* $\Diamond$

Prin urmare, fiind dat un şir $(x_n)_{n\in\mathbb{N}_m}$ de numere reale putem avea următoarele situaţii:

1) Şirul $(x_n)_{n\in\mathbb{N}_m}$ are limita $x \in \mathbb{R}$; în acest caz spunem că şirul (x_n) *converge către* x.

2) Şirul $(x_n)_{n\in\mathbb{N}_m}$ are limita $+\infty$ sau $-\infty$; în acest caz spunem că şirul (x_n) *are limită infinită.*

3) Şirul $(x_n)_{n\in\mathbb{N}_m}$ nu are limită; în acest caz spunem că şirul (x_n) este *divergent în* $\overline{\mathbb{R}}$.

Un şir de numere reale care are limită, finită sau infinită, se mai numeşte *convergent în* $\overline{\mathbb{R}}$.

Despre un şir de numere reale care are limită infinită spunem că este *divergent în* $\mathbb{R}$, dar *convergent în* $\overline{\mathbb{R}}$.

Încheiem acest paragraf observând că studiul unui şir comportă două probleme:

1) Stabilirea naturii şirului, adică a faptului că şirul este convergent sau divergent.

2) În cazul în care şirul este convergent, determinarea limitei şirului.

Dacă pentru rezolvarea primei probleme dispunem de criterii de convergenţă şi divergenţă, pentru rezolvarea celei de a doua probleme nu dispunem de metode generale de determinare a limitei oricărui şir. Determinarea limitei unui şir ţine seama de particularităţile şirului.

4. Caracterizări ale limitei unui şir de numere reale

În cele ce urmează vom da formulări echivalente ale definiţiei limitei unui şir de numere reale.

Teorema 1.4.1 (*teorema de caracterizare cu* ε *a limitei finite*) *Fie* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}_m}$ *un şir de numere reale şi* $x \in \mathbb{R}$. *Şirul* (x_n) *converge către* x *dacă şi numai dacă pentru fiecare număr real* $\varepsilon > 0$, *există un număr natural* $n_\varepsilon \geq m$ *astfel încât, pentru orice număr natural* $n \geq n_\varepsilon$, *este satisfăcută inegalitatea:*

$$|x_n - x| < \varepsilon.$$

Demonstraţie. *Necesitatea.* Presupunem că şirul (x_n) este convergent către x şi fie $\varepsilon > 0$. Deoarece intervalul $V =]x-\varepsilon, x+\varepsilon[$ este o vecinătate a lui x deducem că există un număr natural $n_V \geq m$ astfel încât $x_n \in]x-\varepsilon, x+\varepsilon[$, oricare ar fi numărul natural $n \geq n_V$. Întrucât relaţia $x_n \in]x-\varepsilon, x+\varepsilon[$ este adevărată dacă şi numai dacă relaţia $|x_n - x| < \varepsilon$ este adevărată, obţinem că pentru fiecare număr real $\varepsilon > 0$ există un număr natural $n_\varepsilon := n_V$ astfel încât pentru orice număr natural $n \geq n_\varepsilon$ avem $|x_n - x| < \varepsilon$.

Suficienţa. Fie V o vecinătate a lui x. Atunci există un număr real $\varepsilon > 0$ astfel încât $]x-\varepsilon, x+\varepsilon[\subseteq V$. Din $\varepsilon > 0$, în baza ipotezei, deducem că există un număr natural $n_\varepsilon \geq m$ astfel încât pentru orice număr natural $n \geq n_\varepsilon$ avem $|x_n - x| < \varepsilon$. Deoarece $|x_n - x| < \varepsilon$, oricare ar fi numărul natural $n \geq n_V$, este echivalent cu $x_n \in]x-\varepsilon, x+\varepsilon[$, oricare ar fi numărul natural $n \geq n_\varepsilon$ şi deoarece $]x-\varepsilon, x+\varepsilon[\subseteq V$ rezultă că $x_n \in V$, oricare ar fi numărul natural $n \geq n_\varepsilon$. Aşadar numărul real x are proprietatea că pentru fiecare vecinătate V a lui x există un număr natural $n_V := n_\varepsilon$ astfel încât oricare ar fi numărul natural $n \geq n_V$ avem $x_n \in V$. Prin urmare, şirul (x_n) este convergent către x. Teorema este demonstrată. ■

Exemplul 1.4.2 Fie c un număr real. Atunci şirul $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ cu termenul general $x_n = c$, $(n \in \mathbb{N})$ converge către c, adică

$$\lim_{n\to\infty} c = c.$$

Soluţie. Să observăm că oricare ar fi $\varepsilon > 0$ avem

$$|x_n - c| = |c - c| = 0 < \varepsilon, \text{ oricare ar fi numărul natural } n.$$

Prin urmare pentru fiecare număr real $\varepsilon > 0$, există un număr natural $n_\varepsilon = 1$ cu proprietatea că

$$|x_n - c| < \varepsilon, \text{ oricare ar fi numărul natural } n \geq n_\varepsilon,$$

şi deci, în baza teoremei de caracterizare cu ε a limitei finite şirul constant (c) converge către c. ■

Din teorema 1.4.1 deducem imediat următoarea afirmaţie:

Teorema 1.4.3 *Fie $(x_n)_{n\in\mathbb{N}_m}$ un şir de numere reale şi $x \in \mathbb{R}$. Şirul (x_n) converge către x dacă şi numai dacă şirul $(x_n - x)_{n\in\mathbb{N}_m}$ converge către* 0. ◊

În formalismul matematic acceptat, teorema anterioară o putem sumariza astfel

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x \quad \Longleftrightarrow \quad \lim_{n\to\infty} (x_n - x) = 0.$$

Ţinând seama de modul cum au fost definite vecinătăţile lui $+\infty$ şi $-\infty$, se poate demonstra următoarea teoremă de caracterizare a limitelor $+\infty$ şi $-\infty$.

Teorema 1.4.4 (*teorema de caracterizare cu ε a limitelor $+\infty$ şi $-\infty$*) *Fie $(x_n)_{n\in\mathbb{N}_m}$ un şir de numere reale.*

1^0 *Şirul (x_n) are limita $+\infty$ dacă şi numai dacă oricare ar fi numărul real $\varepsilon > 0$ există un număr natural $n_\varepsilon \geq m$ astfel încât este satisfăcută inegalitatea:*

$$x_n > \varepsilon, \text{ oricare ar fi numărul natural } n \geq n_\varepsilon.$$

2^0 *Şirul (x_n) are limita $-\infty$ dacă şi numai dacă oricare ar fi numărul real $\varepsilon > 0$ există un număr natural $n_\varepsilon \geq m$ astfel încât este satisfăcută inegalitatea:*

$$x_n < -\varepsilon, \text{ oricare ar fi numărul natural } n \geq n_\varepsilon.$$

Demonstraţie. 1^0 *Necesitatea.* Presupunem că şirul (x_n) are limita $+\infty$ şi fie $\varepsilon > 0$. Deoarece mulţimea $V =]\varepsilon, +\infty]$ este vecinătate a lui $+\infty$, iar şirul (x_n) are limita $+\infty$, rezultă că există un număr natural $n_V \geq m$ astfel încât $x_n \in V$, oricare ar fi numărul natural $n \geq n_V$. Întrucât relaţia $x_n \in V$ este adevărată dacă şi numai dacă $x_n > \varepsilon$, obţinem că pentru fiecare $\varepsilon > 0$, există un număr natural $n_\varepsilon := n_V$ astfel încât oricare ar fi numărul natural $n \geq n_\varepsilon$ avem $x_n > \varepsilon$.

Suficienţa. Fie V o vecinătate a lui $+\infty$; atunci există un număr real $r > 0$ astfel încât $]r, +\infty] \subseteq V$. Alegem $\varepsilon := r$. În baza ipotezei, va exista un număr natural $n_\varepsilon \geq m$ cu proprietatea că oricare ar fi numărul natural $n \geq n_\varepsilon$ avem $x_n > \varepsilon$. Deoarece $x_n > \varepsilon = r$ este echivalent cu $x_n \in]r, +\infty]$ şi deoarece $]r, +\infty] \subseteq V$, rezultă că $x_n \in V$, oricare ar fi numărul natural $n \geq n_V := n_\varepsilon$. Prin urmare şirul (x_n) are limita $+\infty$.

Afirmaţia 2^0 se demonstrează analog. ■

5. Operaţii cu şiruri convergente

În cele ce urmează vom stabili legătura dintre operaţiile uzuale ce se efectuează cu şiruri (adunarea şirurilor, înmulţirea cu scalari a şirurilor, înmulţirea şirurilor etc.) şi limitele acestora. Vom vedea că limita "comută" cu aceste operaţii.

Lema 1.5.1 1^0 *Dacă* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *şi* $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *sunt şiruri convergente către* 0, *atunci şirul sumă* $(x_n+y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *este convergent către* 0.

2^0 *Dacă* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *este un şir convergent către* 0 *şi* a *este un număr real, atunci şirul* $(ax_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *este convergent către* 0.

3^0 *Dacă* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *şi* $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *sunt şiruri convergente către* 0 *şi* a *şi* b *sunt două numere reale, atunci şirul* $(ax_n+by_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *este convergent către* 0.

4^0 *Dacă* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *şi* $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *sunt şiruri convergente către* 0, *atunci şirul* $(x_ny_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *este convergent către* 0.

5^0 *Dacă* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *este un şir convergent către* 0 *şi* $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *este un şir mărginit, atunci şirul* $(x_ny_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *este convergent către* 0.

Demonstraţie. 1^0 Folosim teorema de caracterizare cu ε a limitei finite. Fie $\varepsilon>0$. Din faptul că şirul (x_n) converge către 0 deducem că există un număr natural n'_ε astfel încât

$$|x_n|<\frac{\varepsilon}{2},\ \text{oricare ar fi numărul natural } n\geq n'_\varepsilon.$$

Analog, din faptul că şirul (y_n) converge către 0, deducem că există un număr natural n''_ε astfel încât

$$|y_n|<\frac{\varepsilon}{2},\ \text{oricare ar fi numărul natural } n\geq n''_\varepsilon.$$

Atunci pentru orice număr natural $n\geq\max\{n'_\varepsilon,\, n''_\varepsilon\}$ avem

$$|x_n|<\frac{\varepsilon}{2}\quad\text{şi}\quad|y_n|<\frac{\varepsilon}{2}$$

şi deci

$$|(x_n+y_n)-0|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon.$$

Aşadar, pentru fiecare număr real $\varepsilon>0$ există un număr natural n_ε cu proprietatea că pentru orice număr natural $n\geq n_\varepsilon$ avem $|(x_n+y_n)-0|<\varepsilon$, ceea ce înseamnă că şirul (x_n+y_n) converge către 0.

2^0 Folosim teorema de caracterizare cu ε a limitei finite. Fie $\varepsilon>0$. Din faptul că şirul (x_n) converge către 0 deducem că există un număr natural n_ε astfel încât

$$|x_n|<\frac{\varepsilon}{|a|+1},\ \text{oricare ar fi numărul natural } n\geq n_\varepsilon.$$

Atunci

$$|ax_n|=|a|\,|x_n|\leq\frac{|a|}{|a|+1}\varepsilon<\varepsilon,\ \text{oricare ar fi numărul natural } n\geq n_\varepsilon.$$

Prin urmare, pentru fiecare număr real $\varepsilon > 0$ există un număr natural n_ε cu proprietatea că pentru orice număr natural $n \geq n_\varepsilon$ avem $|ax_n - 0| < \varepsilon$, ceea ce înseamnă că şirul (ax_n) converge către 0.

Afirmaţia 3^0 urmează imediat din afirmaţiile 1^0 şi 2^0.

4^0 Folosim teorema de caracterizare cu ε a limitei finite. Fie $\varepsilon > 0$. Din faptul că şirul (x_n) converge către 0 deducem că există un număr natural n'_ε astfel încât

$$|x_n| < \sqrt{\varepsilon}, \text{ oricare ar fi numărul natural } n \geq n'_\varepsilon.$$

Analog, din faptul că (y_n) converge către 0, deducem că există un număr natural n''_ε astfel încât

$$|y_n| < \sqrt{\varepsilon}, \text{ oricare ar fi numărul natural } n \geq n''_\varepsilon.$$

Atunci pentru orice număr natural $n \geq \max\{n'_\varepsilon, n''_\varepsilon\}$ avem

$$|x_n| < \sqrt{\varepsilon} \quad \text{şi} \quad |y_n| < \sqrt{\varepsilon},$$

şi deci

$$|x_n y_n - 0| = |x_n| \cdot |y_n| < \sqrt{\varepsilon} \cdot \sqrt{\varepsilon} = \varepsilon.$$

Aşadar, pentru fiecare număr real $\varepsilon > 0$ există un număr natural n_ε cu proprietatea că pentru orice număr natural $n \geq n_\varepsilon$ avem $|x_n y_n - 0| < \varepsilon$, ceea ce înseamnă că şirul $(x_n y_n)$ converge către 0.

5^0 Din faptul că şirul (y_n) este mărginit deducem că există un număr real $M > 0$ cu proprietatea că

$$|y_n| \leq M, \text{ oricare ar fi numărul natural } n.$$

Folosim teorema de caracterizare cu ε a limitei finite. Fie $\varepsilon > 0$. Din faptul că şirul (x_n) converge către 0 deducem că există un număr natural n_ε astfel încât

$$|x_n| < \frac{\varepsilon}{M}, \text{ oricare ar fi numărul natural } n \geq n_\varepsilon.$$

Atunci pentru orice număr natural $n \geq n_\varepsilon$, avem

$$|x_n y_n - 0| = |x_n| \cdot |y_n| < \frac{\varepsilon}{M} \cdot M = \varepsilon.$$

Aşadar, pentru fiecare număr real $\varepsilon > 0$ există un număr natural n_ε cu proprietatea că pentru orice număr natural $n \geq n_\varepsilon$ avem $|x_n y_n - 0| < \varepsilon$, ceea ce înseamnă că şirul $(x_n y_n)$ converge către 0. ■

Teorema 1.5.2 *Dacă şirurile $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ şi $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sunt convergente, atunci şirul sumă $(x_n + y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ este convergent şi*

$$\lim_{n\to\infty} (x_n + y_n) = \left(\lim_{n\to\infty} x_n\right) + \left(\lim_{n\to\infty} y_n\right).$$

(*Limita sumei este egală cu suma limitelor.*)

Demonstraţie. Fie $x \in \mathbb{R}$ limita şirului (x_n), $y \in \mathbb{R}$ limita şirului (y_n), $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ şirul cu termenul general

$$a_n = |x_n - x|, \ \ (n \in \mathbb{N})$$

şi $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ şirul cu termenul general

$$b_n = |y_n - y|\,, \quad (n \in \mathbb{N})\,.$$

Urmează că şirurile (a_n) şi (b_n) sunt convergente şi

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0 \quad \text{şi} \quad \lim_{n\to\infty} b_n = 0.$$

Pe de altă parte, pentru fiecare număr natural n, avem

$$\begin{aligned}|(x_n + y_n) - (x + y)| &= |(x_n - x) + (y_n - y)| \le |x_n - x| + |y_n - y| = \\ &= a_n + b_n.\end{aligned}$$

Conform lemei 1.5.1, avem că şirul $(a_n + b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ este convergent şi

$$\lim_{n\to\infty} (a_n + b_n) = 0.$$

În baza criteriului de existenţă a limitei finite, deducem că şirul sumă $(x_n + y_n)$ este convergent şi

$$\lim_{n\to\infty} (x_n + y_n) = x + y.$$

Teorema este demonstrată. ■

Teorema 1.5.3 *Dacă şirul $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ este convergent şi c este un număr real, atunci şirul $(cx_n)_{n\in\mathbb{N}}$ este convergent şi*

$$\lim_{n\to\infty} (cx_n) = c \cdot \left(\lim_{n\to\infty} x_n\right).$$

Demonstraţie. Fie $x \in \mathbb{R}$ limita şirului (x_n) şi $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ şirul cu termenul general $a_n = |x_n - x|\,,\ (n \in \mathbb{N})\,.$ Pentru fiecare număr natural n, avem

$$|cx_n - cx| = |c|\,|x_n - x| = |c| \cdot a_n$$

şi atunci, conform lemei 1.5.1, avem că şirul $(|c|\,a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ este convergent şi

$$\lim_{n\to\infty} (|c| \cdot a_n) = 0.$$

În baza criteriului de existenţă a limitei finite, deducem că şirul (cx_n) este convergent şi $\lim\limits_{n\to\infty} (cx_n) = cx$. Teorema este demonstrată. ■

Teorema 1.5.4 *Dacă şirurile $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ şi $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sunt convergente, atunci şirul produs $(x_n y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ este convergent şi*

$$\lim_{n\to\infty} (x_n y_n) = \left(\lim_{n\to\infty} x_n\right) \cdot \left(\lim_{n\to\infty} y_n\right).$$

(*Limita produsului este egală cu produsul limitelor.*)

Demonstraţie. Fie $x \in \mathbb{R}$ limita şirului $(x_n)\,,$ $y \in \mathbb{R}$ limita şirului $(y_n)\,,$ $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ şirul cu termenul general

$$a_n = |x_n - x|\,, (n \in \mathbb{N})$$

şi (b_n) şirul cu termenul general

$$b_n = |y_n - y|\,, (n \in \mathbb{N})\,.$$

Urmează că şirurile (a_n) şi (b_n) sunt convergente şi

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0 \quad \text{şi} \quad \lim_{n\to\infty} b_n = 0.$$

Şirul (y_n) fiind convergent este mărginit; prin urmare există un număr real $M > 0$ astfel încât să avem

$$|y_n| \le M, \text{ oricare ar fi numărul natural } n.$$

Atunci, pentru fiecare număr natural n, avem

$$\begin{aligned} |(x_n y_n) - (xy)| &= |x_n y_n - x y_n + x y_n - xy| \le |(x_n - x)\, y_n + x\,(y_n - y)| \le \\ &= |x_n - x|\,|y_n| + |x|\,|y_n - y| \le M\,|x_n - x| + |x|\,|y_n - y| \le \\ &\le M a_n + |x|\, b_n. \end{aligned}$$

Conform lemei 1.5.1, avem că şirul $(M a_n + |x|\, b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ este convergent şi

$$\lim_{n\to\infty} \ (M a_n + |x|\, b_n) = 0.$$

În baza criteriului de existenţă a limitei finite, deducem că şirul $(x_n y_n)$ este convergent şi

$$\lim_{n\to\infty} (x_n y_n) = xy.$$

Teorema este demonstrată.■

Teorema 1.5.5 *Fie $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ şi $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ două şiruri de numere reale. Dacă:*

(i) şirurile (x_n) şi (y_n) sunt convergente;

(ii) $\lim\limits_{n\to\infty} y_n \ne 0$,

(iii) $y_n \ne 0$, oricare ar fi numărul natural n,

atunci şirul $\left(\dfrac{x_n}{y_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ este convergent şi

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} x_n}{\lim\limits_{n\to\infty} y_n}.$$

(Limita câtului este egală cu câtul limitelor.)

Demonstraţie. Demonstraţia este similară teoremelor anterioare. ■

6. Operaţii cu şiruri care au limită. Nedeterminări

Dacă în cazul şirurilor convergente operaţia aritmetică asupra şirurilor "comută" cu limita (limita sumei este egală cu suma limitelor, limita produsului este egală cu produsul limitelor etc.), în cazul şirurilor care au limită această proprietate nu are loc în general. În paragraful de faţă se analizează condiţiile în care operaţiile aritmetice "comută" cu limita.

Teorema 1.6.1 *Fie $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ şi $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ şiruri de numere reale care au limită.*

1^0 *Dacă*

$$\lim_{n\to\infty} x_n \in \mathbb{R} \quad \text{şi} \quad \lim_{n\to\infty} y_n = +\infty,$$

atunci şirul $(x_n+y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ are limită şi

$$\lim_{n\to\infty}(x_n+y_n) = +\infty.$$

2^0 *Dacă*

$$\lim_{n\to\infty} x_n \in \mathbb{R} \quad \text{şi} \quad \lim_{n\to\infty} y_n = -\infty,$$

atunci şirul $(x_n+y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ are limită şi

$$\lim_{n\to\infty}(x_n+y_n) = -\infty.$$

3^0 *Dacă*

$$\lim_{n\to\infty} x_n = +\infty \quad \text{şi} \quad \lim_{n\to\infty} y_n = +\infty,$$

atunci şirul $(x_n+y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ are limită şi

$$\lim_{n\to\infty}(x_n+y_n) = +\infty.$$

4^0 *Dacă*

$$\lim_{n\to\infty} x_n = -\infty \quad \text{şi} \quad \lim_{n\to\infty} y_n = -\infty,$$

atunci şirul $(x_n+y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ are limită şi

$$\lim_{n\to\infty}(x_n+y_n) = -\infty.$$

Demonstraţie. Folosim teorema de caracterizare cu ε a limitei infinite (teorema 1.4.4). Fie $x = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$ şi $y = \lim\limits_{n\to\infty} y_n$.

1^0 Fie $\varepsilon > 0$. Din faptul că şirul (x_n) converge către $x \in \mathbb{R}$, deducem că există un număr natural n'_ε astfel încât

$$|x_n - x| < \varepsilon, \text{ oricare ar fi numărul natural } n \geq n'_\varepsilon,$$

sau echivalent

$$x - \varepsilon < x_n < x + \varepsilon, \text{ oricare ar fi numărul natural } n \geq n'_\varepsilon.$$

Deoarece $y = +\infty$ este limita şirului (y_n), există un număr natural n''_ε astfel încât

$$y_n > 2\varepsilon - x, \text{ oricare ar fi numărul natural } n \geq n''_\varepsilon.$$

Atunci, pentru orice număr natural $n \geq n_\varepsilon := \max\{n'_\varepsilon, n''_\varepsilon\}$, avem

$$x_n + y_n > (x - \varepsilon) + (2\varepsilon - x) = \varepsilon.$$

Aşadar, pentru fiecare număr real $\varepsilon > 0$ există un număr natural n_ε astfel încât

$$x_n + y_n > \varepsilon, \text{ oricare ar fi numărul natural } n \geq n_\varepsilon,$$

ceea ce ne spune că şirul $(x_n + y_n)$ are limita $+\infty$.

2^0 Fie $\varepsilon > 0$. Din faptul că şirul (x_n) converge către $x \in \mathbb{R}$, deducem că există un număr natural n'_ε astfel încât

$$|x_n - x| < \varepsilon, \text{ oricare ar fi numărul natural } n \geq n'_\varepsilon,$$

sau echivalent

$$x - \varepsilon < x_n < x + \varepsilon, \text{ oricare ar fi numărul natural } n \geq n'_\varepsilon.$$

Deoarece $y = -\infty$ este limita şirului (y_n), există un număr natural n''_ε astfel încât

$$y_n < -x - 2\varepsilon, \text{ oricare ar fi numărul natural } n \geq n''_\varepsilon.$$

Atunci, pentru orice număr natural $n \geq n_\varepsilon := \max\{n'_\varepsilon, n''_\varepsilon\}$, avem

$$x_n + y_n < (x + \varepsilon) + (-2\varepsilon - x) = -\varepsilon.$$

Aşadar, pentru fiecare număr real $\varepsilon > 0$ există un număr natural n_ε astfel încât

$$x_n + y_n < -\varepsilon, \text{ oricare ar fi numărul natural } n \geq n_\varepsilon,$$

ceea ce ne spune că şirul $(x_n + y_n)$ are limita $-\infty$.

3^0 Fie $\varepsilon > 0$. Din faptul că şirul (x_n) are limita $+\infty$, deducem că există un număr natural n'_ε astfel încât

$$x_n > \frac{\varepsilon}{2}, \text{ oricare ar fi numărul natural } n \geq n'_\varepsilon.$$

Deoarece $y = +\infty$ este limita şirului (y_n), există un număr natural n''_ε astfel încât

$$y_n > \frac{\varepsilon}{2}, \text{ oricare ar fi numărul natural } n \geq n''_\varepsilon.$$

Atunci, pentru orice număr natural $n \geq \max\{n'_\varepsilon, n''_\varepsilon\}$, avem

$$x_n + y_n > \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Prin urmare şirul $(x_n + y_n)$ are limita $+\infty$.

4^0 Fie $\varepsilon > 0$. Din faptul că şirul (x_n) are limita $-\infty$, deducem că există un număr natural n'_ε astfel încât

$$x_n < -\frac{\varepsilon}{2}, \text{ oricare ar fi numărul natural } n \geq n'_\varepsilon.$$

Deoarece $y = -\infty$ este limita şirului (y_n), există un număr natural n''_ε astfel încât

$$y_n < -\frac{\varepsilon}{2}, \text{ oricare ar fi numărul natural } n \geq n''_\varepsilon.$$

Atunci, pentru orice număr natural $n \geq \max\{n'_\varepsilon, n''_\varepsilon\}$, avem

$$x_n + y_n < -\frac{\varepsilon}{2} - \frac{\varepsilon}{2} = -\varepsilon.$$

Prin urmare şirul $(x_n + y_n)$ are limita $-\infty$. Teorema este demonstrată. ■

Observaţia 1.6.2 Am arătat că, pentru două şiruri convergente "*limita sumei este egală cu suma limitelor*". Pentru ca afirmaţia "*limita sumei este egală cu suma limitelor*" să fie adevărată şi în cazul a două şiruri care au limită, s-au adoptat convenţiile:

1^0 $x + (+\infty) = +\infty$, oricare ar fi $x \in \mathbb{R}$;
2^0 $x + (-\infty) = -\infty$, oricare ar fi $x \in \mathbb{R}$;
3^0 $(+\infty) + (+\infty) = +\infty$;
4^0 $(-\infty) + (-\infty) = -\infty$.

Nu se atribuie nici un sens pentru $(+\infty)+(-\infty)$, considerat caz exceptat la adunarea în $\overline{\mathbb{R}}$. ◊

Observaţia 1.6.3 Ori de câte ori avem de calculat limita unui şir de forma $(x_n + y_n)_{n\in\mathbb{N}}$, unde $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ este un şir cu limita $+\infty$ şi $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ este un şir cu limita $-\infty$, nu putem afirma nimic relativ la limita şirului $(x_n + y_n)$. Uneori şirul sumă $(x_n + y_n)$ are limită, alteori nu are limită. Printre altele, putem arăta că, oricare ar fi $x \in \overline{\mathbb{R}}$, există un şir (x_n) cu limita $+\infty$ şi un şir (y_n) cu limita $-\infty$ astfel încât şirul sumă $(x_n + y_n)$ să aibă limita x. De aceea se spune că suma $+\infty + (-\infty)$ **nu are sens** sau că operaţia $+\infty + (-\infty)$ **nu este definită**. Acest caz exceptat se numeşte "**cazul de nedeterminare** $\infty - \infty$". Existenţa sau neexistenţa limitei în cazul de nedeterminare $\infty - \infty$ se stabileşte ţinând seama de expresia concretă a termenilor şirurilor (x_n) şi (y_n). ◊

Teorema relativă la limita sumei a două şiruri convergente, împreună cu teorema relativă la limita sumei a două şiruri care au limită, ne permit formularea următoarei teoreme unitare relativă la limita sumei a două şiruri care au limită.

Teorema 1.6.4 *Fie $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ şi $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ şiruri care au limită. Dacă suma*

$$\left(\lim_{n\to\infty} x_n\right) + \left(\lim_{n\to\infty} y_n\right)$$

are sens (este definită) în $\overline{\mathbb{R}}$, atunci şirul $(x_n + y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ are limită şi

$$\lim_{n\to\infty}(x_n + y_n) = \left(\lim_{n\to\infty} x_n\right) + \left(\lim_{n\to\infty} y_n\right).$$

(*Limita sumei este egală cu suma limitelor.*) ◊

Teorema 1.6.5 *Fie c un număr real şi $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un şir care are limită infinită.*

1^0 *Dacă*

$$\lim_{n\to\infty} x_n = +\infty,$$

atunci şirul $(cx_n)_{n\in\mathbb{N}}$ are limită şi

$$\lim_{n\to\infty} (cx_n) = \begin{cases} +\infty, & \text{dacă } c > 0 \\ 0, & \text{dacă } c = 0 \\ -\infty, & \text{dacă } c < 0. \end{cases}$$

2^0 *Dacă*

$$\lim_{n\to\infty} x_n = -\infty,$$

atunci şirul $(cx_n)_{n\in\mathbb{N}}$ are limită şi

$$\lim_{n\to\infty} (cx_n) = \begin{cases} -\infty, & \text{dacă } c > 0 \\ 0, & \text{dacă } c = 0 \\ +\infty, & \text{dacă } c < 0. \end{cases}$$

Demonstraţie. 1^0 Folosim teorema de caracterizare cu ε.

Cazul $c > 0$. Fie $\varepsilon > 0$. Din faptul că $+\infty$ este limita şirului (x_n), există un număr natural n_ε astfel încât

$$x_n > \frac{\varepsilon}{c}, \text{ oricare ar fi numărul natural } n \geq n_\varepsilon.$$

Atunci

$$cx_n > \varepsilon, \text{ oricare ar fi numărul natural } n \geq n_\varepsilon.$$

Prin urmare şirul (cx_n) are limita $+\infty$.

Cazul $c = 0$. Sirul (cx_n) este şirul constant (0), care are limita 0.

Cazul $c < 0$. Fie $\varepsilon > 0$. Din faptul că $+\infty$ este limita şirului (x_n), există un număr natural n_ε astfel încât

$$x_n > \frac{\varepsilon}{-c}, \text{ oricare ar fi numărul natural } n \geq n_\varepsilon.$$

Atunci

$$cx_n < -\varepsilon, \text{ oricare ar fi numărul natural } n \geq n_\varepsilon.$$

Prin urmare şirul (cx_n) are limita $-\infty$.

Afirmaţia 2^0 se demonstrează similar. ■

Teorema 1.6.6 *Fie $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ şi $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ şiruri de numere reale care au limită.*

1^0 *Dacă*

$$\lim_{n\to\infty} x_n \in \mathbb{R}\backslash\{0\} \quad \text{şi} \quad \lim_{n\to\infty} y_n = +\infty,$$

atunci şirul $(x_n y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *are limită şi*

$$\lim_{n\to\infty}(x_n y_n) = \begin{cases} +\infty, & \textit{dacă } \lim\limits_{n\to\infty} x_n > 0 \\ -\infty, & \textit{dacă } \lim\limits_{n\to\infty} x_n < 0. \end{cases}$$

2^0 *Dacă*

$$\lim_{n\to\infty} x_n \in \mathbb{R}\backslash\{0\} \quad \textit{şi} \quad \lim_{n\to\infty} y_n = -\infty,$$

atunci şirul $(x_n y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *are limită şi*

$$\lim_{n\to\infty}(x_n y_n) = \begin{cases} -\infty, & \textit{dacă } \lim\limits_{n\to\infty} x_n > 0 \\ +\infty, & \textit{dacă } \lim\limits_{n\to\infty} x_n < 0. \end{cases}$$

3^0 *Dacă*

$$\lim_{n\to\infty} x_n = +\infty \quad \textit{şi} \quad \lim_{n\to\infty} y_n = +\infty,$$

atunci şirul $(x_n y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *are limită şi*

$$\lim_{n\to\infty}(x_n y_n) = +\infty.$$

4^0 *Dacă*

$$\lim_{n\to\infty} x_n = -\infty \quad \textit{şi} \quad \lim_{n\to\infty} y_n = -\infty,$$

atunci şirul $(x_n y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *are limită şi*

$$\lim_{n\to\infty}(x_n y_n) = +\infty.$$

5^0 *Dacă*

$$\lim_{n\to\infty} x_n = +\infty \quad \textit{şi} \quad \lim_{n\to\infty} y_n = -\infty,$$

atunci şirul $(x_n y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *are limită şi*

$$\lim_{n\to\infty}(x_n y_n) = -\infty.$$

Demonstraţie. Folosim teorema de caracterizare cu ε a limitei infinite. Fie $x = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$ şi $y = \lim\limits_{n\to\infty} y_n$.

1^0 *Cazul* $x > 0$. Fie $\varepsilon > 0$. Din faptul că şirul (x_n) converge către $x \in]0, +\infty[$, deducem că există un număr natural n'_ε astfel încât

$$x_n > \frac{x}{2}, \text{ oricare ar fi numărul natural } n \geq n'_\varepsilon.$$

Deoarece $y = +\infty$ este limita şirului (y_n), există un număr natural n''_ε astfel încât

$$y_n > \frac{2\varepsilon}{x}, \text{ oricare ar fi numărul natural } n \geq n''_\varepsilon.$$

Atunci, pentru orice număr natural $n \geq \max\{n'_\varepsilon, n''_\varepsilon\}$, avem

$$x_n y_n > \left(\frac{x}{2}\right) \cdot \left(\frac{2\varepsilon}{x}\right) = \varepsilon.$$

Prin urmare şirul $(x_n y_n)$ are limita $+\infty$.

Cazul $x < 0$. Fie $\varepsilon > 0$. Din faptul că şirul (x_n) converge către $x \in]-\infty, 0[$, deducem că există un număr natural n'_ε astfel încât

$$x_n < \frac{x}{2}, \text{ oricare ar fi numărul natural } n \geq n'_\varepsilon.$$

Deoarece $y = +\infty$ este limita şirului (y_n), există un număr natural n''_ε astfel încât

$$y_n > \frac{2\varepsilon}{-x}, \text{ oricare ar fi numărul natural } n \geq n''_\varepsilon.$$

Atunci, pentru orice număr natural $n \geq \max\{n'_\varepsilon, n''_\varepsilon\}$, avem

$$x_n y_n < \left(\frac{x}{2}\right) \cdot \left(\frac{2\varepsilon}{-x}\right) = -\varepsilon.$$

Prin urmare şirul $(x_n y_n)$ are limita $-\infty$.

2^0 Se demonstrează similar cazului 1^0.

3^0 Fie $\varepsilon > 0$. Din faptul că şirul (x_n) are limita $+\infty$, deducem că există un număr natural n'_ε astfel încât

$$x_n > \sqrt{\varepsilon}, \text{ oricare ar fi numărul natural } n \geq n'_\varepsilon.$$

Deoarece $y = +\infty$ este limita şirului (y_n), există un număr natural n''_ε astfel încât

$$y_n > \sqrt{\varepsilon}, \text{ oricare ar fi numărul natural } n \geq n''_\varepsilon.$$

Atunci, pentru orice număr natural $n \geq \max\{n'_\varepsilon, n''_\varepsilon\}$, avem

$$x_n y_n > \left(\sqrt{\varepsilon}\right)^2 = \varepsilon.$$

Prin urmare şirul $(x_n y_n)$ are limita $+\infty$.

4^0 Fie $\varepsilon > 0$. Din faptul că şirul (x_n) are limita $-\infty$, deducem că există un număr natural n'_ε astfel încât

$$x_n < -\sqrt{\varepsilon}, \text{ oricare ar fi numărul natural } n \geq n'_\varepsilon.$$

Deoarece $y = -\infty$ este limita şirului (y_n), există un număr natural n''_ε astfel încât

$$y_n < -\sqrt{\varepsilon}, \text{ oricare ar fi numărul natural } n \geq n''_\varepsilon.$$

Atunci, pentru orice număr natural $n \geq \max\{n'_\varepsilon, n''_\varepsilon\}$, avem

$$x_n y_n > \left(\sqrt{\varepsilon}\right)^2 = \varepsilon.$$

Prin urmare şirul $(x_n y_n)$ are limita $+\infty$.

5^0 Fie $\varepsilon > 0$. Din faptul că şirul (x_n) are limita $+\infty$, deducem că există un număr natural n'_ε astfel încât

$$x_n > \sqrt{\varepsilon}, \text{ oricare ar fi numărul natural } n \geq n'_\varepsilon.$$

Deoarece $y = -\infty$ este limita şirului (y_n), există un număr natural n''_ε astfel încât

$$y_n < -\sqrt{\varepsilon}, \text{ oricare ar fi numărul natural } n \geq n''_\varepsilon.$$

Atunci, pentru orice număr natural $n \geq \max\{n'_\varepsilon, n''_\varepsilon\}$, avem

$$x_n y_n < -\left(\sqrt{\varepsilon}\right)^2 = -\varepsilon.$$

Prin urmare şirul $(x_n y_n)$ are limita $-\infty$. Teorema este demonstrată. ■

Observaţia 1.6.7 Am arătat că, pentru două şiruri convergente ”*limita produsului este egală cu produsul limitelor*”. Pentru ca afirmaţia ”*limita produsului este egală cu produsul limitelor*” să fie adevărată şi în cazul a două şiruri care au limită, s-au adoptat convenţiile:

1^0 $x \cdot (+\infty) = \begin{cases} +\infty, & \text{dacă } x > 0 \\ -\infty, & \text{dacă } x < 0; \end{cases}$, $x \in \mathbb{R}$,

2^0 $x \cdot (-\infty) = \begin{cases} -\infty, & \text{dacă } x > 0 \\ +\infty, & \text{dacă } x < 0; \end{cases}$, $x \in \mathbb{R}$,

3^0 $(+\infty) \cdot (+\infty) = +\infty$,
4^0 $(-\infty) \cdot (-\infty) = +\infty$,
5^0 $(+\infty) \cdot (-\infty) = -\infty$; $(-\infty) \cdot (+\infty) = -\infty$.

Nu se atribuie nici un sens pentru $0 \cdot (+\infty)$ şi $0 \cdot (-\infty)$, considerate cazuri exceptate la înmulţirea în $\overline{\mathbb{R}}$. ◊

Observaţia 1.6.8 Ori de câte ori avem de calculat limita unui şir de forma $(x_n y_n)_{n \in \mathbb{N}}$, unde $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ este un şir cu limita 0 şi $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ este un şir cu limita $+\infty$ (respectiv $-\infty$), nu putem afirma nimic relativ la limita şirului $(x_n y_n)$. Uneori şirul produs $(x_n y_n)$ are limită, alteori nu are limită. Printre altele, putem arăta că, oricare ar fi $x \in \overline{\mathbb{R}}$, există un şir (x_n) cu limita 0 şi un şir (y_n) cu limita $+\infty$ (respectiv $-\infty$) astfel încât şirul produs $(x_n y_n)$ să aibă limita x. De aceea se spune că produsele $0 \cdot (+\infty)$ şi $0 \cdot (-\infty)$ **nu au sens** sau că operaţiile $0 \cdot (+\infty)$ şi $0 \cdot (-\infty)$ **nu sunt definite**. Aceste cazuri exceptate formează aşa numitul ”**caz de nedeterminare** $0 \cdot \infty$”. Existenţa sau neexistenţa limitei în cazul de nedeterminare $0 \cdot \infty$ se stabileşte ţinând seama de expresia concretă a termenilor şirurilor (x_n) şi (y_n). ◊

Afirmaţia următoare se referă la limita câtului.

Teorema 1.6.9 *Fie $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ şi $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ şiruri de numere reale care au limită astfel încât*

$$y_n \neq 0, \text{ oricare ar fi } n \in \mathbb{N}.$$

1^0 *Dacă*

$$\lim_{n\to\infty} x_n \in \mathbb{R} \quad \text{şi} \quad \lim_{n\to\infty} y_n = +\infty,$$

atunci şirul $\left(\frac{x_n}{y_n}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ *are limită şi*

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{x_n}{y_n}\right) = 0.$$

2^0 *Dacă*

$$\lim_{n\to\infty} x_n \in \mathbb{R} \quad \textit{şi} \quad \lim_{n\to\infty} y_n = -\infty,$$

atunci şirul $\left(\frac{x_n}{y_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ *are limită şi*

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{x_n}{y_n}\right) = 0.$$

3^0 *Dacă*

$$\lim_{n\to\infty} x_n = +\infty \quad \textit{şi} \quad \lim_{n\to\infty} y_n \in \mathbb{R}\setminus\{0\},$$

atunci şirul $\left(\frac{x_n}{y_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ *are limită şi*

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{x_n}{y_n}\right) = \begin{cases} +\infty, & \textit{dacă} \ \lim\limits_{n\to\infty} y_n > 0 \\ -\infty, & \textit{dacă} \ \lim\limits_{n\to\infty} y_n < 0. \end{cases}$$

4^0 *Dacă*

$$\lim_{n\to\infty} x_n = -\infty \quad \textit{şi} \quad \lim_{n\to\infty} y_n \in \mathbb{R}\setminus\{0\},$$

atunci şirul $\left(\frac{x_n}{y_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ *are limită şi*

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{x_n}{y_n}\right) = \begin{cases} -\infty, & \textit{dacă} \ \lim\limits_{n\to\infty} y_n > 0 \\ +\infty, & \textit{dacă} \ \lim\limits_{n\to\infty} y_n < 0. \end{cases}$$

Demonstraţie. Folosim teorema de caracterizare cu ε a limitei. Fie $x = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$ şi $y = \lim\limits_{n\to\infty} y_n$.

1^0 Fie $\varepsilon > 0$. Şirul (x_n) fiind convergent este mărginit; prin urmare există $M > 0$ astfel încât

$$|x_n| \le M, \text{ oricare ar fi } n \in \mathbb{N}.$$

Deoarece $y = +\infty$ este limita şirului (y_n), există un număr natural n_ε astfel încât

$$y_n > \frac{M}{\varepsilon}, \text{ oricare ar fi numărul natural } n \ge n_\varepsilon.$$

Atunci, pentru orice număr natural $n \ge n_\varepsilon$, avem

$$\left|\frac{x_n}{y_n} - 0\right| = \frac{|x_n|}{|y_n|} < \frac{M\varepsilon}{M} = \varepsilon.$$

Prin urmare, pentru orice $\varepsilon > 0$ există un număr natural n_ε cu proprietatea că

$$\left|\frac{x_n}{y_n} - 0\right| < \varepsilon, \text{ oricare ar fi numărul natural } n \ge n_\varepsilon.$$

În consecinţă şirul (x_n/y_n) are limita 0.

2^0 se demonstrează similar.

3^0 Presupunem $y > 0$ şi fie $\varepsilon > 0$. Deoarece $x = +\infty$ este limita şirului (x_n), există un număr natural n'_ε astfel încât

$$x_n > \varepsilon\,(y + \varepsilon)\,, \text{ oricare ar fi numărul natural } n \geq n'_\varepsilon.$$

Pe de altă parte, y fiind limita şirului (y_n) există un număr natural n''_ε cu proprietatea că

$$|y_n - y| < \varepsilon, \text{ oricare ar fi numărul natural } n \geq n''_\varepsilon,$$

sau echivalent

$$y - \varepsilon < y_n < y + \varepsilon, \text{ oricare ar fi numărul natural } n \geq n''_\varepsilon.$$

Atunci, pentru orice număr natural $n \geq n_\varepsilon := \max\{n'_\varepsilon, n''_\varepsilon\}$, avem

$$\frac{x_n}{y_n} > \frac{\varepsilon\,(y+\varepsilon)}{y+\varepsilon} = \varepsilon.$$

Prin urmare, pentru orice $\varepsilon > 0$ există un număr natural n_ε cu proprietatea că

$$\frac{x_n}{y_n} > \varepsilon, \text{ oricare ar fi numărul natural } n \geq n_\varepsilon.$$

În consecinţă şirul (x_n/y_n) are limita $+\infty$.

4^0 se demonstrează similar. ■

Observaţia 1.6.10 Am arătat că, pentru două şiruri convergente "*limita câtului, dacă numitorul nu are limita zero, este egală cu câtul limitelor*". Pentru ca afirmaţia "*limita câtului, dacă numitorul nu are limita zero, este egală cu câtul limitelor*" să fie adevărată şi în cazul a două şiruri care au limită, s-au adoptat convenţiile:

1^0 $\dfrac{x}{+\infty} = \dfrac{x}{-\infty} = 0$, oricare ar fi $x \in \mathbb{R}$.

2^0 $\dfrac{+\infty}{x} = \begin{cases} +\infty, & \text{dacă } x > 0 \\ -\infty, & \text{dacă } x < 0; \end{cases}$, $x \in \mathbb{R}$;

3^0 $\dfrac{-\infty}{x} = \begin{cases} -\infty, & \text{dacă } x > 0 \\ +\infty, & \text{dacă } x < 0; \end{cases}$, $x \in \mathbb{R}$.

Nu se atribuie nici un sens pentru

$$\frac{x}{0} \text{ cu } x \in \mathbb{R},\ \frac{+\infty}{+\infty},\ \frac{+\infty}{-\infty},\ \frac{-\infty}{+\infty},\ \frac{-\infty}{-\infty},$$

considerate cazuri exceptate la împărţirea în $\overline{\mathbb{R}}$. ♢

Observaţia 1.6.11 Ori de câte ori avem de calculat limita unui şir de forma $\left(\frac{x_n}{y_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$, unde $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ este un şir cu limita $+\infty$ (sau $-\infty$) şi $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ este un şir cu limita $+\infty$ (sau $-\infty$), nu putem afirma nimic relativ la limita şirului $\left(\frac{x_n}{y_n}\right)$. Uneori şirul cât $\left(\frac{x_n}{y_n}\right)$ are limită, alteori nu are limită. Printre altele, putem arăta că oricare ar fi $x \in [0, +\infty]$, există un şir (x_n) cu limita

$+\infty$ şi un şir (y_n) cu limita $+\infty$, astfel încât şirul cât $\left(\frac{x_n}{y_n}\right)$ să aibă limita x. De aceea se spune că operaţiile

$$\frac{+\infty}{+\infty}, \ \frac{-\infty}{+\infty}, \ \frac{+\infty}{-\infty} \text{ şi } \frac{-\infty}{+\infty},$$

nu au sens sau că **nu sunt definite**. Aceste cazuri exceptate formează aşa numitul "**caz de nedeterminare** $\frac{\infty}{\infty}$". Existenţa sau neexistenţa limitei în cazul de nedeterminare $\frac{\infty}{\infty}$ se stabileşte ţinând seama de expresia concretă a termenilor şirurilor (x_n) şi (y_n). $\Diamond$

Observaţia 1.6.12 Ori de câte ori avem de calculat limita unui şir de forma $\left(\frac{x_n}{y_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$, unde $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ este un şir cu limita 0 şi $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ este un şir cu limita 0, nu putem afirma nimic relativ la limita şirului $\left(\frac{x_n}{y_n}\right)$. Uneori şirul cât $\left(\frac{x_n}{y_n}\right)$ are limită, alteori nu are limită. Printre altele, putem arăta că, oricare ar fi $x \in \overline{\mathbb{R}}$, există un şir (x_n) cu limita 0 şi un şir (y_n) cu limita 0, astfel încât şirul cât $\left(\frac{x_n}{y_n}\right)$ să aibă limita x. De aceea se spune că operaţia $\frac{0}{0}$, **nu are sens** sau că **nu este definită**. Acest caz exceptat formează aşa numitul "**caz de nedeterminare** $\frac{0}{0}$". Existenţa sau neexistenţa limitei în cazul de nedeterminare $\frac{0}{0}$ se stabileşte ţinând seama de expresia concretă a termenilor şirurilor (x_n) şi (y_n). $\Diamond$

Teoremele relative la limita produsului şi limita câtului a două şiruri care au limită, ne permit formularea următoarei teoreme unitare relativă la limita câtului a două şiruri care au limită.

Teorema 1.6.13 *Fie $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ şi $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ şiruri de numere reale care au limită. Dacă $y_n \neq 0$, oricare ar fi numărul natural n, şi dacă raportul*

$$\frac{\lim\limits_{n\to\infty} x_n}{\lim\limits_{n\to\infty} y_n}$$

are sens (este definit) în $\overline{\mathbb{R}}$, atunci şirul $(\frac{x_n}{y_n})_{n\in\mathbb{N}}$ are limită şi

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_n}{y_n} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} x_n}{\lim\limits_{n\to\infty} y_n}.$$

(*Limita raportului este egală cu raportul limitelor.*) $\Diamond$

Teorema 1.6.14 *Fie $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ şi $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ şiruri de numere reale care au limită astfel încât*

$$y_n \neq 0, \ \text{oricare ar fi } n \in \mathbb{N}.$$

1^0 *Dacă*

$$\lim_{n\to\infty} x_n = +\infty \ \text{ şi } \ \lim_{n\to\infty} y_n = 0,$$

şi

$$y_n > 0, \text{ oricare ar fi } n \in \mathbb{N},$$

atunci şirul $\left(\frac{x_n}{y_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ *are limită şi*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = +\infty.$$

2^0 *Dacă*

$$\lim_{n\to\infty} x_n = +\infty \quad \text{şi} \quad \lim_{n\to\infty} y_n = 0,$$

şi

$$y_n < 0, \text{ oricare ar fi } n \in \mathbb{N},$$

atunci şirul $\left(\frac{x_n}{y_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ *are limită şi*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = -\infty.$$

3^0 *Dacă*

$$\lim_{n\to\infty} x_n = -\infty \quad \text{şi} \quad \lim_{n\to\infty} y_n = 0,$$

şi

$$y_n > 0, \text{ oricare ar fi } n \in \mathbb{N},$$

atunci şirul $\left(\frac{x_n}{y_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ *are limită şi*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = -\infty.$$

4^0 *Dacă*

$$\lim_{n\to\infty} x_n = -\infty \quad \text{şi} \quad \lim_{n\to\infty} y_n = 0,$$

şi

$$y_n < 0, \text{ oricare ar fi } n \in \mathbb{N},$$

atunci şirul $\left(\frac{x_n}{y_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ *are limită şi*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = +\infty.$$

Demonstraţie. 1^0 Fie $\varepsilon > 0$. Deoarece $x = +\infty$ este limita şirului (x_n) există un număr natural n'_ε astfel încât

$$x_n > \varepsilon^2, \text{ oricare ar fi numărul natural } n \geq n'_\varepsilon.$$

Pe de altă parte, din faptul că $y = 0$ este limita şirului (y_n) există un număr natural n''_ε cu proprietatea că

$$|y_n - 0| < \varepsilon, \text{ oricare ar fi numărul natural } n \geq n''_\varepsilon,$$

sau echivalent

$$\frac{1}{y_n} > \frac{1}{\varepsilon}, \text{ oricare ar fi numărul natural } n \geq n''_\varepsilon,$$

deoarece $y_n > 0$, oricare ar fi numărul natural n.

Atunci, pentru orice număr natural $n \geq n_\varepsilon := \max\{n'_\varepsilon, n''_\varepsilon\}$, avem

$$\frac{x_n}{y_n} > \frac{\varepsilon^2}{\varepsilon} = \varepsilon.$$

Prin urmare, pentru orice $\varepsilon > 0$ există un număr natural n_ε cu proprietatea că

$$\frac{x_n}{y_n} > \varepsilon, \text{ oricare ar fi numărul natural } n \geq n_\varepsilon.$$

În consecinţă şirul (x_n/y_n) are limita $+\infty$.

Celelalte afirmaţii se demonstrează similar. ■

Observaţia 1.6.15 În cazul când şirul $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ are limita 0, iar şirul $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ are limita $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, atunci avem

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{x_n}{y_n}\right| = +\infty.$$

Trebuie observat că este posibil ca şirul (x_n/y_n) să nu aibă limită. $\Diamond$

Dacă $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ şi $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sunt şiruri, cu $x_n > 0$, oricare ar fi numărul natural n, atunci relativ la limita şirului $((x_n)^{y_n})_{n\in\mathbb{N}}$, avem următoarea teoremă:

Teorema 1.6.16 *Fie $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ şi $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ şiruri convergente, cu $x_n > 0$, oricare ar fi numărul natural n.*

1^0 *Dacă*

$$\lim_{n\to\infty} x_n > 0 \quad \text{şi} \quad \lim_{n\to\infty} y_n \neq 0,$$

atunci şirul $((x_n)^{y_n})$ are limită şi

$$\lim_{n\to\infty} (x_n)^{y_n} = \left(\lim_{n\to\infty} x_n\right)^{\lim\limits_{n\to\infty} y_n}.$$

2^0 *Dacă*

$$\lim_{n\to\infty} x_n = 0 \quad \text{şi} \quad \lim_{n\to\infty} y_n > 0,$$

atunci şirul $((x_n)^{y_n})$ are limită şi

$$\lim_{n\to\infty} (x_n)^{y_n} = 0.$$

Demonstraţie. 1^0 Fie $x := \lim\limits_{n\to\infty} x_n > 0$ şi $y := \lim\limits_{n\to\infty} y_n \neq 0$. Pentru fiecare $n \in \mathbb{N}$, avem

$$(x_n)^{y_n} = \exp\left(\ln x_n^{y_n}\right) = \exp\left(y_n \ln x_n\right).$$

Din faptul că şirul (x_n) converge către x şi (y_n) converge către y, deducem că există

$$\lim_{n\to\infty} \ln x_n = \ln x \quad \text{şi} \quad \lim_{n\to\infty} (y_n \ln x_n) = y \ln x.$$

Aşadar există

$$\lim_{n\to\infty} \exp\left(y_n \ln x_n\right) = \exp\left(y \ln x\right) = x^y$$

şi deci

$$\lim_{n\to\infty} (x_n)^{y_n} = \lim_{n\to\infty} \exp(y_n \ln x_n) = x^y.$$

Afirmaţia 2^0 se demonstrează similar. ■

Observaţia 1.6.17 Dacă $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$ şi $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = 0$, atunci despre şirul $((x_n)^{y_n})$ nu putem afirma nimic, relativ la existenţa sau neexistenţa limitei. Uneori şirul $((x_n)^{y_n})$ are limită, alteori nu are limită. Putem arăta că, oricare ar fi $x \in [0, +\infty]$, există două şiruri (x_n) şi (y_n), ambele cu limita 0, astfel încât şirul $((x_n)^{y_n})$ să aibă limita x. De aceea se spune că operaţia 0^0, **nu are sens** sau că **nu este definită**. Acest caz exceptat formează aşa numitul "**caz de nedeterminare** 0^0". Existenţa sau neexistenţa limitei în cazul de nedeterminare 0^0 se stabileşte ţinând seama de expresia concretă a termenilor şirurilor (x_n) şi (y_n). ♢

Observaţia 1.6.18 Dacă $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$ şi $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = 0$, atunci despre şirul $((x_n)^{y_n})$ nu putem afirma nimic, relativ la existenţa sau neexistenţa limitei. Uneori şirul $((x_n)^{y_n})$ are limită, alteori nu are limită. Putem arăta că, oricare ar fi $x \in [0, +\infty]$, există un şir (x_n) cu limita $+\infty$ şi un şir (y_n) cu limita 0, astfel încât şirul $((x_n)^{y_n})$ să aibă limita x. De aceea se spune că operaţia $(+\infty)^0$, **nu are sens** sau că **nu este definită**. Acest caz exceptat formează aşa numitul "**caz de nedeterminare** ∞^0". Existenţa sau neexistenţa limitei în cazul de nedeterminare ∞^0 se stabileşte ţinând seama de expresia concretă a termenilor şirurilor (x_n) şi (y_n). ♢

Observaţia 1.6.19 Dacă $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 1$ şi $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = +\infty$ (sau $-\infty$), atunci despre şirul $((x_n)^{y_n})$ nu putem afirma nimic, relativ la existenţa sau neexistenţa limitei. Uneori şirul $((x_n)^{y_n})$ are limită, alteori nu are limită. Putem arăta că, oricare ar fi $x \in [0, +\infty]$, putem găsi un şir (x_n) cu limita 1 şi un şir (y_n) cu limita $+\infty$ (şi $-\infty$), astfel încât şirul $((x_n)^{y_n})$ să aibă limita x. De aceea se spune că operaţia $1^{\pm\infty}$, **nu are sens** sau că **nu este definită**. Acest caz exceptat formează aşa numitul "**caz de nedeterminare** 1^∞". Existenţa sau neexistenţa limitei în cazul de nedeterminare 1^∞ se stabileşte ţinând seama de expresia concretă a termenilor şirurilor (x_n) şi (y_n).

Observaţia 1.6.20 Dacă $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$ şi $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = +\infty$, atunci

$$\lim_{n\to\infty} (x_n)^{y_n} = 0. \ \Diamond$$

Observaţia 1.6.21 Dacă $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$ şi $\lim\limits_{n\to\infty} y_n \in]0, +\infty[$, atunci

$$\lim_{n\to\infty} (x_n)^{y_n} = +\infty. \ \Diamond$$

Observaţia 1.6.22 Dacă $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$ şi $\lim\limits_{n\to\infty} y_n \in [-\infty, 0[$, atunci

$$\lim_{n\to\infty} (x_n)^{y_n} = 0. \ \Diamond$$

Observaţiile anterioare ne permit să scriem simbolic:

1^0 $\infty^{\infty} = \infty$; $\infty^{-\infty} = 0$;

2^0 $x^{+\infty} = \begin{cases} +\infty, & \text{dacă } x \in \mathbb{R}, \ x > 1, \\ 0, & \text{dacă } x \in \mathbb{R}, \ 0 \le x < 1 \end{cases}$

3^0 $x^{-\infty} = \begin{cases} 0, & \text{dacă } x \in \mathbb{R}, \ x > 1, \\ +\infty, & \text{dacă } x \in \mathbb{R}, \ 0 \le x < 1 \end{cases}$

4^0 $0^{+\infty} = 0$;

5^0 $\infty^{x} = \begin{cases} +\infty, & \text{dacă } x \in \mathbb{R}, \ x > 0, \\ 0, & \text{dacă } x \in \mathbb{R}, \ x < 0. \end{cases}$

Nu se atribuie nici un sens pentru 1^{∞}; ∞^0; 0^0, considerate cazuri exceptat la ridicare la putere în $\overline{\mathbb{R}}$.

7. Eliminarea unor nedeterminări

Vom începe cu două exemple simple:

Exemplul 1.7.1 Avem

$$\lim_{n\to\infty} \left(2n^3 + 5n^2 - 7\right) = +\infty.$$

Soluţie. Într-adevăr, deoarece

$$\lim_{n\to\infty} n^3 = +\infty, \quad \lim_{n\to\infty} n^2 = +\infty,$$

deducem că

$$\lim_{n\to\infty} \left(2n^3\right) = 2 \cdot \lim_{n\to\infty} n^3 = 2\,(+\infty) = +\infty,$$
$$\lim_{n\to\infty} \left(5n^2\right) = 5 \cdot \lim_{n\to\infty} n^2 = 5\,(+\infty) = +\infty.$$

Folosind teorema relativă la limita sumei a două şiruri, deducem că

$$\lim_{n\to\infty} \left(2n^3 + 5n^2 - 7\right) = \lim_{n\to\infty} \left(2n^3\right) + \lim_{n\to\infty} \left(5n^2\right) + \lim_{n\to\infty} (-7) =$$
$$= (+\infty) + (+\infty) - 7 = +\infty - 7 = +\infty.$$

■

Constatăm că, de fapt, pentru calculul limitei, am "înlocuit" pe n cu $+\infty$ ("valoarea" către care tinde n) şi am efectuat calculele în $\overline{\mathbb{R}}$. Se spune că am calculat limita prin "*înlocuire directă*".

Exemplul 1.7.2 Avem

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2n^3 + 5n^2 - 7}{n^3 + 3n - 2} = 2.$$

Soluţie. Într-adevăr, procedând ca mai sus, prin înlocuire directă, obţinem

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2n^3+5n^2-7}{n^3+3n-2} = \frac{(+\infty)+(+\infty)-7}{(+\infty)+(+\infty)-2} = \frac{+\infty}{+\infty},$$

care, aşa cum am văzut, este o nedeterminare (cazul de nedeterminare $\frac{\infty}{\infty}$). Existenţa sau neexistenţa limitei în orice caz de nedeterminare se stabileşte ţinând seama de expresia concretă a termenilor şirurilor. Să observăm că, pentru fiecare număr natural $n \in \mathbb{N}$, avem

$$\frac{2n^3+5n^2-7}{n^3+3n-2} = \frac{n^3\left(2+\frac{5}{n}-\frac{7}{n^3}\right)}{n^3\left(1+\frac{3}{n^2}-\frac{2}{n^3}\right)} = \frac{2+\frac{5}{n}-\frac{7}{n^3}}{1+\frac{3}{n^2}-\frac{2}{n^3}}.$$

Întrucât

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0, \quad \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}=0, \quad \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^3}=0,$$

deducem că

$$\lim_{n\to\infty}\frac{5}{n} = 5\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n} = 5\cdot 0 = 0, \quad \lim_{n\to\infty}\frac{3}{n^2} = 3\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2} = 3\cdot 0 = 0,$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{7}{n^3} = 7\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^3} = 0, \quad \lim_{n\to\infty}\frac{2}{n^3} = 2\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^3} = 0.$$

Atunci

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2+\frac{5}{n}-\frac{7}{n^3}}{1+\frac{3}{n^2}-\frac{2}{n^3}} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} 2 + \lim\limits_{n\to\infty}\frac{5}{n} - \lim\limits_{n\to\infty}\frac{7}{n^3}}{\lim\limits_{n\to\infty} 1 + \lim\limits_{n\to\infty}\frac{3}{n^2} - \lim\limits_{n\to\infty}\frac{2}{n^3}} = \frac{2+0-0}{1+0-0} = 2$$

şi deci

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2n^3+5n^2-7}{n^3+3n-2} = \lim_{n\to\infty}\frac{2+\frac{5}{n}-\frac{7}{n^3}}{1+\frac{3}{n^2}-\frac{2}{n^3}} = 2.$$

■

După modelele de rezolvare a acestor două limite, formulăm următoarea observaţie:

Observaţia 1.7.3 Atunci când calculăm limita unui şir dat prin termenul său general, se recomandă parcurgerea următorilor paşi:

1^0 Se efectuează "*înlocuirea directă*" a lui n cu $+\infty$ (după o anumită experienţă de calcul de limite aceasta se face, de obicei, oral) obţinându-se o succesiune de operaţii în $\overline{\mathbb{R}}$.

2^0 Dacă toate operaţiile obţinute au sens în $\overline{\mathbb{R}}$, atunci aceste operaţii se efectuează şi limita este egală cu rezultatul operaţiilor.

3^0 Dacă prin "*înlocuirea directă*" se obţine o nedeterminare, atunci se efectuează anumite "*artificii de calcul*" care să "*elimine nedeterminarea*", adică toate operaţiile care apar să aibă sens în $\overline{\mathbb{R}}$. ◊

Metodele de eliminare a nedeterminărilor sunt variate; nu există o metodă generală de eliminare a nedeterminărilor. Aceste metode depind de expresia concretă a şirului a cărui limită dorim să o calculăm.

Prezentăm, în continuare, câteva probleme, din a căror rezolvare se deduc câteva metode de eliminare a nedeterminărilor.

1. Una din metodele de eliminare a nedeterminărilor este *metoda factorului comun.*

Exemplul 1.7.4 Să se calculeze

$$\lim_{n\to\infty}\left(n^4-2n^3+3n^2-5n\right).$$

Soluţie. Evident suntem în cazul de nedeterminare "$\infty-\infty$". Pentru eliminarea nedeterminării dăm factor comun pe n^4; obţinem că

$$n^4-2n^3+3n^2-5n=n^4\left(1-\frac{2}{n}+\frac{3}{n^2}-\frac{5}{n^3}\right),\text{ oricare ar fi } n\in\mathbb{N}.$$

Urmează că

$$\lim_{n\to\infty}\left(n^4-2n^3+3n^2-5n\right)=\lim_{n\to\infty}n^4\left(1-\frac{2}{n}+\frac{3}{n^2}-\frac{5}{n^3}\right)=$$

$$=\left(\lim_{n\to\infty}n^4\right)\cdot\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{2}{n}+\frac{3}{n^2}-\frac{5}{n^3}\right)=(+\infty)\cdot 1=+\infty.$$

■

2. O altă metodă de eliminare a nedeterminărilor este *amplificarea cu conjugata unei expresii iraţionale.*

Exemplul 1.7.5 Să se calculeze

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right).$$

Soluţie. Înlocuirea directă ne conduce la nedeterminarea "$\infty-\infty$". Amplificăm cu conjugata de ordinul doi; obţinem:

$$\sqrt{n+1}-\sqrt{n}=\frac{\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}=\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}},$$

oricare ar fi numărul natural n. Deoarece $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n+1}+\sqrt{n}\right)=+\infty$, deducem că

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}=\frac{1}{+\infty}=0.$$

■

3. În cazul nedeterminării 1^∞, se recomandă să se încerce *organizarea lui* e (mai exact a unui "subşir" al şirului (e_n)).

Exemplul 1.7.6 Să se calculeze

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n^2+n+1}\right)^n.$$

Soluţie. Suntem în cazul de nedeterminare 1^∞; încercăm organizarea lui e. Pentru fiecare număr natural n, avem

$$\left(1+\frac{1}{n^2+n+1}\right)^n = \left[\left(1+\frac{1}{n^2+n+1}\right)^{n^2+n+1}\right]^{\frac{n}{n^2+n+1}}.$$

Întrucât, pentru fiecare număr natural n, avem

$$\left(1+\frac{1}{n^2+n+1}\right)^{n^2+n+1} = e_{n^2+n+1},$$

deducem că

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n^2+n+1}\right)^{n^2+n+1} = \mathrm{e}.$$

Deoarece

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n^2+n+1} = 0,$$

obţinem că

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n^2+n+1}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{n^2+n+1}\right)^{n^2+n+1}\right]^{\frac{n}{n^2+n+1}} =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{n^2+n+1}\right)^{n^2+n+1}\right]^{\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n^2+n+1}} = \mathrm{e}^0 = 1.$$

■

Problema rezolvată ne sugerează următoarea întrebare: Dacă avem un şir (x_n) cu limita $+\infty$, atunci şirul cu termenul general $\left(1+\frac{1}{x_n}\right)^{x_n}$ are limită? Mai mult, este această limită e?

Cu mici precauţii, răspunsul la aceste două întrebări este afirmativ.

Teorema 1.7.7 *Fie $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un şir de numere reale. Dacă*

$$\lim_{n\to\infty} x_n = +\infty, \tag{1.7.3}$$

atunci

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{x_n}\right)^{x_n} = \mathrm{e}.$$

Teorema 1.7.8 *Fie $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un şir de numere reale. Dacă*

$$\lim_{n\to\infty} x_n = -\infty,$$

atunci

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{x_n}\right)^{x_n} = \mathrm{e}.$$

Demonstraţie. Suntem în cazul de nedeterminare 1^∞; încercăm organizarea lui e. Fie $y_n = -x_n$, oricare ar fi numărul natural n. Evident

$$\lim_{n\to\infty} y_n = +\infty$$

şi pentru fiecare număr natural n, avem

$$\left(1+\frac{1}{x_n}\right)^{x_n} = \left[\left(1-\frac{1}{y_n}\right)^{y_n}\right]^{-1}.$$

Urmează că

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{x_n}\right)^{x_n} = \lim_{n\to\infty}\left[\left(1-\frac{1}{y_n}\right)^{y_n}\right]^{-1} = \left[\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{y_n}\right)^{y_n}\right]^{-1} =$$
$$= \left(\frac{1}{\mathrm{e}}\right)^{-1} = \mathrm{e}.$$

■

Din ultimele două teoreme deducem următoarea afirmaţie des folosită în eliminarea nedeterminării 1^∞.

Teorema 1.7.9 *Fie $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un şir de numere reale. Dacă*

$$\lim_{n\to\infty} x_n = 0,$$

atunci

$$\lim_{n\to\infty} (1+x_n)^{\frac{1}{x_n}} = \mathrm{e}. \ \Diamond$$

Următorul rezultat permite eliminarea nedeterminării $\frac{0}{0}$ în calculul unor limite.

Teorema 1.7.10 *Fie $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un şir de numere reale. Dacă*

$$\lim_{n\to\infty} x_n = 0,$$

atunci:

1^0 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{\ln(1+x_n)}{x_n} = 1.$

2^0 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{a^{x_n}-1}{x_n} = \ln a,$ *oricare ar fi numărul real* $a \in]0,+\infty[\setminus\{1\}$.

3^0 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{(1+x_n)^a-1}{x_n} = a,$ *oricare ar fi numărul real* a.

Demonstraţie. 1^0 Suntem în cazul de nedeterminare $\frac{0}{0}$. Avem

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\ln(1+x_n)}{x_n} = \lim_{n\to\infty}\ln(1+x_n)^{1/x_n} =$$
$$= \ln\lim_{n\to\infty}(1+x_n)^{1/x_n} = \ln \mathrm{e} = 1.$$

2^0 Suntem în cazul de nedeterminare $\frac{0}{0}$. Fie $y_n = a^{x_n} - 1$, oricare ar fi numărul natural n. Atunci

$$a^{x_n} = 1 + y_n \text{ şi deci } x_n = \log_a (1 + y_n) = \frac{\ln (1 + y_n)}{\ln a}, \text{ oricare ar fi } n \in \mathbb{N}.$$

Deoarece $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = 0$, obţinem

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a^{x_n} - 1}{x_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{y_n \ln a}{\ln (1 + y_n)} = (\ln a) \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\frac{\ln(1+y_n)}{y_n}} = \ln a \cdot 1 = \ln a.$$

3^0 Suntem în cazul de nedeterminare $\frac{0}{0}$. Fie $z_n = \ln (1 + x_n)$, oricare ar fi numărul natural n. Rezultă că $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = 0$ şi pentru orice număr natural n, avem $x_n = e^{z_n} - 1$. Urmează că

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(1 + x_n)^a - 1}{x_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\mathrm{e}^{az_n} - 1}{\mathrm{e}^{z_n} - 1} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{\mathrm{e}^{az_n} - 1}{az_n}}{\frac{\mathrm{e}^{z_n} - 1}{z_n}} \cdot a = \frac{\ln \mathrm{e}}{\ln \mathrm{e}} \cdot a = a.$$

■

4^0 În cazul nedeterminării ∞/∞, un rol cu totul aparte îl ocupă teorema lui Cesàro-Stolz. Enunţul ei este următorul

Teorema 1.7.11 (*teorema lui Cesàro-Stolz*) *Dacă şirurile* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *şi* $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *satisfac următoarele condiţii:*

(*a*) $y_n \neq 0$, *oricare ar fi numărul natural* n;

(*b*) *şirul* (y_n) *este strict monoton şi nemărginit;*

(*c*) *există limita*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}} \in \overline{\mathbb{R}},$$

atunci şirul $\left(\frac{x_n}{y_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ *are limită şi*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}}.$$

Demonstraţie. Demonstraţia se găseşte în [**5**]. ■

Exemplul 1.7.12 Să se calculeze

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}}{\ln n}.$$

Soluţie. Evident şirul $(\ln n)_{n\geq 2}$ este strict crescător şi nemărginit. Deoarece

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}\right) - \left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n-1}\right)}{\ln n - \ln (n-1)} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n}}{\ln \frac{n}{n-1}} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\ln\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^n} = \frac{1}{\ln \lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^n} = \frac{1}{\ln \mathrm{e}} = 1,$$

în baza teoremei lui Cesàro-Stolz, deducem că

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}}{\ln n} = 1.$$

■

8. Probleme propuse spre rezolvare

Exemplul 1.8.1 Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ dacă, pentru fiecare $n \in \mathbb{N}$:

a) $x_n = \dfrac{a^n - a^{-n}}{a^n + a^{-n}}$, unde $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$;

b) $x_n = \dfrac{a^n + b^n}{a^{n+1} + b^{n+1}}$, unde $a, b \in \mathbb{R}$, $a \neq -b$;

c) $x_n = \dfrac{1 + a + a^2 + ... + a^n}{1 + b + b^2 + ... + b^n}$, unde $a, b \in]0, +\infty[$.

Exemplul 1.8.2 Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ dacă, pentru fiecare $n \in \mathbb{N}$:

a) $x_n = \left(\dfrac{2n + \sqrt{n} + 3}{2n+1}\right)^{\sqrt{n}}$;

b) $x_n = \left(\dfrac{n^p + 1}{n^q - 1}\right)^{rn - \sqrt{n^2 - 2n}}$, unde $p, q, r \in \mathbb{N}$;

c) $x_n = \left(\dfrac{n!\,(n+2k)!}{((n+k)!)^2}\right)^n$, unde $k \in \mathbb{N}$.

Exemplul 1.8.3 Calculaţi $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$, dacă, pentru fiecare $n \in \mathbb{N}$:

a) $x_n = \dfrac{(2n-1)!!}{3^n \cdot n!}$; *b)* $x_n = \dfrac{2^n \cdot n!}{(n+1)(n+2)...(n+n)}$;

c) $x_n = \dfrac{n^n}{(n!)^2}$; *d)* $x_n = \dfrac{n^{n+1}}{(n!)^2}$;

e) $x_n = \dfrac{(2n)^{n+1}}{(2n)!}$; *f)* $x_n = \dfrac{2^n \cdot n!}{n^n}$;

g) $x_n = \dfrac{(2n)!}{n^n}$; *h)* $x_n = \dfrac{(n!)^2}{(n+1)(n+2)...(n+n)}$;

i) $x_n = \dfrac{(2n)!}{(n!)^3}$; *j)* $x_n = \dfrac{n!}{(1+1^2)(1+2^2)...(1+n^2)}$.

Observaţia 1.8.4 Pentru mai multe detalii puteţi consulta [**5**] şi [**2**].

9. Serii de numere reale

Noţiunea de *serie* este extensia naturală a noţiunii de sumă finită. Studiul seriilor se reduce la studiul unor şiruri de numere. Determinarea sumei unei serii se reduce la calculul unei limite.

Însumarea progresiilor geometrice infinite cu raţia mai mică în modul decât 1 se efectua deja din antichitate (Arhimede). Divergenţa seriei armonice a fost stabilită de învăţatul italian Mengoli în 1650. Seriile apar constant în calculele savanţilor din secolul al XVIII-lea, dar neacordându-se totdeauna atenţia necesară problemelor convergenţei. O teorie riguroasă a seriilor a început cu lucrările lui Gauss (1812), Bolzano (1817) şi, în sfârşit, Cauchy (1821) care dă pentru prima dată definiţia valabilă şi azi, a sumei unei serii convergente şi stabileşte teoremele de bază.

10. Noţiuni generale

În acest paragraf vom defini noţiunile de serie de numere, serie convergentă, serie divergentă, sumă a unei serii de numere.

Definiţia 1.10.1 *Se numeşte* ***serie de numere reale*** *orice pereche ordonată* $((u_n),(s_n))_{n\in\mathbb{N}}$ *unde* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *este un şir de numere reale, iar*

$$s_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n, \quad \textit{oricare ar fi } n \in \mathbb{N}.\ \Diamond$$

Prin tradiţie seria $((u_n),(s_n))$ se notează

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n \quad \text{sau} \quad \sum_{n\in\mathbb{N}} u_n \quad \text{sau} \quad \sum_{n\geq 1} u_n \quad \text{sau} \quad u_1 + u_2 + ... + u_n + ...$$

sau, când nu este pericol de confuzie, se notează simplu prin

$$\sum u_n.$$

Numărul real u_n, $(n \in \mathbb{N})$ se numeşte **termenul general** al seriei $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$, iar şirul (u_n) **şirul termenilor** seriei $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$. Numărul real s_n, $(n \in \mathbb{N})$ se numeşte **suma parţială de rang** n a seriei $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$, iar şirul (s_n) **şirul sumelor parţiale** ale seriei $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$.

Definiţia 1.10.2 *Spunem că seria* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n = ((u_n),(s_n))$ *este* ***convergentă*** *dacă şirul* (s_n) *al sumelor parţiale este convergent.*

Orice serie care nu este convergentă se numeşte ***divergentă***. $\Diamond$

Dacă şirul (s_n) al sumelor parţiale ale seriei $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n = ((u_n), (s_n))$ are limita $s \in \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$, atunci spunem că seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ **are suma** s (sau că s **este suma** seriei $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$) şi vom scrie

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = s.$$

Exemplul 1.10.3 Seria

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} \tag{1.10.4}$$

are termenul general $u_n = 1/(n(n+1))$, $(n \in \mathbb{N})$ şi suma parţială de rang $n \in \mathbb{N}$ egală cu

$$s_n = u_1 + \cdots + u_n = \frac{1}{1 \cdot 2} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)} = 1 - \frac{1}{n+1}.$$

Întrucât şirul sumelor parţiale este convergent, şeria (1.10.4) este convergentă. Deoarece $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = 1$, suma seriei (1.10.4) este 1; prin urmare scriem

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1. \ \Diamond$$

Exemplul 1.10.4 Se numeşte **serie geometrică** (de raţie q) orice serie de forma

$$\sum_{n=1}^{\infty} q^{n-1}, \tag{1.10.5}$$

unde q este un număr real fixat. Evident termenul general al seriei geometrice (1.10.5) este $u_n = q^{n-1}$, $(n \in \mathbb{N})$, iar suma parţială de rang $n \in \mathbb{N}$ este

$$s_n = 1 + q + \cdots + q^{n-1} = \begin{cases} \dfrac{1-q^n}{1-q}, & \text{dacă } q \neq 1 \\ n, & \text{dacă } q = 1. \end{cases}$$

De aici deducem imediat că seria geometrică (1.10.5) este convergentă dacă şi numai dacă $|q| < 1$. Dacă $|q| < 1$, atunci seria geometrică (1.10.5) are suma $1/(1-q)$ şi scriem

$$\sum_{n=1}^{\infty} q^{n-1} = \frac{1}{1-q}.$$

Dacă $q \geq 1$, atunci seria geometrică (1.10.5) este divergentă; în acest caz seria are suma $+\infty$ şi scriem

$$\sum_{n=1}^{\infty} q^{n-1} = +\infty.$$

Dacă $q \leq -1$, atunci seria geometrică (1.10.5) este divergentă şi nu are sumă. $\Diamond$

Studiul unei serii comportă două probleme:

1) Stabilirea naturii seriei, adică a faptului că seria este convergentă sau divergentă.

2) În cazul în care seria este convergentă, determinarea sumei seriei.

Dacă pentru rezolvarea primei probleme dispunem de criterii de convergenţă şi divergenţă, pentru rezolvarea celei de a doua probleme nu dispunem de metode de determinare a sumei unei serii decât pentru câteva serii particulare.

În cele ce urmează vom da câteva criterii de convergenă şi divergenţă pentru serii.

Teorema 1.10.5 (*criteriul general de convergenţă, criteriul lui Cauchy*) *Seria* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ *este convergentă dacă şi numai dacă pentru fiecare număr real* $\varepsilon > 0$ *există un număr natural* n_ε *cu proprietatea că oricare ar fi numerele naturale* n *şi* p *cu* $n \geq n_\varepsilon$ *avem*

$$|u_{n+1} + u_{n+2} + \cdots + u_{n+p}| < \varepsilon.$$

Demonstraţie. Fie $s_n = u_1 + \cdots + u_n$, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}$. Atunci seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ este convergentă dacă şi numai dacă şirul (s_n) al sumelor parţiale este convergent, prin urmare, în baza teoremei lui Cauchy, dacă şi numai dacă şirul (s_n) este fundamental, adică dacă şi numai dacă oricare ar fi numărul real $\varepsilon > 0$ există un număr natural n_ε cu proprietatea că oricare ar fi numerele naturale n şi p cu $n \geq n_\varepsilon$ avem $|s_{n+p} - s_n| < \varepsilon$. Întrucât

$$s_{n+p} - s_n = u_{n+1} + u_{n+2} + \cdots + u_{n+p}, \text{ oricare ar fi } n, p \in \mathbb{N},$$

teorema este demonstrată. $\blacksquare$

Exemplul 1.10.6 Seria

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}, \tag{1.10.6}$$

numită *seria armonică*, este divergentă şi are suma $+\infty$.

Soluţie. Presupunem prin absurd că seria armonică (1.10.6) este convergentă; atunci, în baza criteriului general de convergenţă (teorema 1.10.5), pentru $\varepsilon = 1/2 > 0$ există un număr natural n_0 cu proprietatea că oricare ar fi numerele naturale n şi p cu $n \geq n_0$ avem

$$\left| \frac{1}{n+1} + \cdots + \frac{1}{n+p} \right| < \frac{1}{2}.$$

De aici, luând $p = n = n_0 \in \mathbb{N}$, obţinem

$$\frac{1}{n_0+1} + \cdots + \frac{1}{n_0+n_0} < \frac{1}{2}. \tag{1.10.7}$$

Pe de altă parte, din $n_0 + k \leq n_0 + n_0$, oricare ar fi $k \in \mathbb{N}$, $k \leq n_0$ deducem

$$\frac{1}{n_0+1} + \cdots + \frac{1}{n_0+n_0} \geq \frac{n_0}{2n_0} = \frac{1}{2}$$

şi deci inegalitatea (1.10.7) nu are loc. Această contradicţie ne conduce la concluzia că seria armonică (1.10.6) este divergentă. Deoarece şirul (s_n) al sumelor parţiale este strict crescător avem că

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = +\infty.$$

■

Exemplul 1.10.7 Seria

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{2^n} \tag{1.10.8}$$

este convergentă.

Soluţie. Fie $u_n = (\sin n)/2^n$, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}$; atunci pentru fiecare $n, p \in \mathbb{N}$ avem

$$|u_{n+1} + u_{n+2} + \cdots + u_{n+p}| = \left| \frac{\sin(n+1)}{2^{n+1}} + \cdots + \frac{\sin(n+p)}{2^{n+p}} \right| \leq$$

$$\leq \frac{|\sin(n+1)|}{2^{n+1}} + \cdots + \frac{|\sin(n+p)|}{2^{n+p}} \leq \frac{1}{2^{n+1}} + \cdots + \frac{1}{2^{n+p}} =$$

$$= \frac{1}{2^n}\left(1 - \frac{1}{2^p}\right) < \frac{1}{2^n}.$$

Fie $\varepsilon > 0$. Întrucât şirul $(1/2^n)$ este convergent către 0, deducem că există un număr natural n_ε cu proprietatea că $1/2^n < \varepsilon$, oricare ar fi numărul natural $n \geq n_\varepsilon$. Atunci

$$|u_{n+1} + u_{n+2} + \cdots + u_{n+p}| < \frac{1}{2^n} < \varepsilon,$$

oricare ar fi numerele naturale n, p cu $n \geq n_\varepsilon$. Prin urmare seria (1.10.8) este convergentă. ■

Teorema 1.10.8 *Dacă seria* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ *este convergentă, atunci şirul* (u_n) *este convergent către zero.*

Demonstraţie. Fie $\varepsilon > 0$; atunci, în baza criteriului general de convergenţă al lui Cauchy (teorema 1.10.5), există un număr natural n_ε cu proprietatea că

$$|u_{n+1} + u_{n+2} + \cdots + u_{n+p}| < \varepsilon, \text{ oricare ar fi } n, p \in \mathbb{N} \text{ cu } n \geq n_\varepsilon.$$

Dacă aici luăm $p = 1$, obţinem că $|u_{n+1}| < \varepsilon$, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_\varepsilon$, de unde deducem că

$$|u_n| < \varepsilon, \text{ oricare ar fi } n \in \mathbb{N}, n \geq n_\varepsilon + 1;$$

prin urmare şirul (u_n) converge către 0. ■

Observaţia 1.10.9 Reciproca teoremei 1.10.8, în general, nu este adevărată în sensul că există serii $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ cu şirul (u_n) convergent către 0 şi totuşi seria nu este convergentă. De exemplu seria armonică (1.10.6) este divergentă deşi şirul $(1/n)$ este convergent către 0. ♢

Teorema 1.10.10 *Fie m un număr natural. Atunci seria* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ *este convergentă dacă şi numai dacă seria* $\sum\limits_{n=m}^{\infty} u_n$ *este convergentă.*

Demonstraţie. Fie $s_n = u_1 + \cdots + u_n$, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}$ şi $t_n = u_m + \cdots + u_n$, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}$ $n \geq m$. Atunci seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ este convergentă dacă şi numai dacă şirul $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ este convergent, prin urmare dacă şi numai dacă şirul $(t_n)_{n\geq m}$ este convergent, aşadar dacă şi numai dacă seria $\sum\limits_{n=m}^{\infty} u_n$ este convergentă. ■

Teorema 1.10.11 *Dacă* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ *şi* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ *sunt serii convergente şi a şi b sunt numere reale, atunci seria* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (au_n + bv_n)$ *este convergentă şi are suma*

$$a\sum_{n=1}^{\infty} u_n + b\sum_{n=1}^{\infty} v_n.$$

Demonstraţie. Evident, pentru fiecare număr natural n avem

$$\sum_{k=1}^{n} (au_k + bv_k) = a\left(\sum_{k=1}^{n} u_k\right) + b\left(\sum_{k=1}^{n} v_k\right),$$

de unde, în baza proprietăţilor şirurilor convergente, obţinem afirmaţia teoremei. ■

Exemplul 1.10.12 Întrucât seriile

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n-1}} \quad \text{şi} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^{n-1}}$$

sunt convergente şi au suma 2 respectiv 3/2, deducem că seria

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2^n} - \frac{1}{3^n}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2^{n-1}} - \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3^{n-1}}\right)$$

este convergentă şi are suma $(1/2) \cdot 2 - (1/3) \cdot (3/2) = 1/2$. $\Diamond$

Definiţia 1.10.13 *Fie* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ *o serie convergentă cu suma* s, n *un număr natural şi* $s_n = u_1 + \cdots + u_n$ *suma parţială de rang* n *a seriei* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$. *Numărul real* $r_n = s - s_n$ *se numeşte* ***restul de ordinul*** n *al seriei* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$. $\Diamond$

Teorema 1.10.14 *Dacă seria* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ *este convergentă, atunci şirul* (r_n) *al resturilor ei este convergent către* 0.

Demonstraţie. Fie $s = \sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$. Deoarece şirul (s_n) al sumelor parţiale ale seriei $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ este convergent către $s = \lim\limits_{n\to\infty} s_n$ şi $r_n = s - s_n$, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}$, avem că şirul (r_n) este convergent către 0. $\blacksquare$

11. Serii cu termeni pozitivi

Dacă $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ este o serie de numere reale convergentă, atunci şirul (s_n) al sumelor parţiale este mărginit. Reciproca acestei afirmaţii, în general nu este adevărată în sensul că există serii divergente care au şirul sumelor parţiale mărginit. Într-adevăr, seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1}$ are şirul sumelor parţiale cu termenul general s_n, $(n \in \mathbb{N})$ egal cu

$$s_n = \begin{cases} 1, & \text{dacă } n \text{ este par} \\ 0, & \text{dacă } n \text{ este impar.} \end{cases}$$

Evident şirul (s_n) este mărginit ($|s_n| \le 1$, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}$) deşi seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1}$ este divergentă (şirul (s_n) nu este convergent).

Dacă seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ are termenii numere reale pozitive, atunci şirul (s_n) al sumelor parţiale este crescător; în acest caz faptul că şirul (s_n) este mărginit este echivalent cu faptul că şirul (s_n) este convergent.

Scopul acestui paragraf este de a da criterii de convergenţă pentru aşa numitele serii cu termeni pozitivi.

Definiţia 1.11.1 *Se numeşte* ***serie cu termeni pozitivi*** *orice serie* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ *care are proprietatea că* $u_n > 0$ *oricare ar fi* $n \in \mathbb{N}$. $\Diamond$

Pentru seriile cu termeni pozitivi are loc următoarea afirmaţie.

Teorema 1.11.2 *Dacă* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ *o serie cu termeni pozitivi, atunci*

1^0 Seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ *are sumă şi*

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = \sup\left\{\sum_{k=1}^{n} u_k : \ n \in \mathbb{N}\right\}.$$

2^0 Seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ *este convergentă dacă şi numai dacă şirul* $\left(\sum\limits_{k=1}^{n} u_k\right)$ *al sumelor parţiale este mărginit.*

Demonstraţie. Pentru fiecare $n \in \mathbb{N}$ punem

$$s_n := \sum_{k=1}^{n} u_k.$$

1^0 Şirul (s_n) este crescător şi atunci, în baza teoremei lui Weierstrass relativă la şirurile monotone, afirmaţia 1^0 este dovedită.

2^0 Dacă seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ este convergentă, atunci şirul sumelor parţiale (s_n) este convergent şi deci mărginit.

Dacă şirul (s_n) este mărginit, atunci, întrucât el este monoton, deducem că şirul (s_n) este convergent şi prin urmare seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ este convergentă. $\blacksquare$

Teorema 1.11.3 (primul criteriu al comparaţiei) *Dacă* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ *şi* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ *sunt serii cu termeni pozitivi cu proprietatea că există un număr real* $a > 0$ *şi un număr natural* n_0 *astfel încât*

(1.11.9) $$u_n \leq a v_n \text{ oricare ar fi } n \in \mathbb{N},\ n \geq n_0,$$

atunci:

1^0 Dacă seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ *este convergentă, atunci seria* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ *este convergentă.*

2^0 Dacă seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ *este divergentă, atunci seria* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ *este divergentă.*

Demonstraţie. Pentru fiecare $n \in \mathbb{N}$, fie $s_n = u_1 + ... + u_n$ şi $t_n = v_1 + ... + v_n$; atunci din (1.11.9) avem că

$$s_n \leq s_{n_0} + a\left(v_{n_0+1} + ... + v_n\right), \text{ oricare ar fi } n \in \mathbb{N},\ n \geq n_0. \tag{1.11.10}$$

1^0 Dacă seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ este convergentă, atunci şirul (t_n) este mărginit, prin urmare există un număr real $M > 0$ cu proprietatea că $t_n \leq M$, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}$. Acum din (1.11.10) deducem că pentru fiecare $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$ au loc inegalităţile

$$s_n \leq s_{n_0} + a\left(t_n - t_{n_0}\right) \leq s_{n_0} + at_n - at_{n_0} \leq s_{n_0} + at_n \leq s_{n_0} + aM,$$

de unde rezultă că şirul (s_n) este mărginit. Atunci, în baza teoremei 1.11.2, seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ este convergentă.

2^0 Presupunem că seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ este divergentă. Dacă seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ ar fi convergentă, atunci în baza afirmaţiei 1^0, seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ ar fi convergentă, ceea ce contrazice ipoteza că seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ este divergentă. Aşadar seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ este divergentă. ■

Exemplul 1.11.4 Seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n^{-1/2}$ este divergentă. Într-adevăr, din inegalitatea $\sqrt{n} \leq n$ adevărată oricare ar fi $n \in \mathbb{N}$, obţinem că $n^{-1} \leq n^{-1/2}$, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}$. Cum seria armonică $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n^{-1}$ este divergentă, în baza teoremei 1.11.2, afirmaţia 2^0, deducem că seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n^{-1/2}$ este divergentă. ◊

Teorema 1.11.5 (al doilea criteriu al comparaţiei) *Dacă* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ *şi* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ *sunt serii cu termeni pozitivi cu proprietatea că există*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_n}{v_n} \in [0, +\infty], \tag{1.11.11}$$

atunci

1^0 *Dacă*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_n}{v_n} \in]0, +\infty[,$$

atunci seriile $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ *şi* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ *au aceeaşi natură.*

2^0 *Dacă*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_n}{v_n} = 0,$$

atunci:

a) Dacă seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ *este convergentă, atunci seria* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ *este convergentă.*

b) Dacă seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ *este divergentă, atunci seria* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ *este divergentă.*

3^0 *Dacă*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_n}{v_n} = +\infty,$$

atunci:

a) Dacă seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ *este convergentă, atunci seria* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ *este convergentă.*

b) Dacă seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ *este divergentă, atunci seria* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ *este divergentă.*

Demonstraţie. 1^0 Fie $a := \lim\limits_{n\to\infty} (u_n/v_n) \in]0, +\infty[$; atunci există un număr natural n_0 cu proprietatea că

$$\left|\frac{u_n}{v_n} - a\right| < \frac{a}{2}, \text{ oricare ar fi } n \in \mathbb{N},\, n \geq n_0,$$

de unde deducem că

$$v_n \leq (2/a)\, u_n, \text{ oricare ar fi } n \in \mathbb{N},\, n \geq n_0 \tag{1.11.12}$$

şi

$$u_n \leq (3a/2)\, v_n, \text{ oricare ar fi } n \in \mathbb{N},\, n \geq n_0. \tag{1.11.13}$$

Dacă seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ este convergentă, atunci în baza primului criteriu al comparaţiei (teorema 1.11.3), aplicabil pentru că are loc (1.11.12), obţinem că seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ este convergentă.

Dacă seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ este convergentă, atunci ţinând seama de (1.11.13), în baza primului criteriu al comparaţiei (teorema 1.11.3) rezultă că seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ este convergentă.

2^0 Dacă $\lim\limits_{n\to\infty} (u_n/v_n) = 0$, atunci există un număr natural n_0 astfel încât $u_n/v_n < 1$, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$, de unde deducem că

$$u_n \leq v_n, \text{ oricare ar fi } n \in \mathbb{N}, n \geq n_0.$$

Aplicăm acum primul criteriu al comparaţiei.

3^0 Dacă $\lim\limits_{n\to\infty} (u_n/v_n) = +\infty$, atunci există un număr natural n_0 astfel încât $u_n/v_n > 1$, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$, de unde deducem că

$$v_n \leq u_n, \text{ oricare ar fi } n \in \mathbb{N}, n \geq n_0.$$

Aplicăm acum primul criteriu al comparaţiei. ■

Exemplul 1.11.6 Seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n^{-2}$ este convergentă. Într-adevăr, din

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{n(n+1)} = 1 \in]0, +\infty[,$$

deducem că seriile $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n^{-2}$ şi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ au aceeaşi natură. Cum seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ este convergentă (vezi exemplul 1.10.3), obţinem că seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n^{-2}$ este convergentă. $\Diamond$

Teorema 1.11.7 (al treilea criteriu al comparaţiei) *Dacă* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ *şi* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ *sunt serii cu termeni pozitivi cu proprietatea că există un număr natural* n_0 *astfel încât:*

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \le \frac{v_{n+1}}{v_n}, \text{ oricare ar fi } n \in \mathbb{N},\ n \ge n_0, \tag{1.11.14}$$

atunci:

1^0 *Dacă seria* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ *este convergentă, atunci seria* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ *este convergentă.*

2^0 *Dacă seria* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ *este divergentă, atunci seria* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ *este divergentă.*

Demonstraţie. Fie $n \in \mathbb{N}$, $n \ge n_0 + 1$; atunci din (1.11.14) avem succesiv:

$$\frac{u_{n_0+1}}{u_{n_0}} \le \frac{v_{n_0+1}}{v_{n_0}}$$
$$\cdots$$
$$\frac{u_n}{u_{n-1}} \le \frac{v_n}{v_{n-1}},$$

de unde, prin înmulţire membru cu membru, obţinem

$$\frac{u_n}{u_{n_0}} \le \frac{v_n}{v_{n_0}}.$$

Aşadar

$$u_n \le \frac{u_{n_0}}{v_{n_0}} v_n, \text{ oricare ar fi } n \in \mathbb{N},\ n \ge n_0.$$

Aplicăm acum primului criteriu al comparaţiei (teorema 1.11.3). Teorema este demonstrată. ■

Teorema 1.11.8 (criteriul condensării al lui Cauchy) *Fie* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ *o serie cu termeni pozitivi cu proprietatea că şirul* (u_n) *al termenilor seriei este descrescător. Atunci seriile* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ *şi* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} 2^n u_{2^n}$ *au aceeaşi natură.*

Demonstraţie. Fie $s_n := u_1 + u_2 + ... + u_n$ suma parţială de rang $n \in \mathbb{N}$ a seriei $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ şi fie $S_n := 2u_2 + 2^2 u_{2^2} + ... + 2^n u_{2^n}$ suma parţială de rang $n \in \mathbb{N}$ a seriei $\sum\limits_{n=1}^{\infty} 2^n u_{2^n}$.

Presupunem că seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} 2^n u_{2^n}$ este convergentă; atunci şirul (S_n) al sumelor parţiale este mărginit, prin urmare există un număr real $M > 0$ astfel încât

$$0 \leq S_n \leq M, \text{ oricare ar fi } n \in \mathbb{N}.$$

Pentru a arăta că seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ este convergentă, în baza teoremei 1.11.2, este suficient să arătăm că şirul (s_n) al sumelor parţiale este mărginit. Deoarece seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ este cu termeni pozitivi, din $n \leq 2^{n+1} - 1$, $(n \in \mathbb{N})$ deducem că

$$s_n \leq s_{2^{n+1}-1} = u_1 + (u_2 + u_3) + (u_4 + \cdots + u_7) + \\ + (u_{2^n} + u_{2^n+1} + \cdots + u_{2^{n+1}-1}).$$

Întrucât şirul (u_n) este descrescător, urmează că

$$u_{2^k} > u_{2^k+1} > \cdots > u_{2^{k+1}-1}, \text{ oricare ar fi } k \in \mathbb{N}$$

şi deci s_n se poate delimita mai departe astfel

$$s_n \leq s_{2^{n+1}-1} \leq u_1 + 2 \cdot u_2 + 2^2 \cdot u_{2^2} + \cdots + 2^n \cdot u_{2^n} = \\ = u_1 + S_n \leq u_1 + M.$$

Aşadar şirul (s_n) este mărginit şi deci seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ este convergentă.

Presupunem acum că seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ este convergentă; atunci şirul (s_n) al sumelor parţiale ale seriei $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ este mărginit, prin urmare există un număr real $M > 0$ astfel încât $0 \leq s_n \leq M$, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}$. Pentru a arăta că seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} 2^n u_{2^n}$ este convergentă, este suficient să arătăm că şirul (S_n) este mărginit. Fie deci $n \in \mathbb{N}$. Atunci

$$s_{2^n} = u_1 + u_2 + (u_3 + u_4) + (u_5 + u_6 + u_7 + u_8) + \cdots + \\ + (u_{2^{n-1}+1} + \cdots + u_{2^n}) \geq \\ \geq u_1 + u_2 + 2u_{2^2} + 2^2 u_{2^3} + \cdots + 2^{n-1} u_{2^n} \geq \\ \geq u_1 + \frac{1}{2} S_n \geq \frac{1}{2} S_n,$$

prin urmare avem inegalităţile

$$S_n \leq 2s_{2^n} \leq 2M.$$

Aşadar şirul (S_n) este mărginit şi deci seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} 2^n u_{2^n}$ este convergentă. ■

Exemplul 1.11.9 Seria

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^a}, \text{ unde } a \in \mathbb{R},$$

numită **seria armonică generalizată**, este divergentă pentru $a \leq 1$ şi convergentă pentru $a > 1$.

Soluţie. Într-adevăr, dacă $a \leq 0$, atunci şirul termenilor seriei (n^{-a}) nu converge către zero şi deci seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^a}$ este divergentă. Dacă $a > 0$, atunci şirul termenilor seriei (n^{-a}) este descrescător convergent către zero şi deci putem aplica criteriul condensării; seriile $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^a}$ şi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} 2^n \frac{1}{(2^n)^a}$ au aceeaşi natură. Întrucât $2^n \frac{1}{(2^n)^a} = \left(\frac{1}{2^{a-1}}\right)^n$, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}$, deducem că seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} 2^n \frac{1}{(2^n)^a}$ este de fapt seria geometrică $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2^{a-1}}\right)^n$, divergentă pentru $a \leq 1$ şi convergentă pentru $a > 1$. Urmează că seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^a}$ este divergentă pentru $a \leq 1$ şi convergentă pentru $a > 1$. ■

Teorema 1.11.10 (criteriul raportului, criteriul lui D'Alembert) *Fie* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ *o serie cu termeni pozitivi.*

1^0 *Dacă există un număr real* $q \in [0, 1[$ *şi un număr natural* n_0 *astfel încât:*

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \leq q \text{ oricare ar fi } n \in \mathbb{N},\ n \geq n_0,$$

atunci seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ *este convergentă.*

2^0 *Dacă există un număr natural* n_0 *astfel încât:*

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \geq 1 \text{ oricare ar fi } n \in \mathbb{N},\ n \geq n_0,$$

atunci seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ *este divergentă.*

Demonstraţie. 1^0 Aplicăm al treilea criteriu al comparaţiei (teorema 1.11.7, afirmaţia 1^0), luând $v_n := q^{n-1}$, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}$. Avem

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \leq q = \frac{v_{n+1}}{v_n}, \text{ oricare ar fi } n \in \mathbb{N},\ n \geq n_0,$$

iar seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ este convergentă, prin urmare seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ este convergentă.

2^0 Din $u_{n+1}/u_n \geq 1$ deducem că $u_{n+1} \geq u_n$, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$, prin urmare şirul (u_n) nu converge către 0; atunci, în baza teoremei 1.10.8, seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ este divergentă. ■

Teorema 1.11.11 (consecinţa criteriului raportului) *Fie* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ *o serie cu termeni pozitivi pentru care există* $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n}$.

1^0 *Dacă*
$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} < 1,$$
atunci seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ *este convergentă.*

2^0 *Dacă*
$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} > 1,$$
atunci seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ *este divergentă.*

Demonstraţie. Fie $a := \lim\limits_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n}$. Evident $a \geq 0$.

1^0 Întrucât $a \in [0, 1[$ deducem că există un număr real $q \in]a, 1[$. Atunci, din $a \in]a-1, q[$ rezultă că există un număr natural n_0 astfel încât
$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \in]a-1, q[, \text{ oricare ar fi } n \in \mathbb{N},\ n \geq n_0.$$
Urmează că
$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \leq q, \text{ oricare ar fi } n \in \mathbb{N},\ n \geq n_0.$$
Aplicând acum criteriul raportului, obţinem că seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ este convergentă.

2^0 Dacă $1 < a$, atunci există un număr natural n_0 astfel încât
$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \geq 1, \text{ oricare ar fi } n \in \mathbb{N},\ n \geq n_0.$$
Aplicând acum criteriul raportului, obţinem că seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ este divergentă.
■

Exemplul 1.11.12 Seria

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^3}{(3n)!} \tag{1.11.15}$$

este convergentă.

Soluţie. Avem că
$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{1}{27} < 1,$$
şi atunci, în baza consecinţei criteriului raportului, seria (1.11.15) este convergentă. ■

Observaţia 1.11.13 Dacă pentru seria cu termeni pozitivi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ există limita $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n}$ şi este egală cu 1, atunci consecinţa criteriului raportului nu decide dacă seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ este convergentă sau divergentă; există serii convergente, dar şi serii divergente pentru care $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = 1$. Într-adevăr, pentru seriile $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n^{-1}$ şi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n^{-2}$ avem, în ambele cazuri, $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = 1$, prima serie fiind divergentă (vezi exemplul 1.10.3) şi a doua serie fiind convergentă (vezi exemplul 1.11.6). $\Diamond$

Teorema 1.11.14 (criteriul radicalului, criteriul lui Cauchy) *Fie* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ *o serie cu termeni pozitivi.*

1^0 *Dacă există un număr real* $q \in [0, 1[$ *şi un număr natural* n_0 *astfel încât*

$$\sqrt[n]{u_n} \leq q, \text{ oricare ar fi } n \in \mathbb{N},\ n \geq n_0, \tag{1.11.16}$$

atunci seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ *este convergentă.*

2^0 *Dacă există un număr natural* n_0 *astfel încât*

$$\sqrt[n]{u_n} \geq 1, \text{ oricare ar fi } n \in \mathbb{N},\ n \geq n_0, \tag{1.11.17}$$

atunci seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ *este divergentă.*

Demonstraţie. 1^0 Presupunem că există $q \in [0, 1[$ şi $n_0 \in \mathbb{N}$ astfel încât (1.11.16) să aibă loc. Atunci

$$u_n \leq q^n, \text{ oricare ar fi } n \in \mathbb{N},\ n \geq n_0.$$

Aplicăm acum primul criteriu al comparaţiei (teorema 1.11.3, afirmaţia 1^0), luând $v_n := q^{n-1}$,oricare ar fi $n \in \mathbb{N}$ şi $a := q$. Întrucât seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} q^{n-1}$ este convergentă, obţinem că seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ este convergentă.

2^0 Din (1.11.17) deducem că $u_n \geq 1$, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$, prin urmare şirul (u_n) nu converge către 0; atunci, în baza teoremei 1.10.8, seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ este divergentă. $\blacksquare$

Teorema 1.11.15 (consecinţa criteriului radicalului) *Fie* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ *o serie cu termeni pozitivi pentru care există* $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n}$.

1^0 *Dacă*

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} < 1,$$

atunci seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ *este convergentă.*

2^0 *Dacă*
$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} > 1,$$
atunci seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ *este divergentă.*

Demonstraţie. Fie $a := \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n}$. Evident $a \geq 0$.

1^0 Întrucât $a \in [0, 1[$ deducem că există un număr real $q \in]a, 1[$. Atunci, din $a \in]a-1, q[$ rezultă că există un număr natural n_0 astfel încât
$$\sqrt[n]{u_n} \in]a-1, q[, \text{ oricare ar fi } n \in \mathbb{N},\ n \geq n_0.$$
Urmează că
$$\sqrt[n]{u_n} \leq q, \text{ oricare ar fi } n \in \mathbb{N},\ n \geq n_0.$$
Aplicând acum criteriul radicalului, obţinem că seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ este convergentă.

2^0 Dacă $1 < a$, atunci există un număr natural n_0 astfel încât
$$\sqrt[n]{u_n} \geq 1, \text{ oricare ar fi } n \in \mathbb{N},\ n \geq n_0.$$
Aplicând acum criteriul radicalului, obţinem că seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ este divergentă.
■

Exemplul 1.11.16 Seria
$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sqrt[3]{n^3+3n^2+1} - \sqrt[3]{n^3-n^2+1}\right)^n. \tag{1.11.18}$$
este convergentă.

Soluţie. Avem
$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = \lim_{n\to\infty} \left(\sqrt[3]{n^3+3n^2+1} - \sqrt[3]{n^3-n^2+1}\right) = \frac{4}{3} > 1.$$
şi deci, în baza consecinţei criteriului radicalului, seria (1.11.18) este divergentă. ■

Observaţia 1.11.17 Dacă pentru seria cu termeni pozitivi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ există limita $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n}$ şi este egală cu 1, atunci consecinţa criteriului radicalului nu decide dacă seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ este convergentă sau divergentă; există serii convergente, dar şi serii divergente pentru care $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = 1$. Într-adevăr, pentru seriile $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n^{-1}$ şi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n^{-2}$ avem, în ambele cazuri, $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = 1$, prima serie fiind divergentă (vezi exemplul 1.10.3) şi a doua serie fiind convergentă (vezi exemplul 1.11.6). ◊

Teorema 1.11.18 (criteriul lui Kummer) *Fie* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ *o serie cu termeni pozitivi.*

1^0 *Dacă există un şir* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, *de numere reale pozitive, există un număr real* $r > 0$ *şi există un număr natural* n_0 *cu proprietatea că*

$$a_n \frac{u_n}{u_{n+1}} - a_{n+1} \geq r, \text{ oricare ar fi } n \in \mathbb{N},\ n \geq n_0, \tag{1.11.19}$$

atunci seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ *este convergentă.*

2^0 *Dacă există un şir* (a_n), *de numere reale pozitive cu proprietatea că seria* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_n}$ *este divergentă şi există un număr natural* n_0 *astfel încât*

$$a_n \frac{u_n}{u_{n+1}} - a_{n+1} \leq 0, \text{ oricare ar fi } n \in \mathbb{N},\ n \geq n_0, \tag{1.11.20}$$

atunci seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ *este divergentă.*

Demonstraţie. Pentru fiecare număr natural n, notăm cu

$$s_n := u_1 + u_2 + ... + u_n$$

suma parţială de rang n a seriei $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$.

1^0 Presupunem că există un şir (a_n), de numere reale pozitive, există un număr real $r > 0$ şi există un număr natural n_0 astfel încât (1.11.19) are loc. Să observăm că relaţia (1.11.19) este echivalentă cu

$$a_n u_n - a_{n+1} u_{n+1} \geq r u_{n+1}, \text{ oricare ar fi } n \in \mathbb{N},\ n \geq n_0. \tag{1.11.21}$$

Fie $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0 + 1$; atunci din (1.11.21) avem succesiv:

$$a_{n_0} u_{n_0} - a_{n_0+1} u_{n_0+1} \geq r u_{n_0+1},$$
$$. \quad . \quad .$$
$$a_{n-1} u_{n-1} - a_n u_n \geq r u_n,$$

de unde, prin adunare membru cu membru, obţinem

$$a_{n_0} u_{n_0} - a_n u_n \geq r(u_{n_0+1} + \cdots + u_n).$$

De aici deducem că, pentru fiecare număr natural $n \geq n_0$ avem

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} u_k = \sum_{k=1}^{n_0} u_k + \sum_{k=n_0+1}^{n} u_k \leq s_{n_0} + \frac{1}{r}\left(a_{n_0 u_{n_0}} - a_n u_n\right) \leq$$
$$\leq s_{n_0} + \frac{1}{r} a_{n_0} u_{n_0},$$

prin urmare şirul (s_n) al sumelor parţiale ale seriei $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ este mărginit. În baza teoremei 1.11.2, seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ este convergentă.

2^0 Presupunem că există un şir (a_n), de numere reale pozitive, cu proprietatea că seria $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_n}$ este divergentă şi există un număr natural n_0 astfel încât (1.11.20) are loc. Evident (1.11.20) este echivalentă cu

$$\frac{\frac{1}{a_{n+1}}}{\frac{1}{a_n}} \leq \frac{u_{n+1}}{u_n}, \text{ oricare ar fi } n \in \mathbb{N},\, n \geq n_0.$$

Deoarece seria $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_n}$ este divergentă, conform criteriului al III-lea al comparaţiei seria $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ este divergentă.

Teorema este demonstrată. ■

Teorema 1.11.19 (criteriul lui Raabe-Duhamel) *Fie $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ o serie cu termeni pozitivi.*

1^0 *Dacă există un număr real $q > 1$ şi un număr natural n_0 astfel încât*

$$n\left(\frac{u_n}{u_{n+1}} - 1\right) \geq q \text{ oricare ar fi } n \in \mathbb{N},\, n \geq n_0, \tag{1.11.22}$$

atunci seria $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ este convergentă.

2^0 *Dacă există un număr natural n_0 astfel încât*

$$n\left(\frac{u_n}{u_{n+1}} - 1\right) \leq 1 \text{ oricare ar fi } n \in \mathbb{N},\, n \geq n_0, \tag{1.11.23}$$

atunci seria $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ este divergentă.

Demonstraţie. În criteriul lui Kummer (teorema 1.11.18) să luăm $a_n := n$, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}$; obţinem

$$a_n \frac{u_n}{u_{n+1}} - a_{n+1} = n\left(\frac{u_n}{u_{n+1}} - 1\right) - 1.$$

1^0 Dacă luăm $r := q - 1 > 0$, atunci, întrucât (1.11.19) este echivalentă cu (1.11.22), deducem că seria $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ este convergentă.

2^0 Cum seria $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-1}$ este divergentă şi (1.11.20) este echivalentă cu (1.11.23), obţinem că seria $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ este divergentă. ■

Teorema 1.11.20 (consecinţa criteriului lui Raabe-Duhamel) *Fie* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ *o serie cu termeni pozitivi pentru care există limita*

$$\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{u_n}{u_{n+1}} - 1\right).$$

1^0 *Dacă*

$$\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{u_n}{u_{n+1}} - 1\right) > 1,$$

atunci seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ *este convergentă.*

2^0 *Dacă*

$$\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{u_n}{u_{n+1}} - 1\right) < 1,$$

atunci seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ *este divergentă.*

Demonstraţie. Fie

$$b := \lim_{n\to\infty} n\left(\frac{u_n}{u_{n+1}} - 1\right).$$

1^0 Din $b > 1$ deducem că există un număr real $q \in]1, b[$. Atunci $b \in]q, b+1[$ implică existenţa unui număr natural n_0 astfel încât

$$n\left(\frac{u_n}{u_{n+1}} - 1\right) \in]q, b+1[, \text{ oricare ar fi } n \in \mathbb{N},\ n \geq n_0,$$

de unde obţinem că (1.11.22) are loc. Aplicând acum criteriul lui Raabe-Duhamel, rezultă că seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ este convergentă.

2^0 Dacă $b < 1$, atunci există un număr natural n_0 astfel încât (1.11.23) să aibă loc. Aplicând acum criteriul lui Raabe-Duhamel, rezultă că seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ este divergentă. ■

Exemplul 1.11.21 Seria

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{a\,(a+1)\cdots(a+n-1)}, \text{ unde } a > 0,$$

este convergentă dacă şi numai dacă $a > 2$.

Soluţie. Avem

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = 1$$

şi deci consecinţa criteriului raportului nu decide natura seriei. Deoarece

$$\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{u_n}{u_{n+1}} - 1\right) = a - 1,$$

în baza consecinţei criteriului lui Raabe-Duhamel, dacă $a > 2$, atunci seria dată este convergentă, iar dacă $a < 2$ seria dată este divergentă. Dacă $a = 2$, atunci seria dată devine $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+1}$ care este divergentă. Aşadar seria dată este convergentă dacă şi numai dacă $a > 2$. ■

12. Probleme propuse spre rezolvare

Exemplul 1.12.1 Stabiliţi natura şi suma seriilor:

$$a)\ \sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(1+\frac{1}{n}\right);\quad b)\ \sum_{n=1}^{\infty} \arctan\frac{1}{n^2+n+1};\quad c)\ \sum_{n=2}^{\infty} \ln\left(1-\frac{1}{n^2}\right);$$

$$d)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^{n-1}};\quad e)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n-1}{2^n};\quad f)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(3n-2)(3n+1)}.$$

Exemplul 1.12.2 Stabiliţi natura seriilor

$$a)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{9+n}{2n+1};\quad b)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n+3^n}{2^{n+1}+3^{n+1}};\quad c)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2n+1}-\sqrt{2n-1}}.$$

Exemplul 1.12.3 Stabiliţi natura seriilor:

$$a)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1};\quad b)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2};\quad c)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{4n^2-1}};$$

$$d)\ \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}\sqrt[3]{n-1}};\quad e)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\ln n)^{10}}{n^{1.1}};\quad f)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+\sqrt{2}+\sqrt[3]{3}+...+\sqrt[n]{n}};$$

$$g)\ \sum_{n=1}^{\infty} \sin\frac{1}{n};\quad h)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt[4]{n^2-1}}{\sqrt{n^4-1}};\quad i)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt[3]{n^2-1}}{\sqrt{n^3-1}}.$$

Exemplul 1.12.4 Stabiliţi natura seriilor:

$$a)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{100^n}{n!};\quad b)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!};\quad c)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n};\quad d)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n\cdot n!}{n^n};\quad e)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n\cdot n!}{n^n};$$

$$f)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{2^{n^2}};\quad g)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{100\cdot 101\cdot ...\cdot(100+n)}{1\cdot 3\cdot ...\cdot(2n-1)};\quad h)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4\cdot 7\cdot ...\cdot(4+3n)}{2\cdot 6\cdot ...\cdot(2+4n)}.$$

Exemplul 1.12.5 Pentru fiecare $a > 0$, studiaţi natura seriei:

$$a)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a^n+n};\quad b)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n}{\sqrt{n!}};\quad c)\ \sum_{n=1}^{\infty} a^{\ln n};\quad d)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n}{n^n};$$

$$e)\ \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n^2+n+1}{n^2}a\right)^n;\quad f)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{2^n+a^n};\quad g)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{n^a}.$$

Exemplul 1.12.6 Pentru fiecare $a, b > 0$, studiaţi natura seriei:

$$a)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n}{a^n + b^n};\quad b)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{a^n + b^n};\quad c)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n b^n}{a^n + b^n};$$

$$d)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2a+1)(3a+1)\cdots(na+1)}{(2b+1)(3b+1)\cdots(nb+1)}.$$

Exemplul 1.12.7 Stabiliţi natura seriilor:

$$a)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\frac{1}{2n+1};\quad b)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!};\quad c)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}\left(\frac{n}{e}\right)^n.$$

Exemplul 1.12.8 Pentru fiecare $a > 0$, studiaţi natura seriilor:

$$a)\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{a(a+1)...(a+n)};\quad b)\ \sum_{n=1}^{\infty} a^{-\left(1+\frac{1}{2}+...+\frac{1}{n}\right)};\quad c)\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n \cdot n!}{n^n}.$$

Observaţia 1.12.9 Pentru detalii puteţi consulta [**5**].

CAPITOLUL 2

Formula lui Taylor

1. Polinomul lui Taylor: definiţie, proprietăţi

Formula lui Taylor, utilizată în special în aproximarea funcţiilor prin polinoame, este una din cele mai importante formule din matematică.

Definiţia 2.1.1 *Fie D o submulţime nevidă a mulţimii $\mathbb{R}$, $x_0 \in D$ şi $f : D \to \mathbb{R}$ o funcţie derivabilă de n ori în punctul x_0. Funcţia (polinomială) $T_{n;x_0} f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definită prin*

$$(T_{n;x_0} f)(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + ...$$

$$... + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n, \text{ oricare ar fi } x \in \mathbb{R},$$

*se numeşte **polinomul lui Taylor de ordin** n **ataşat funcţiei** f **şi punctului** x_0.* $\Diamond$

Observaţia 2.1.2 Polinomul lui Taylor de ordin n are gradul cel mult n. $\Diamond$

Exemplul 2.1.3 Pentru funcţia exponenţială $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definită prin

$$f(x) = \exp x, \text{ oricare ar fi } x \in \mathbb{R},$$

avem

$$f^{(k)}(x) = \exp x, \text{ oricare ar fi } x \in \mathbb{R} \text{ şi } k \in \mathbb{N}.$$

Polinomul lui Taylor de ordin n ataşat funcţiei exponenţiale, $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, şi punctului $x_0 = 0$ este

$$(T_{n;0} \exp)(x) = 1 + \frac{1}{1!}x + \frac{1}{2!}x^2 + \cdots + \frac{1}{n!}x^n,$$

oricare ar fi $x \in \mathbb{R}$. $\Diamond$

Evident $T_{n;x_0} f$ este o funcţie indefinit derivabilă pe $\mathbb{R}$ şi, pentru orice $x \in \mathbb{R}$, avem

$$(T_{n;x_0} f)'(x) = f^{(1)}(x_0) + \frac{f^{(2)}(x_0)}{1!}(x - x_0) + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{(n-1)!}(x - x_0)^{n-1} =$$

$$= \left(T_{n-1;x_0} f'\right)(x),$$

$$(T_{n;x_0}f)''(x) = f^{(2)}(x_0) + \frac{f^{(3)}(x_0)}{1!}(x-x_0) + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{(n-2)!}(x-x_0)^{n-2} =$$
$$= \left(T_{n-2;x_0}f''\right)(x),$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$(T_{n;x_0}f)^{(n-1)}(x) = f^{(n-1)}(x_0) + \frac{f^{(n)}(x_0)}{1!}(x-x_0) =$$
$$= \left(T_{1;x_0}f^{(n-1)}\right)(x),$$
$$(T_{n;x_0}f)^{(n)}(x) = f^{(n)}(x_0) = \left(T_{0;x_0}f^{(n)}\right)(x),$$
$$(T_{n;x_0}f)^{(k)}(x) = 0, \text{ oricare ar fi } k \in \mathbb{N},\ k \geq n+1.$$

De aici deducem că
$$(T_{n;x_0}f)^{(k)}(x_0) = f^{(k)}(x_0), \text{ oricare ar fi } k \in \{0,1,\cdots,n\}$$
şi
$$(T_{n;x_0}f)^{(k)}(x_0) = 0, \text{ oricare ar fi } k \in \mathbb{N},\ k \geq n+1.$$

Prin urmare, polinomul lui Taylor de ordin n ataşat funcţiei f şi punctului x_0 cât şi derivatele lui până la ordinul n coincid în x_0 cu funcţia f şi respectiv cu derivatele ei până la ordinul n.

2. Formula lui Taylor

Definiţia 2.2.1 *Fie D o submulţime nevidă a mulţimii $\mathbb{R}$, $x_0 \in D$ şi $f : D \to \mathbb{R}$ o funcţie derivabilă de n ori în punctul x_0. Funcţia $R_{n;x_0}f : D \to \mathbb{R}$ definită prin*
$$(R_{n;x_0}f)(x) = f(x) - (T_{n;x_0}f)(x), \text{ oricare ar fi } x \in D$$
*se numeşte **restul Taylor de ordinul** n **ataşat funcţiei** f **şi punctului** x_0.*

Orice egalitate de forma
$$f = T_{n;x_0}f + R_{n;x_0}f,$$
*unde pentru $R_{n;x_0}f$ este dată o formulă de calcul, se numeşte **formulă Taylor de ordinul** n **corespunzătoare funcţiei** f **şi punctului** x_0. În acest caz $R_{n;x_0}f$ se numeşte restul de ordinul n al formulei lui Taylor.* $\diamondsuit$

Deoarece f şi $T_{n;x_0}f$ sunt derivabile de n ori în x_0, rezultă că şi restul $R_{n;x_0}f = f - T_{n;x_0}f$ este o funcţie derivabilă de n ori în x_0 şi
$$(R_{n;x_0}f)^{(k)}(x_0) = 0, \text{ oricare ar fi } k \in \{0,1,\cdots,n\}.$$

Pe de altă parte, funcţia $R_{n;x_0}f : D \to \mathbb{R}$ fiind derivabilă în x_0 este continuă în x_0 şi deci există
$$\lim_{x\to x_0} (R_{n;x_0}f)(x) = (R_{n;x_0}f)(x_0) = 0.$$

Aceasta înseamnă că pentru fiecare număr real $\varepsilon > 0$ există un număr real $\delta > 0$ astfel încât oricare ar fi $x \in D$ pentru care $|x - x_0| < \delta$ avem

$$|f(x) - (T_{n;x_0}f)(x)| < \varepsilon.$$

Prin urmare, pentru valorile lui $x \in D$, suficient de apropiate de x_0, valoarea $f(x)$ poate fi aproximată prin $(T_{n;x_0}f)(x)$.

În cele ce urmează, vom preciza acest rezultat.

Teorema 2.2.2 *Fie I un interval din $\mathbb{R}$, $x_0 \in I$ şi $f : I \to \mathbb{R}$ o funcţie derivabilă de n ori în punctul x_0. Atunci*

$$\lim_{x \to x_0} \frac{(R_{n;x_0}f)(x)}{(x - x_0)^n} = 0.$$

Demonstraţie. Aplicând de $n - 1$ ori regula lui l'Hôpital şi ţinând seama că

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f^{(n-1)}(x) - f^{(n-1)}(x_0)}{x - x_0} = f^{(n)}(x_0),$$

obţinem

$$\begin{aligned}
\lim_{x \to x_0} \frac{(R_{n;x_0}f)(x)}{(x - x_0)^n} &= \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - (T_{n;x_0}f)(x)}{(x - x_0)^n} = \\
&= \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x) - (T_{n;x_0}f)'(x)}{n(x - x_0)^{n-1}} = \cdots \\
\cdots &= \lim_{x \to x_0} \frac{f^{(n-1)}(x) - (T_{n;x_0}f)^{(n-1)}(x)}{n!(x - x_0)} = \\
&= \lim_{x \to x_0} \frac{f^{(n-1)}(x) - f^{(n-1)}(x_0) - f^{(n)}(x_0)(x - x_0)}{n!(x - x_0)} = \\
&= \frac{1}{n!} \lim_{x \to x_0} \left[\frac{f^{(n-1)}(x) - f^{(n-1)}(x_0)}{x - x_0} - f^{(n)}(x_0) \right] = 0.
\end{aligned}$$

■

Dacă notăm cu $\alpha_{n;x_0}f : I \to \mathbb{R}$ funcţia definită prin

$$(\alpha_{n;x_0}f)(x) = \begin{cases} \dfrac{(R_{n;x_0}f)(x)}{(x - x_0)^n}, & \text{dacă } x \in I \backslash \{x_0\} \\ 0, & \text{dacă } x = x_0, \end{cases}$$

atunci, din teorema 2.2.2 rezultă că funcţia $\alpha_{n;x_0}f$ este continuă în punctul x_0. Aşadar are loc următoarea afirmaţie cunoscută sub numele de teorema lui Taylor şi Young.

Teorema 2.2.3 (teorema lui Taylor-Young) *Fie I un interval din $\mathbb{R}$, $x_0 \in I$ şi $f : I \to \mathbb{R}$ o funcţie. Dacă funcţia f este derivabilă de n ori în punctul x_0, atunci există o funcţie $\alpha_{n;x_0}f : I \to \mathbb{R}$ care satisface următoarele proprietăţi:*

1^0 $(\alpha_{n;x_0}f)(x_0) = 0.$

2^0 *Funcţia $\alpha_{n;x_0}f$ este continuă în punctul x_0.*

3^0 *Pentru fiecare $x \in I$ are loc egalitatea:*

$$f(x) = (T_{n;x_0} f)(x) + (x - x_0)^n (\alpha_{n;x_0} f)(x) . \ \Diamond$$

Exemplul 2.2.4 Pentru funcţia exponenţială, $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, formula lui Taylor-Young, pentru $x_0 = 0$, are forma:

$$\exp x = 1 + \frac{1}{1!} x + \frac{1}{2!} x^2 + \cdots + \frac{1}{n!} x^n + x^n (\alpha_{n;0} f)(x),$$

oricare ar fi $x \in \mathbb{R}$, unde

$$\lim_{x \to 0} (\alpha_{n;0} f)(x) = (\alpha_{n;0} f)(0) = 0. \ \Diamond$$

În baza teoremei 2.2.2, dacă I este un interval din $\mathbb{R}$, $x_0 \in I$ şi $f : I \to \mathbb{R}$ este o funcţie derivabilă de n ori în x_0, atunci, pentru fiecare $x \in I$, avem

$$f(x) = (T_{n;x_0} f)(x) + o\left((x - x_0)^n\right) \text{ pentru } x \to x_0. \tag{2.2.24}$$

Aşadar următoarea teoremă are loc.

Teorema 2.2.5 *Fie I un interval din $\mathbb{R}$, $x_0 \in I$ şi $f : I \to \mathbb{R}$ o funcţie. Dacă funcţia f este derivabilă de n ori în punctul x_0, atunci pentru orice $x \in I$, egalitatea (2.2.24) are loc.*

Relaţia (2.2.24) se numeşte *formula lui Taylor cu restul sub forma lui Peano.* $\Diamond$

3. Forme ale restului formulei lui Taylor

Vom arăta, în continuare, că restul $R_{n;x_0} f$ al formulei lui Taylor se poate scrie sub forma

$$(R_{n;x_0} f)(x) = (x - x_0)^p K,$$

unde $p \in \mathbb{N}$ şi $K \in \mathbb{R}$.

Fie I un interval din $\mathbb{R}$, $f : I \to \mathbb{R}$ o funcţie derivabilă de $(n + 1)$ ori pe I, p un număr natural şi x şi x_0 două puncte distincte din I. Fie $K \in \mathbb{R}$ astfel încât să avem

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f^{(1)}(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f^{(2)}(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \ldots$$
$$\ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + (x - x_0)^p K.$$

Funcţia $\varphi : I \to \mathbb{R}$, definită, pentru orice $t \in I$, prin

$$\varphi(t) = f(t) + \frac{f^{(1)}(t)}{1!}(x - t) + \frac{f^{(2)}(t)}{2!}(x - t)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(t)}{n!}(x - t)^n +$$
$$+ (x - t)^p K,$$

este derivabilă pe I, deoarece toate funcţiile din membrul drept sunt derivabile pe I.

Întrucât $\varphi(x_0) = \varphi(x) = f(x)$, deducem că funcţia φ satisface ipotezele teoremei lui Rolle pe intervalul închis cu extremităţile x_0 şi x; atunci există cel puţin un punct c cuprins strict între x_0 şi x astfel încât $\varphi'(c) = 0$. Deoarece

$$\varphi'(t) = \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t) - p(x-t)^{p-1} K, \text{ oricare ar fi } t \in I, .$$

egalitatea $\varphi'(c) = 0$ devine

$$\frac{(x-c)^n}{n!} f^{(n+1)}(c) - p(x-c)^{p-1} K = 0,$$

de unde rezultă

$$K = \frac{(x-c)^{n-p+1}}{n!p} f^{(n+1)}(c).$$

Prin urmare, restul $R_{n;x_0}f$ are forma

$$(R_{n;x_0}f)(x) = \frac{(x-x_0)^p (x-x_0)^{n-p+1}}{n!p} f^{(n+1)}(c).$$

Aşadar am demonstrat următoarea afirmaţie, atribuită matematicianului englez Brook Taylor (18 august 1685-29 decembrie 1731), şi cunoscută sub numele de teorema lui Taylor.

Teorema 2.3.1 (teorema lui Taylor) *Fie I un interval din $\mathbb{R}$, $f : I \to \mathbb{R}$ o funcţie derivabilă de $n+1$ ori pe I, $x_0 \in I$ şi $p \in \mathbb{N}$. Atunci pentru fiecare $x \in I \setminus \{x_0\}$, există cel puţin un punct c cuprins strict între x şi x_0 astfel încât*

$$f(x) = (T_{n;x_0}f)(x) + (R_{n;x_0}f)(x),$$

unde

$$(R_{n;x_0}f)(x) = \frac{(x-x_0)^p (x-c)^{n-p+1}}{n!p} f^{(n+1)}(c). \;\Diamond \tag{2.3.25}$$

Forma generală a restului, dată în formula (2.3.25), a fost obţinută, în mod independent, de **Schlömilch** şi **Roche**, de aceea restul scris sub forma (2.3.25) se numeşte **restul lui Schlömilch-Roche**.

Două cazuri particulare fuseseră obţinute anterior de Lagrange şi Cauchy.

Cauchy obţine pentru rest formula:

$$(R_{n;x_0}f)(x) = \frac{(x-x_0)(x-c)^n}{n!} f^{(n+1)}(c), \tag{2.3.26}$$

care, evident, este restul lui Schlömilch-Roche pentru $p = 1$.

Lagrange obţine pentru rest formula:

$$(R_{n;x_0}f)(x) = \frac{(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(c). \tag{2.3.27}$$

care, evident, este restul lui Schlömilch-Roche pentru $p = n+1$.

Dacă f este o funcţie polinomială de gradul n, atunci, pentru orice $x_0 \in \mathbb{R}$,

$$(R_{n;x_0} f)(x) = 0, \text{ oricare ar fi } x \in \mathbb{R}.$$

Acesta a fost cazul studiat de Taylor. Tradiţia a consacrat numele de "*formula lui Taylor*" pentru toate cazurile studiate, afară de unul singur: $0 \in I$ şi $x_0 = 0$. Acest caz fusese, studiat anterior lui Taylor de Maclaurin. Tradiţia a consacrat următoarea definiţie.

Definiţia 2.3.2 *Formula lui Taylor de ordin n corespunzătoare funcţiei f şi punctului $x_0 = 0$, cu restul lui Lagrange, se numeşte* ***formula lui Maclaurin.****(1698 - 1746).* $\Diamond$

Exemplul 2.3.3 Pentru funcţia exponenţială $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ formula lui Maclaurin este

$$\exp x = 1 + \frac{1}{1!}x + \frac{1}{2!}x^2 + \cdots + \frac{1}{n!}x^n + (R_{n;0} f)(x),$$

unde

$$(R_{n;0} \exp)(x) = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \exp(c), \quad \text{cu } |c| < |x|.$$

Avem

$$|(R_{n;0} \exp)(x)| = \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} \exp(c) < \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} \exp|x|, \ x \in \mathbb{R}.$$

Cum pentru fiecare $x \in \mathbb{R}$,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} \exp|x| = 0,$$

deducem că seria

$$1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + \frac{1}{1!}x + \frac{1}{2!}x^2 + \cdots + \frac{1}{n!}x^n + \cdots,$$

este convergentă pentru orice $x \in \mathbb{R}$, şi suma ei este $\exp x$, adică

$$\exp x = 1 + \frac{1}{1!}x + \frac{1}{2!}x^2 + \cdots + \frac{1}{n!}x^n + \cdots, \text{ oricare ar fi } x \in \mathbb{R}. \ \Diamond$$

Similar obţinem că pentru orice $a > 0$, $a \neq 1$,

$$a^x = 1 + \frac{\ln a}{1!}x + \frac{\ln^2 a}{2!}x^2 + \cdots + \frac{\ln^n a}{n!}x^n + \cdots, \ x \in \mathbb{R}. \ \Diamond$$

Deoarece în teorema 2.3.1, c este cuprins strict între x şi x_0, deducem că numărul

$$\theta = \frac{c - x_0}{x - x_0} \in]0,1[$$

şi

$$c = x_0 + \theta(x - x_0).$$

Atunci restul $R_{n;x_0}f$ se poate exprima şi astfel:

$$(2.3.28)\quad \left(R_{n;x_0}f\right)(x) = \frac{(x-x_0)^{n+1}(1-\theta)^{n-p+1}}{n!p} f^{(n+1)}\left(x_0+\theta\left(x-x_0\right)\right), \quad (\text{Schlömilch} - \text{Roche})$$

(2.3.29)

$$\left(R_{n;x_0}f\right)(x) = \frac{(x-x_0)^{n+1}(1-\theta)^{n}}{n!} f^{(n+1)}\left(x_0+\theta\left(x-x_0\right)\right) \quad (\text{Cauchy})$$

$$(2.3.30)\quad \left(R_{n;x_0}f\right)(x) = \frac{(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}\left(x_0+\theta\left(x-x_0\right)\right) \quad (\text{Lagrange}).$$

Aşadar am obţinut următoarea teoremă.

Teorema 2.3.4 *Fie I un interval din $\mathbb{R}$, $f : I \to \mathbb{R}$ o funcţie derivabilă de $n+1$ ori pe I, $x_0 \in I$ şi $p \in \mathbb{N}$. Atunci pentru fiecare $x \in I \backslash \{x_0\}$, există cel puţin un număr $\theta \in]0,1[$ astfel încât să avem*

$$f(x) = \left(T_{n;x_0}f\right)(x) + \left(R_{n;x_0}f\right)(x),$$

unde $\left(R_{n;x_0}f\right)(x)$ este dat de (2.3.28).

Dacă $p=1$, obţinem (2.3.29), iar dacă $p=n+1$ atunci $\left(R_{n;x_0}f\right)(x)$ este dat de (2.3.30). $\lozenge$

Exemplul 2.3.5 Pentru funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definită prin

$$f(x) = \exp x, \text{ oricare ar fi } x \in \mathbb{R},$$

formula lui Maclaurin este

$$\exp x = 1 + \frac{1}{1!}x + \frac{1}{2!}x^2 + \cdots + \frac{1}{n!}x^n + \left(R_{n;0}f\right)(x),$$

unde

$$R_{n;0}f(x) = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}\exp(\theta x), \quad \theta \in]0,1[, \ x \in \mathbb{R}. \ \lozenge$$

4. Aplicaţii ale formulei lui Taylor

Folosind formula lui Taylor, putem stabili inegalităţi care altfel se deduc destul de greu.

Teorema 2.4.1 *Următoarele afirmaţii sunt adevărate:*

1^0 *Pentru fiecare număr natural n, avem*

$$1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} < \exp x,$$

oricare ar fi $x \in]0,+\infty[$.

2^0 *Oricare ar fi numerele naturale n şi m, avem*

$$1 + \frac{x}{1!} + \cdots + \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} < \exp x < 1 + \frac{x}{1!} + \cdots + \frac{x^{2m}}{(2m)!},$$

oricare ar fi $x \in]-\infty, 0[$.

Demonstraţie. 1^0 În baza formulei lui Maclaurin, pentru fiecare $x \in \mathbb{R}$, avem

$$\exp x = (T_{n;0} \exp)(x) + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \exp(\theta x), \text{ unde } \theta \in]0,1[.$$

Întrucât, pentru fiecare $x \in]0, +\infty[$,

$$\frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \exp(\theta x) > 0,$$

deducem că

$$\exp x > (T_{n;0} \exp)(x), \text{ oricare ar fi } x \in]0, +\infty[.$$

Celelalte afirmaţii se demonstrează similar.■

Formula lui Maclaurin, ne ajută, de multe ori să calculăm limite care altfel se calculează greu.

Exemplul 2.4.2 Să se calculeze

$$L := \lim_{x \searrow 0} \frac{\left(1 + x^{\sqrt{2}}\right)^{\sqrt{3}} - \left(1 + x^{\sqrt{3}}\right)^{\sqrt{2}}}{(\sin x)^{\sqrt{2}} - x^{\sqrt{3}}}.$$

Soluţie. Avem

$$(1+x)^a = 1 + \frac{a}{1!} x + o(x), \quad \text{pentru} \quad x \to 0.$$

şi atunci

$$\left(1 + x^{\sqrt{2}}\right)^{\sqrt{3}} = 1 + \frac{\sqrt{3}}{1!} x^{\sqrt{2}} + o\left(x^{\sqrt{2}}\right), \quad \text{pentru} \quad x \to 0,$$

şi

$$\left(1 + x^{\sqrt{3}}\right)^{\sqrt{2}} = 1 + \frac{\sqrt{2}}{1!} x^{\sqrt{3}} + o\left(x^{\sqrt{3}}\right), \quad \text{pentru} \quad x \to 0.$$

Întrucât

$$o\left(x^{\sqrt{2}}\right) - o\left(x^{\sqrt{3}}\right) = o\left(x^{\sqrt{2}}\right), \quad \text{pentru } x \to 0$$

urmează că

$$\frac{\left(1+x^{\sqrt{2}}\right)^{\sqrt{3}}-\left(1+x^{\sqrt{3}}\right)^{\sqrt{2}}}{(\sin x)^{\sqrt{2}}-x^{\sqrt{3}}}=\frac{1+\frac{\sqrt{3}}{1!}x^{\sqrt{2}}+o\left(x^{\sqrt{2}}\right)-1-\frac{\sqrt{2}}{1!}x^{\sqrt{3}}-o\left(x^{\sqrt{3}}\right)}{(\sin x)^{\sqrt{2}}-x^{\sqrt{3}}}=$$
$$=\frac{\sqrt{3}x^{\sqrt{2}}-\sqrt{2}x^{\sqrt{3}}+o\left(x^{\sqrt{2}}\right)}{(\sin x)^{\sqrt{2}}-x^{\sqrt{3}}}=$$
$$=\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}x^{\sqrt{3}-\sqrt{2}}+o\left(x^{\sqrt{2}}\right)/x^{\sqrt{2}}}{\left(\frac{\sin x}{x}\right)^{\sqrt{2}}-x^{\sqrt{3}-\sqrt{2}}}.$$

şi atunci

$$L:=\lim_{x\searrow 0}\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}x^{\sqrt{3}-\sqrt{2}}+o\left(x^{\sqrt{2}}\right)/x^{\sqrt{2}}}{\left(\frac{\sin x}{x}\right)^{\sqrt{2}}-x^{\sqrt{3}-\sqrt{2}}}=\sqrt{3},$$

deoarece

$$\lim_{x\searrow 0}\frac{o\left(x^{\sqrt{2}}\right)}{x^{\sqrt{2}}}=0.$$

■

5. Probleme propuse spre rezolvare

Exemplul 2.5.1 Scrieţi polinomul lui Taylor de ordinul $n=2m-1$ ataşat funcţiei sinus, $\sin:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, şi punctului $x_0=0$.

Exemplul 2.5.2 Scrieţi polinomul lui Taylor de ordinul $n=2m$ ataşat funcţiei cosinus, $\cos:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ şi punctului $x_0=0$.

Exemplul 2.5.3 Scrieţi formula lui Maclaurin de ordinul n pentru funcţia sinus, $\sin:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$.

Exemplul 2.5.4 Scrieţi formula lui Maclaurin de ordinul n pentru funcţia cosinus, $\cos:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$.

Exemplul 2.5.5 Scrieţi formula lui Maclaurin de ordinul n pentru funcţia $f:]-1,+\infty[\to\mathbb{R}$ definită prin

$$f(x)=\ln(1+x)\,,\ \text{oricare ar fi } x\in]-1,+\infty[.$$

Exemplul 2.5.6 Scrieţi formula lui Maclaurin de ordinul n pentru funcţia $f:]-1,+\infty[\to\mathbb{R}$ definită prin

$$f(x)=(1+x)^r\,,\ \text{oricare ar fi } x\in]-1,+\infty[,$$

unde $r\in\mathbb{R}$.

Exemplul 2.5.7 Fie $f:]0,+\infty[\to\mathbb{R}$ funcţia definită prin $f(x)=1/x$, oricare ar fi $x\in]0,+\infty[$. Să se scrie formula lui Taylor de ordinul n corespunzătoare funcţiei f şi punctului $x_0=1$.

Exemplul 2.5.8 Să se scrie formula lui Maclaurin de ordinul n corespunzătoare funcţiei:

a) $f:]-1,+\infty[\to\mathbb{R}$ definită prin $f(x)=x\ln(1+x)$, oricare ar fi $x\in]-1,+\infty[$;

b) $f:]-\infty,1[\to\mathbb{R}$ definită prin $f(x)=x\ln(1-x)$, oricare ar fi $x\in]-\infty,1[$;

c) $f:]-1,1[\to\mathbb{R}$ definită prin $f(x)=\sqrt{3x+4}$, oricare ar fi $x\in]-1,1[$;

d) $f:]-1/2,+\infty[\to\mathbb{R}$ definită prin $f(x)=1/\sqrt{2x+1}$, oricare ar fi $x\in]-1/2,+\infty[$.

Exemplul 2.5.9 Să se scrie formula lui Taylor de ordinul n corespunzătoare funcţiei f şi punctului x_0, dacă:
a) $f:]0,+\infty[\to\mathbb{R}$ este definită prin $f(x)=1/x$, oricare ar fi $x\in]0,+\infty[$ şi $x_0=2$;
b) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ este definită prin $f(x)=\cos(x-1)$, oricare ar fi $x\in\mathbb{R}$ şi $x_0=1$.

Exemplul 2.5.10 Să se determine funcţia polinomială $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ de gradul 4 pentru care avem: $f(0)=2$, $f'(0)=0$, $f''(0)=-6$, $f'''(0)=-6$, $f^{iv}(0)=72$.

Exemplul 2.5.11 Să se calculeze următoarele limite:

$$a)\ \lim_{x\to0}\frac{\sin(x-\sin x)}{\sqrt{1+x^3}-1};\qquad b)\ \lim_{x\to0}\frac{\sin 3x+4\sin^3 x-3\ln(1+x)}{(1-\mathrm{e}^x)\sin x};$$

Exemplul 2.5.12 Să se calculeze următoarele limite:

$$a)\ \lim_{x\to0}\frac{3\tan 4x-4\tan 3x}{3\sin 4x-4\sin 3x};\qquad b)\ \lim_{x\to1}\frac{ax^{a+1}-(a+1)\,x^a+1}{x^{b+1}-x^b-x+1};$$

$$c)\ \lim_{x\to0}\left(\frac{2}{\sin^2}+\frac{1}{\ln(\cos x)}\right);\qquad d)\ \lim_{x\to2}\ \left(2^x+3^x-12\right)^{\tan\frac{\pi}{4x}}.$$

Observaţia 2.5.13 Pentru mai multe detalii puteţi consulta [**5**] şi [**2**].

CAPITOLUL 3

Integrala Riemann

Noţiunea de integrală a apărut din nevoia practică de a determina aria unor figuri plane, precum şi din considerente de fizică. Calculul integral, aşa cum îl concepem azi, a fost dezvoltat în secolul al XVII-lea de către Newton şi Leibniz. Newton numeşte *fluxiune* - derivata şi *fluentă* - primitiva. Leibniz introduce simbolurile d şi $\int$ şi deduce regulile de calcul ale integralelor nedefinite.

Definiţia riguroasă a integralei, ca limita sumelor integrale, aparţine lui Cauchy (1821) . Prima demonstraţie corectă a existenţei integralei unei funcţii continue este dată de Darboux în 1875. În a doua jumătate a secolului al XIX-lea, Riemann, Du Bois-Reymond şi Lebesque dau condiţii pentru integrabilitatea funcţiilor discontinue. În 1894, Stieltjes introduce o nouă integrală, iar în 1902, Lebesque formulează noţiunea mai generală de integrală.

1. Diviziuni ale unui interval compact

Definiţia 3.1.1 *Fie $a, b \in \mathbb{R}$ cu $a < b$. Se numeşte* ***diviziune a intervalului*** $[a, b]$ *orice sistem ordonat*

$$\Delta = (x_0, x_1, ..., x_p)$$

de $p + 1$ puncte $x_0, x_1, ..., x_p$ din intervalul $[a, b]$ cu proprietatea că

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{p-1} < x_p = b. \square$$

Dacă $\Delta = (x_0, x_1, ..., x_p)$ este o diviziune a intervalului $[a, b]$, atunci $x_0, x_1, ..., x_p$ se numesc **puncte ale diviziunii** Δ.

Vom nota cu Div $[a, b]$ mulţimea formată din toate diviziunile intervalului $[a, b]$, deci

$$\text{Div}\,[a, b] = \{\Delta : \ \Delta \text{ este diviziune a intervalului } [a, b]\}.$$

Dacă $\Delta = (x_0, x_1, ..., x_p)$ este o diviziune a intervalului $[a, b]$, atunci numărul

$$\|\Delta\| = \max\{x_1 - x_0, x_2 - x_1, ..., x_p - x_{p-1}\}$$

se numeşte **norma diviziunii** Δ.

Exemplul 3.1.2 Sistemele

$$\Delta^1 = (0, 1) , \quad \Delta^2 = (0, 1/3, 1) , \quad \Delta^3 = (0, 1/4, 1/2, 3/4, 1)$$

sunt diviziuni ale intervalului $[0,1]$. Aceste diviziuni au normele

$$\left\|\Delta^1\right\| = 1,\ \ \left\|\Delta^2\right\| = 2/3,\ \ \left\|\Delta^3\right\| = 1/4. \ \square$$

Teorema 3.1.3 *Fie $a, b \in \mathbb{R}$ cu $a < b$. Pentru fiecare număr real $\varepsilon > 0$ există cel puţin o diviziune Δ a intervalului $[a,b]$ cu proprietatea că $\|\Delta\| < \varepsilon$.*

Demonstraţie. Fie $\varepsilon > 0$ şi p un număr natural cu proprietatea că $(b-a)/p < \varepsilon$. Dacă $h = (b-a)/p$, atunci sistemul ordonat

$$\Delta = (a, a+h, a+2h, \cdots, a+(p-1)h, b)$$

este o diviziune a intervalului $[a,b]$. Mai mult $\|\Delta\| = h < \varepsilon$. ■

Definiţia 3.1.4 *Fie $a, b \in \mathbb{R}$ cu $a < b$ şi $\Delta = (x_0, x_1, ..., x_p)$ şi $\Delta' = \left(x_0', x_1', \cdots, x_q'\right)$ două diviziuni ale intervalului $[a,b]$. Spunem că diviziunea Δ este **mai fină** decât diviziunea Δ' şi scriem $\Delta \supseteq \Delta'$ (sau $\Delta' \subseteq \Delta$) dacă*

$$\{x_0', x_1', \cdots, x_q'\} \subseteq \{x_0, x_1, \cdots, x_p\}. \ \Diamond$$

Teorema următoare afirmă că prin trecerea la o diviziune mai fină, norma diviziunii nu creşte.

Teorema 3.1.5 *Fie $a, b \in \mathbb{R}$ cu $a < b$ şi Δ şi Δ' două diviziuni ale intervalului $[a,b]$. Dacă diviziunea Δ este mai fină decât diviziunea Δ', atunci $\|\Delta\| \le \|\Delta'\|$.*

Demonstraţie. Este imediată. ■

Observaţia 3.1.6 Dacă $\Delta,\ \Delta' \in \operatorname{Div}[a,b]$, atunci din $\|\Delta\| \le \|\Delta'\|$ nu rezultă, în general, că $\Delta' \subseteq \Delta$. $\Diamond$

Definiţia 3.1.7 *Fie $a, b \in \mathbb{R}$ cu $a < b$. Dacă $\Delta' = \left(x_0', x_1', \cdots, x_p'\right)$ şi $\Delta'' = \left(x_0'', x_1'', ..., x_q''\right)$ sunt diviziuni ale intervalului $[a,b]$, atunci diviziunea $\Delta = (x_0, x_1, \cdots, x_r)$ a intervalului $[a,b]$ ale cărei puncte sunt elementele mulţimii $\{x_0', x_1', ..., x_p'\} \cup \{x_0'', x_1'', \cdots, x_q''\}$, luate în ordine strict crescătoare, se numeşte **reuniunea** lui Δ' cu Δ'' şi se notează cu $\Delta' \cup \Delta''$.* $\Diamond$

Teorema 3.1.8 *Fie $a, b \in \mathbb{R}$ cu $a < b$. Dacă Δ' şi Δ'' sunt diviziuni ale intervalului $[a,b]$, atunci*

1^0 $\Delta' \cup \Delta'' \supseteq \Delta'$ *şi* $\Delta' \cup \Delta'' \supseteq \Delta''$.

2^0 $\|\Delta' \cup \Delta''\| \le \|\Delta'\|$ *şi* $\|\Delta' \cup \Delta''\| \, \|\Delta''\|$.

Demonstraţie. Este imediată. ■

Definiţia 3.1.9 *Fie $a, b \in \mathbb{R}$ cu $a < b$ şi $\Delta = (x_0, x_1, ..., x_p) \in Div[a,b]$. Se numeşte **sistem de puncte intermediare ataşat diviziunii** Δ orice sistem $\xi = (\xi_1, \xi_2, ..., \xi_p)$ de p puncte $\xi_1, \xi_2, ..., \xi_p \in [a,b]$ care satisfac relaţiile*

$$x_{i-1} \le \xi_i \le x_i, \ \ \textit{oricare ar fi } i \in \{1, ..., p\}. \ \Diamond$$

Vom nota cu $\mathrm{Pi}(\Delta)$ mulţimea formată din toate sistemele de puncte intermediare ataşate diviziunii Δ, deci

$$\mathrm{Pi}(\Delta) = \{\xi : \xi \text{ este sistem de puncte intermediare ataşat diviziunii } \Delta\}.$$

2. Integrala Riemann

Definiţia 3.2.1 *Fie $a, b \in \mathbb{R}$ cu $a < b$, $\Delta = (x_0, x_1, ..., x_p)$ o diviziune a intervalului $[a, b]$, $\xi = (\xi_1, \xi_2, ..., \xi_p)$ un sistem de puncte intermediare ataşat diviziunii Δ şi $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ o funcţie. Numărul real*

$$\sigma(f; \Delta, \xi) = \sum_{i=1}^{p} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1})$$

se numeşte ***suma Riemann ataşată funcţiei*** f ***diviziunii*** Δ ***şi sistemului*** ξ. $\square$

Definiţia 3.2.2 *Fie $a, b \in \mathbb{R}$ cu $a < b$ şi $f : [a, b] \to \mathbb{R}$. Spunem că funcţia f este* ***integrabilă Riemann*** *pe $[a, b]$ (sau, simplu,* ***integrabilă****) dacă oricare ar fi şirul $(\Delta^n)_{n\in\mathbb{N}}$ de diviziuni $\Delta^n \in \mathrm{Div}[a, b]$, $(n \in \mathbb{N})$ cu $\lim\limits_{n\to\infty} \|\Delta^n\| = 0$ şi oricare ar fi şirul $(\xi^n)_{n\in\mathbb{N}}$ de sisteme $\xi^n \in \mathrm{Pi}(\Delta^n)$, $(n \in \mathbb{N})$, şirul $(\sigma(f; \Delta^n, \xi^n))_{n\in\mathbb{N}}$ al sumelor Riemann $\sigma(f; \Delta^n, \xi^n)$, $(n \in \mathbb{N})$ este convergent.* $\square$

Teorema 3.2.3 *Fie $a, b \in \mathbb{R}$ cu $a < b$ şi $f : [a, b] \to \mathbb{R}$. Funcţia f este integrabilă Riemann pe $[a, b]$ dacă şi numai dacă există un număr real I cu proprietatea că pentru fiecare şir $(\Delta^n)_{n\in\mathbb{N}}$ de diviziuni $\Delta^n \in \mathrm{Div}[a, b]$, $(n \in \mathbb{N})$ cu $\lim\limits_{n\to\infty} \|\Delta^n\| = 0$ şi pentru fiecare şir $(\xi^n)_{n\in\mathbb{N}}$ de sisteme $\xi^n \in \mathrm{Pi}(\Delta^n)$, $(n \in \mathbb{N})$, şirul $(\sigma(f; \Delta^n, \xi^n))_{n\in\mathbb{N}}$ al sumelor Riemann $\sigma(f; \Delta^n, \xi^n)$, $(n \in \mathbb{N})$ este convergent către I.*

Demonstraţie. Necesitatea. Fie $\left(\widetilde{\Delta}^n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ şirul de diviziuni cu termenul general:

$$\widetilde{\Delta}^n = (a, a + h, a + 2h, ...a + (n-1)h, b), \quad (n \in \mathbb{N})$$

şi $(\xi^n)_{n\in\mathbb{N}}$ şirul cu termenul general:

$$\widetilde{\xi}^n = (a, a + h, a + 2h, ...a + (n-1)h), \quad (n \in \mathbb{N})$$

unde

$$h := \frac{b-a}{n}.$$

Evident, pentru fiecare $n \in \mathbb{N}$ avem:

$$\widetilde{\Delta}^n \in \mathrm{Div}[a, b], \quad \|\Delta^n\| = \frac{(b-a)}{n} \quad \text{şi} \quad \widetilde{\xi}^n \in \mathrm{Pi}\left(\widetilde{\Delta}^n\right).$$

Atunci şirul $\left(\sigma\left(f;\widetilde{\Delta}^n,\widetilde{\xi}^n\right)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ este convergent; fie $I\in\mathbb{R}$ limita şirului $\left(\sigma\left(f;\widetilde{\Delta}^n,\widetilde{\xi}^n\right)\right)_{n\in\mathbb{N}}$.

Vom arăta că oricare ar fi şirul $(\Delta^n)_{n\in\mathbb{N}}$ de diviziuni ale intervalului $[a,b]$ cu $\lim\limits_{n\to\infty}\|\Delta^n\|=0$ şi oricare ar fi şirul $(\xi^n)_{n\in\mathbb{N}}$ de sisteme $\xi^n\in\mathrm{Pi}\,(\Delta^n)$, $(n\in\mathbb{N})$, şirul $(\sigma\,(f;\Delta^n,\xi^n))_{n\in\mathbb{N}}$ al sumelor Riemann $\sigma\,(f;\Delta^n,\xi^n)$, $(n\in\mathbb{N})$ este convergent către I.

Fie deci $(\Delta^n)_{n\in\mathbb{N}}$ un şir de diviziuni $\Delta^n\in\mathrm{Div}\,[a,b]$, $(n\in\mathbb{N})$ cu $\lim\limits_{n\to\infty}\|\Delta^n\|=0$ şi fie $(\xi^n)_{n\in\mathbb{N}}$ un şir de sisteme $\xi^n\in\mathrm{Pi}\,(\Delta^n)$, $(n\in\mathbb{N})$. Atunci şirurile $(\underline{\Delta}^n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(\underline{\xi}^n)_{n\in\mathbb{N}}$, unde

$$\underline{\Delta}^n=\begin{cases}\widetilde{\Delta}^k, & \text{dacă } n=2k\\ \Delta^k, & \text{dacă } n=2k+1,\end{cases}\qquad \underline{\xi}^n=\begin{cases}\widetilde{\xi}^k, & \text{dacă } n=2k\\ \xi^k, & \text{dacă } n=2k+1,\end{cases}$$

au următoarele proprietăţi:

i) $\underline{\Delta}^n\in\mathrm{Div}\,[a,b]$, $\underline{\xi}^n\in\mathrm{Pi}\,(\underline{\Delta}^n)$, oricare ar fi $n\in\mathbb{N}$;

ii) $\lim\limits_{n\to\infty}\|\underline{\Delta}^n\|=0$.

In baza ipotezei, şirul $\left(\sigma\left(f;\underline{\Delta}^n,\underline{\xi}^n\right)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ este convergent; fie $\underline{I}$ limita lui. Tinând seama că şirul $\left(\sigma\left(f;\widetilde{\Delta}^n,\widetilde{\xi}^n\right)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ este subşir al şirului convergent $\left(\sigma\left(f;\underline{\Delta}^n,\underline{\xi}^n\right)\right)_{n\in\mathbb{N}}$, deducem că $\underline{I}=I$. Intrucât $(\sigma\,(f;\Delta^n,\xi^n))_{n\in\mathbb{N}}$ este subşir al şirului convergent $\left(\sigma\left(f;\underline{\Delta}^n,\underline{\xi}^n\right)\right)_{n\in\mathbb{N}}$, obţinem că şirul $(\sigma\,(f;\Delta^n,\xi^n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge către I.

Suficienţa rezultă imediat din definiţie. ■

Teorema 3.2.4 (unicitatea integralei) *Fie $a,b\in\mathbb{R}$ cu $a<b$ şi $f:[a,b]\to\mathbb{R}$. Atunci există cel mult un număr real I cu proprietatea că pentru fiecare şir $(\Delta^n)_{n\in\mathbb{N}}$ de diviziuni $\Delta^n\in\mathrm{Div}\,[a,b]$, $(n\in\mathbb{N})$ cu $\lim\limits_{n\to\infty}\|\Delta^n\|=0$ şi pentru fiecare şir $(\xi^n)_{n\in\mathbb{N}}$ de sisteme $\xi^n\in\mathrm{Pi}\,(\Delta^n)$, $(n\in\mathbb{N})$, şirul $(\sigma\,(f;\Delta^n,\xi^n))_{n\in\mathbb{N}}$ al sumelor Riemann $\sigma\,(f;\Delta^n,\xi^n)$, $(n\in\mathbb{N})$ este convergent către I.* □

Prin urmare, fiind dată o funcţie $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ putem avea numai una din următoarele două situaţii:

a) există un număr real I cu proprietatea că pentru fiecare şir $(\Delta^n)_{n\in\mathbb{N}}$ de diviziuni $\Delta^n\in\mathrm{Div}\,[a,b]$, $(n\in\mathbb{N})$ cu $\lim\limits_{n\to\infty}\|\Delta^n\|=0$ şi fiecare şir $(\xi^n)_{n\in\mathbb{N}}$ de sisteme $\xi^n\in\mathrm{Pi}\,(\Delta^n)$, $(n\in\mathbb{N})$, şirul $(\sigma\,(f;\Delta^n,\xi^n))_{n\in\mathbb{N}}$ al sumelor Riemann $\sigma\,(f;\Delta^n,\xi^n)$, $(n\in\mathbb{N})$ este convergent către I.

In acest caz, în baza teoremei 3.2.4, numărul real I este unic. Numărul real I se va numi **integrala Riemann a funcţiei f pe intervalul** $[a,b]$ şi se va nota cu:

$$I:=\int_a^b f\,(x)\,\mathrm{d}x.$$

b) Nu există nici un număr real I cu proprietatea că pentru fiecare şir $(\Delta^n)_{n\in\mathbb{N}}$ de diviziuni $\Delta^n\in\mathrm{Div}\,[a,b]$, $(n\in\mathbb{N})$ cu $\lim\limits_{n\to\infty}\|\Delta^n\|=0$ şi fiecare şir

$(\xi^n)_{n\in\mathbb{N}}$ de sisteme $\xi^n \in \mathrm{Pi}(\Delta^n)$, $(n \in \mathbb{N})$, şirul $(\sigma(f;\Delta^n,\xi^n))_{n\in\mathbb{N}}$ al sumelor Riemann $\sigma(f;\Delta^n,\xi^n)$, $(n \in \mathbb{N})$ este convergent către I. In acest caz funcţia f nu este integrabilă Riemann pe $[a,b]$. Prin urmare o funcţie $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ nu este integrabilă Riemann pe $[a,b]$ dacă şi numai dacă oricare ar fi numărul real I există un şir $(\Delta^n)_{n\in\mathbb{N}}$ de diviziuni $\Delta^n \in \mathrm{Div}[a,b]$, $(n \in \mathbb{N})$ cu $\lim\limits_{n\to\infty}\|\Delta^n\| = 0$ şi un şir $(\xi^n)_{n\in\mathbb{N}}$ de sisteme $\xi^n \in \mathrm{Pi}(\Delta^n)$, $(n \in \mathbb{N})$, cu proprietatea că şirul $(\sigma(f;\Delta^n,\xi^n))_{n\in\mathbb{N}}$ al sumelor Riemann $\sigma(f;\Delta^n,\xi^n)$, $(n \in \mathbb{N})$ nu converge către I.

3. Proprietăţi de monotonie ale integralei Riemann

Teorema 3.3.1 *Fie $a,b\in\mathbb{R}$ cu $a<b$ şi $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ o funcţie integrabilă Riemann pe $[a,b]$. Dacă*

$$f(x)\geq 0,\ \ \textit{oricare ar fi } x\in[a,b],$$

atunci

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \geq 0.$$

Demonstraţie. Fie $(\Delta^n)_{n\geq 1}$ un şir de diviziuni

$$\Delta^n = \left(x_0^n, x_1^n, ..., x_{m_n}^n\right) \in \mathrm{Div}[a,b], (n\in\mathbb{N})$$

cu $\lim\limits_{n\to\infty}\|\Delta^n\| = 0$ şi $(\xi^n)_{n\geq 1}$ un şir de sisteme

$$\xi^n = \left(\xi_1^n, \xi_2^n, ..., \xi_{m_n}^n\right) \in Pi(\Delta^n),\ \ (n\in\mathbb{N}).$$

Din faptul că funcţia f este integrabilă Riemann pe $[a,b]$, avem că

$$\lim_{n\to\infty}\sigma(f;\Delta^n,\xi^n) = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x. \tag{3.3.31}$$

Pe de altă parte, funcţia f fiind pozitivă, pentru orice număr natural n avem

$$\sigma(f;\Delta^n,\xi^n) = \sum_{i=1}^{m_n} f(\xi_i^n)\left(x_i^n - x_{i-1}^n\right) \geq 0$$

şi deci, în baza teoremei de trecere la limită în inegalităţi, din (3.3.31) deducem concluzia teoremei. ■

Teorema 3.3.2 *Fie $a,b\in\mathbb{R}$ cu $a<b$ şi $f,g:[a,b]\to\mathbb{R}$ două funcţii integrabile Riemann pe $[a,b]$. Dacă*

$$f(x)\leq g(x),\ \ \textit{oricare ar fi } x\in[a,b],$$

atunci

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \ \leq \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x.$$

Demonstraţie. Funcţia $f-g$ satisface ipotezele teoremei 3.3.1; atunci

$$\int_a^b (f-g)(x)\,\mathrm{d}x \geq 0.$$

Intrucât

$$\int_a^b (f-g)(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x - \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$$

teorema este demonstrată. ■

Teorema 3.3.3 *Fie $a,b \in \mathbb{R}$ cu $a<b$ şi $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ o funcţie integrabilă Riemann pe $[a,b]$ şi m,M două numere reale cu proprietatea că:*

$$m \leq f(x) \leq M, \text{ oricare ar fi } x \in [a,b].$$

Atunci

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leq M(b-a).$$

Demonstraţie. Aplicând teorema 3.3.2 funcţiei f şi funcţiilor constante m şi M, obţinem

$$m(b-a) = \int_a^b m\mathrm{d}x \leq \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leq \int_a^b M\mathrm{d}x = M(b-a).$$

■

Teorema 3.3.4 *Fie $a,b \in \mathbb{R}$ cu $a<b$. Dacă funcţia $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ este integrabilă Riemann pe $[a,b]$, atunci funcţia $|f|$ este integrabilă Riemann pe $[a,b]$ şi are loc inegalitatea*

$$\left|\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right| \leq \int_a^b |f|(x)\,\mathrm{d}x. \tag{3.3.32}$$

Demonstraţie. Funcţia f fiind integrabilă Riemann pe $[a,b]$ este mărginită pe $[a,b]$, prin urmare există un număr real $M>0$ cu proprietatea că

$$|f(x)| \leq M, \text{ oricare ar fi } x \in [a,b].$$

Fie $g:[-M,M]\to\mathbb{R}$ funcţia definită prin

$$g(t) = |t|, \text{ oricare ar fi } t \in [-M,M].$$

Deoarece pentru orice t', $t'' \in [a,b]$ avem

$$\left|g(t') - g(t'')\right| = \left||t'| - |t''|\right| \leq \left|t'-t''\right|,$$

rezultă că funcţia g este lipschitziană şi atunci funcţia $|f| = g\circ f$ este integrabilă Riemann pe $[a,b]$.

Pentru a dovedi inegalitatea $(3.3.32)$, să considerăm un şir $(\Delta^n)_{n\geq 1}$ de diviziuni $\Delta^n \in \mathrm{Div}\,[a,b]$, $(n\in\mathbb{N})$ cu proprietatea că $\lim\limits_{n\to\infty} \|\Delta^n\| = 0$ şi un

şir de sisteme $\xi^n \in Pi(\Delta^n)$, $(n \in \mathbb{N})$. Din faptul că funcţiile f şi $|f|$ sunt integrabile Riemann pe $[a,b]$, rezultă
(3.3.33)
$$\lim_{n\to\infty} \sigma(f;\Delta^n,\xi^n) = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \quad \text{şi} \quad \lim_{n\to\infty} \sigma(|f|;\Delta^n,\xi^n) = \int_a^b |f|(x)\,\mathrm{d}x.$$

Intrucât, pentru fiecare $n \in \mathbb{N}$, avem
$$|\sigma(f;\Delta^n,\xi^n)| \le \sigma(|f|;\Delta^n,\xi^n),$$
din $(3.3.33)$, în baza teoremei de trecere la limită în inegalităţi, deducem că inegalitatea (3.3.32) are loc. ■

4. Primitive: definiţia primitivei şi a primitivabilităţii

În acest capitol vom introduce o clasă importantă de funcţii reale şi anume **clasa funcţiilor care admit primitive**. Conceptul de **primitivă** leagă între ele două concepte fundamentale ale Analizei Matematice: **derivata** şi **integrala**. Vom aborda probleme de natură **calitativă** privind studiul existenţei primitivelor precum şi de natura **calculatorie** relative la metode de calcul de primitive.

Definiţia 3.4.1 *Fie D o submulţime nevidă a mulţimii numerelor reale $\mathbb{R}$, $f : D \to \mathbb{R}$ o funcţie şi I o submulţime nevidă a mulţimii D. Spunem că funcţia f* ***admite primitive*** *(sau că este* ***primitivabilă****) pe I dacă există o funcţie $F : I \to \mathbb{R}$ astfel încât:*

$i)$ funcţia F este derivabilă pe I;

$ii)$ $F'(x) = f(x)$, oricare ar fi $x \in I$.

Dacă funcţia f admite primitive pe mulţimea de definiţie D, atunci spunem simplu că funcţia f ***admite primitive*** *(sau că este* ***primitivabilă****).* □

Exemplul 3.4.2 Funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definită prin $f(x) = x$, oricare ar fi $x \in \mathbb{R}$, admite primitive pe $\mathbb{R}$ deoarece funcţia derivabilă $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definită prin $F(x) = x^2/2$, oricare ar fi $x \in \mathbb{R}$, are proprietatea că $F' = f$. □

Definiţia 3.4.3 *Fie D o submulţime nevidă a mulţimii numerelor reale $\mathbb{R}$, $f : D \to \mathbb{R}$ o funcţie şi I o submulţime nevidă a mulţimii D. Se numeşte* ***primitivă a funcţiei*** *f pe mulţimea I orice funcţie $F : I \to \mathbb{R}$ care satisface următoarele proprietăţi:*

$i)$ funcţia F este derivabilă pe I;

$ii)$ $F'(x) = f(x)$, oricare ar fi $x \in I$.

Dacă F este o primitivă a funcţiei f pe mulţimea de definiţie D a funcţiei f, atunci se spune simplu că funcţia F este primitivă a funcţiei f. □

Teorema 3.4.4 *Fie I un interval din $\mathbb{R}$ şi $f : I \to \mathbb{R}$ o funcţie. Dacă $F_1 : I \to \mathbb{R}$ şi $F_2 : I \to \mathbb{R}$ sunt două primitive ale funcţiei f pe I, atunci* *există un număr real c astfel încât*

$$F_2(x) = F_1(x) + c, \text{ oricare ar fi } x \in I.$$

(*Oricare două primitive ale unei funcţii primitivabile diferă printr-o constantă*).

Demonstraţie. Funcţiile F_1 şi F_2 fiind primitive ale funcţiei f, sunt derivabile şi $F_1' = F_2' = f$, deci

$$(F_2 - F_1)' = F_2' - F_1' = 0.$$

Funcţia derivabilă $F_2 - F_1$ având derivata nulă pe intervalul I, este constatntă pe acest interval. Prin urmare, există un număr real c astfel încât

$$F_2(x) - F_1(x) = c, \text{ oricare arfi } x \in I.$$

■

Observaţia 3.4.5 In teorema 3.4.4, ipoteza că mulţimea I este interval este esenţială. Intr-adevăr, pentru funcţia $f : \mathbb{R}\backslash\{0\} \to \mathbb{R}$ definită prin

$$f(x) = 0, \text{ oricare ar fi } x \in \mathbb{R}\backslash\{0\},$$

funcţiile $F_1, F_2 : \mathbb{R}\backslash\{0\} \to \mathbb{R}$ definite prin

$$F_1(x) = 0, \text{ oricare ar fi } x \in \mathbb{R}\backslash\{0\},$$

respectiv

$$F_2(x) = \begin{cases} 0, & \text{dacă } x < 0 \\ 1, & \text{dacă } x > 0, \end{cases}$$

sunt primitive ale funcţiei f pe $\mathbb{R}\backslash\{0\}$. Să observăm că nu există $c \in \mathbb{R}$ ca să avem $F_2(x) = F_1(x) + c$, oricare ar fi $x \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$. Subliniem faptul că $\mathbb{R}\backslash\{0\}$ nu este interval. □

Definiţia 3.4.6 *Fie I un interval din $\mathbb{R}$ şi $f : I \to \mathbb{R}$ o funcţie care admite primitive pe intervalul I. Mulţimea tuturor primitivelor funcţiei f pe intervalul I se numeşte **integrala nedefinită** a funcţiei f pe intervalul I şi se notează cu simbolul*

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x, \quad x \in I.$$

*Operaţia de calculare a primitivelor funcţiei f se numeşte **integrare**.*

Observaţia 3.4.7 Menţionăm că simbolul $\int f(x)\,\mathrm{d}x$ trebuie privit ca o notaţie indivizibilă, adică părţilor $\int$ sau $\mathrm{d}x$, luate separat, nu li se atribuie nici o semnificaţie. □

Fie I un interval din $\mathbb{R}$ şi $\mathfrak{F}(I;\mathbb{R})$ mulţimea tuturor funcţiilor definite pe I cu valori în $\mathbb{R}$. Dacă $\mathcal{G}$ şi $\mathcal{H}$ sunt submulţimi nevide ale lui $\mathfrak{F}(I,\mathbb{R})$ şi a este un număr real, atunci

$$\mathcal{G} + \mathcal{H} = \{f : I \to \mathbb{R}\text{: există } g \in \mathcal{G} \text{ şi } h \in \mathcal{H} \text{ astfel încât } \ f = g + h\},$$

şi

$$a\mathcal{G} = \{f : I \to \mathbb{R}\text{: există } g \in \mathcal{G} \text{ astfel încât } \ f = ag\}.$$

Dacă $\mathcal{G}$ este formată dintr-un singur element g_0, adică $\mathcal{G} = \{g_0\}$, atunci în loc de $\mathcal{G} + \mathcal{H} = \{g_0\} + \mathcal{H}$ vom scrie simplu $g_0 + \mathcal{H}$.

In cele ce urmează vom nota cu $\mathcal{C}$ mulţimea tuturor funcţiilor constante definite pe I cu valori în $\mathbb{R}$, adică

$$\mathcal{C} = \{f : I \to \mathbb{R} : \text{ există } c \in \mathbb{R} \text{ astfel încât } f(x) = c, \text{ oricare ar fi } x \in I\}.$$

Se constată imediat că:

a) $\mathcal{C} + \mathcal{C} = \mathcal{C}$;

b) $a\mathcal{C} = \mathcal{C}$, oricare ar fi $a \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$,

adică suma a două funcţii constante este tot o funcţie constantă, iar o funcţie constantă înmulţită cu un număr real este tot o funcţie constantă.

Cu aceste observaţii, să ne reamintim că dacă $F_0 : I \to \mathbb{R}$ este o primitivă a funcţiei $f : I \to \mathbb{R}$ pe intervalul $I \subseteq \mathbb{R}$, atunci orice altă primitivă $F : I \to \mathbb{R}$ a lui f pe I este de forma $F = F_0 + c$, unde $c : I \to \mathbb{R}$ este o funcţie constantă, adică $c \in \mathcal{C}$. Atunci

$$\int f(x)\mathrm{d}x = \{F \in \mathfrak{F}(I, \mathbb{R}) : \ F \text{ este primitivă a lui } f \text{ pe } I\} =$$

$$= \{F_0 + c : \ c \in \mathcal{C}\} = F_0 + \mathcal{C}.$$

Observaţia 3.4.8 Fie $f : I \to \mathbb{R}$ o funcţie care admite primitive pe I şi fie $F_0 : I \to \mathbb{R}$ o primitivă a funcţiei f pe I. Ţinând seama de observaţia 3.4.5, avem că

$$\int f(x)\mathrm{d}x = \{ \ F : I \to \mathbb{R} : \ F \text{ este primitivă a funcţiei } f\} = F_0 + \mathcal{C}.$$

Rezultă că

$$\int f(x)\mathrm{d}x + \mathcal{C} = (F_0 + \mathcal{C}) + \mathcal{C} = F_0 + (\mathcal{C} + \mathcal{C}) = F_0 + \mathcal{C},$$

deci

$$\int f(x)\mathrm{d}x + \mathcal{C} = \int f(x)\mathrm{d}x.$$

Observaţia 3.4.9 Dacă funcţia $f : I \to \mathbb{R}$ admite primitive pe intervalul I şi $F : I \to \mathbb{R}$ este o primitivă a funcţiei f pe I, atunci

$$\int f(x)\mathrm{d}x = F + \mathcal{C}$$

sau

$$\int F'(x)\mathrm{d}x = F + \mathcal{C}.$$

5. Primitivabilitatea funcţiilor continue

În cele ce urmează vom arăta că funcţiile continue admit primitive.

Teorema 3.5.1 *Fie I un interval din $\mathbb{R}$, $x_0 \in I$ şi $f : I \to \mathbb{R}$ o funcţie local integrabilă Riemann pe I. Dacă funcţia f este continuă în punctul x_0, atunci pentru orice $a \in I$, funcţia $F : I \to \mathbb{R}$ definită prin*

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt, \text{ oricare ar fi } x \in I,$$

este derivabilă în punctul x_0 şi $F'(x_0) = f(x_0)$.

Demonstraţie. Evident $F(a) = 0$. Fie $\varepsilon > 0$. Deoarece funcţia f este continuă în x_0, există un număr real $\delta > 0$ astfel încât pentru orice $t \in I$ cu $|t - x_0| < \delta$ să avem

$$|f(t) - f(x_0)| < \varepsilon/2,$$

sau echivalent

$$f(x_0) - \frac{\varepsilon}{2} < f(t) < f(x_0) + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Fie $x \in I \backslash \{x_0\}$ cu $|x - x_0| < \delta$. Distingem două cazuri:

Cazul 1: $x > x_0$; atunci, pentru fiecare $t \in [x_0, x]$, avem

$$f(x_0) - \frac{\varepsilon}{2} < f(t) < f(x_0) + \frac{\varepsilon}{2},$$

şi deci

$$\int_{x_0}^x \left(f(x_0) - \frac{\varepsilon}{2}\right) \mathrm{d}t \le \int_{x_0}^x f(t)\,\mathrm{d}t \le \int_{x_0}^x \left(f(x_0) + \frac{\varepsilon}{2}\right) \mathrm{d}t,$$

de unde rezultă că

$$\left(f(x_0) - \frac{\varepsilon}{2}\right)(x - x_0) \le F(x) - F(x_0) \le \left(f(x_0) + \frac{\varepsilon}{2}\right)(x - x_0),$$

sau echivalent

$$f(x_0) - \frac{\varepsilon}{2} \le \frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} \le f(x_0) + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Prin urmare

$$\left|\frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} - f(x_0)\right| < \varepsilon$$

Cazul 2: $x > x_0$; atunci pentru fiecare $t \in [x_0, x]$, avem

$$f(x_0) - \frac{\varepsilon}{2} < f(t) < f(x_0) + \frac{\varepsilon}{2},$$

şi deci

$$\int_x^{x_0} \left(f(x_0) - \frac{\varepsilon}{2}\right) \mathrm{d}t \le \int_x^{x_0} f(t)\,\mathrm{d}t \le \int_x^{x_0} \left(f(x_0) + \frac{\varepsilon}{2}\right) \mathrm{d}t,$$

de unde rezultă că

$$\left(f(x_0) - \frac{\varepsilon}{2}\right)(x_0 - x) \le F(x_0) - F(x) \le \left(f(x_0) + \frac{\varepsilon}{2}\right)(x_0 - x),$$

sau echivalent

$$f(x_0) - \frac{\varepsilon}{2} \leq \frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} \leq f(x_0) + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Prin urmare

$$\left| \frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} - f(x_0) \right| < \varepsilon$$

Aşadar, oricare ar fi $x \in I \backslash \{x_0\}$ cu $|x - x_0| < \delta$ avem

$$\left| \frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} - f(x_0) \right| < \varepsilon.$$

Rezultă că există

$$\lim_{x \to x_0} \frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} = f(x_0),$$

deci F este derivabilă în punctul x_0 şi $F'(x_0) = f(x_0)$. ■

Observaţia 3.5.2 Dacă funcţia F din teorema 3.5.1 este derivabilă în punctul x_0, nu rezultă că funcţia f este continuă în punctul x_0. Intr-adevăr, funcţia $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ definită prin $f(x) = \lfloor x \rfloor$, oricare ar fi $x \in [0,1]$, nu este continuă în punctul $x_0 = 1$, în timp ce funcţia $F : [0,1] \to \mathbb{R}$ definită prin

$$F(x) = \int_0^x f(t)\mathrm{d}t = \int_0^x 0\mathrm{d}t = 0, \text{ oricare ar fi } x \in [0,1],$$

este derivabilă în punctul 1. ♢

Teorema 3.5.3 (*teorema de existenţă a primitivelor unei funcţii continue*) *Fie I un interval din $\mathbb{R}$, $a \in I$ şi $f : I \to \mathbb{R}$. Dacă funcţia f este continuă pe intervalul I, atunci funcţia $F : I \to \mathbb{R}$ definită prin*

$$F(x) = \int_a^x f(t)\mathrm{d}t, \textit{ oricare ar fi } x \in I,$$

este o primitivă a funcţiei f pe I cu proprietatea că $F(a) = 0$.

Demonstraţie. Se aplică teorema 3.5.1. ■

Teorema 3.5.4 (*teorema de reprezentare a primitivelor funcţiilor continue*) *Fie I un interval din $\mathbb{R}$, $a \in I$ şi $f : I \to \mathbb{R}$ o funcţie continuă pe I. Dacă $F : I \to \mathbb{R}$ este o primitivă a funcţiei f pe I cu proprietatea că $F(a) = 0$, atunci*

$$F(x) = \int_a^x f(t)\mathrm{d}t, \textit{ oricare ar fi } x \in I.$$

Demonstraţie. În baza teoremei de existentă a primitivelor unei funcţii continue (teorema 3.5.3), funcţia $F_1 : I \to \mathbb{R}$ definită prin

$$F_1(x) = \int_a^x f(t)\mathrm{d}t, \text{ oricare ar fi } x \in I,$$

este o primitivă a funcţiei f pe I. Atunci există $c \in \mathbb{R}$ astfel încât $F(x) = F_1(x) + c$, oricare ar fi $x \in I$. Deoarece $F(a) = F_1(a) = 0$, deducem ca $c = 0$ şi teorema este demonstrată. ■

Teorema 3.5.5 *Fie I un interval din $\mathbb{R}$ şi $f : I \to \mathbb{R}$ o funcţie local integrabilă pe I. Dacă funcţia f este mărginită pe I, atunci pentru orice $a \in I$, funcţia $F : I \to \mathbb{R}$ definită prin*

$$F(x) = \int_a^x f(t)\mathrm{d}t, \text{ oricare ar fi } x \in I,$$

este lipschitziană pe I.

Demonstraţie. Funcţia f este mărginită pe I, atunci există un număr real $M > 0$ astfel încât

$$|f(t)| \leq M, \text{ oricare ar fi } x \in I.$$

De aici deducem că, pentru orice $u, v \in I$, avem

$$|F(u) - F(v)| = \left| \int_u^v f(t)\,\mathrm{d}t \right| \leq \left| \int_u^v |f(t)|\,\mathrm{d}t \right| \leq M |u - v|,$$

prin urmare funcţia F este lipschitziană. ■

6. Formula lui Leibniz-Newton

Teorema 3.6.1 (teorema lui Leibniz – Newton) *Fie $a, b \in \mathbb{R}$ cu $a < b$ şi $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ o funcţie. Dacă:*

(*i*) *funcţia f este integrabilă Riemann pe $[a, b]$;*

(*ii*) *funcţia f admite primitive pe $[a, b]$,*

atunci pentru orice primitivă $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ a funcţiei f are loc egalitatea

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - F(a). \tag{3.6.34}$$

Demonstraţie. Fie $(\Delta^n)_{n\in\mathbb{N}}$ un şir de diviziuni $\Delta^n = (x_0^n, \cdots, x_{p_n}^n)$ ale intervalului $[a, b]$ astfel încât $\lim\limits_{n\to\infty} \|\Delta^n\| = 0$. In baza teoremei de medie a calculului diferenţial aplicată restricţiei funcţiei F la intervalul $[x_{i-1}^n, x_i^n]$, $(n \in \mathbb{N})$ deducem că pentru fiecare număr natural n şi pentru fiecare $i \in \{1, \cdots, p_n\}$ există un punct $\xi_i^n \in]x_{i-1}^n, x_i^n[$ cu proprietatea că

$$F(x_i^n) - F\left(x_{i-1}^n\right) = F'(\xi_i^n)\left(x_i^n - x_{i-1}^n\right).$$

Cum, prin ipoteză, $F'(x) = f(x)$, oricare ar fi $x \in [a, b]$, avem că

$$F(x_i^n) - F\left(x_{i-1}^n\right) = f(\xi_i^n)\left(x_i^n - x_{i-1}^n\right),$$

oricare ar fi numărul natural n şi oricare ar fi $i \in \{1, \cdots, p_n\}$.

Evident, pentru fiecare număr natural n avem $\xi^n = \left(\xi_1^n, \cdots, \xi_{p_n}^n\right) \in \mathrm{Pi}\left(\Delta^n\right)$. Intrucât

$$\sigma\left(f; \Delta^n, \xi^n\right) = \sum_{i=1}^{p_n} f\left(\xi_i^n\right)\left(x_i^n - x_{i-1}^n\right) = \sum_{i=1}^{p_n} F\left(x_i^n\right) - F\left(x_{i-1}^n\right) =$$
$$= F(b) - F(a), \text{ oricare ar fi } n \in \mathbb{N},$$

deoarece

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty} \sigma\left(f; \Delta^n, \xi^n\right),$$

obţinem că

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - F(a).$$

Teorema este demonstrată. ■

Notaţie: In loc de $F(b) - F(a)$ se folosesc frecvent notaţiile

$$F(x)\big|_a^b \qquad \text{sau} \qquad [F(x)]_a^b$$

care se citesc: $F(x)$ *luat între* a *şi* b.

Egalitatea (3.6.34) se numeşte **formula lui Leibniz-Newton**.

Exemplul 3.6.2 Funcţia $f : [1,2] \to \mathbb{R}$ definită prin

$$f(x) = \frac{1}{x(x+1)}, \text{ oricare ar fi } x \in [1,2],$$

este continuă pe $[1,2]$. Atunci funcţia f este integrabilă Riemann pe $[1,2]$. Pe de altă parte, funcţia f admite primitive pe intervalul $[1,2]$ şi $F : [1,2] \to \mathbb{R}$ definită prin

$$F(x) = \ln x - \ln(x+1), \text{ oricare ar fi } x \in [1,2],$$

este o primitivă a funcţiei f pe $[1,2]$. In baza formulei lui Leibniz-Newton (teorema 3.6.1), obţinem

$$\int_1^2 \frac{1}{x(x+1)}\mathrm{d}x = [\ln x - \ln(x+1)]_1^2 = \ln\frac{4}{3}. \ \square$$

7. Metode de calcul a primitivelor

7.1. Integrarea prin părţi. Folosind formula de derivare a produsului a două funcţii derivabile şi rezultatul că orice funcţie continuă pe un interval admite primitive pe acel interval, obţinem teorema următoare:

Teorema 3.7.1 (formula de integrare prin părţi) *Fie I un interval din $\mathbb{R}$ şi $f, g : I \to \mathbb{R}$. Dacă:*

(i) funcţiile f şi g sunt derivabile pe I,

(ii) derivatele f' şi g' sunt continue pe I,

atunci funcţiile fg' şi $f'g$ admit primitive pe I şi are loc egalitatea:

$$\int \left(fg'\right)(x)\mathrm{d}x = fg - \int \left(f'g\right)(x)\mathrm{d}x.$$

(*formula integrării prin părţi*)

Demonstraţie. Deoarece orice funcţie derivabilă este continuă, din (i) rezultă că funcţiile f şi g sunt continue pe I. Atunci, dacă ţinem seama şi de (ii), avem că funcţiile $f'g$ şi fg' sunt continue pe I şi deci au primitive pe I. Intrucât

$$(fg)' = f'g + fg',$$

deducem că fg este o primitivă a funcţiei $f'g + fg'$, prin urmare avem

$$\int \left(f'g + fg'\right)(x)\,\mathrm{d}x = fg + \mathcal{C}.$$

Dar

$$\int \left(f'g + fg'\right)(x)\,\mathrm{d}x = \int \left(f'g\right)(x)\,\mathrm{d}x + \int \left(fg'\right)(x)\,\mathrm{d}x.$$

şi deci

$$\int \left(f'g\right)(x)\,\mathrm{d}x + \int \left(fg'\right)(x)\,\mathrm{d}x = fg + \mathcal{C}.$$

Deoarece

$$\int \left(f'g\right)(x)\,\mathrm{d}x - \mathcal{C} = \int \left(f'g\right)(x)\,\mathrm{d}x,$$

obţinem

$$\int \left(fg'\right)(x)\,\mathrm{d}x = fg - \int \left(f'g\right)(x)\,\mathrm{d}x,$$

sau echivalent

$$\int \left(fg'\right)(x)\,\mathrm{d}x = f(x)\,g(x) - \int \left(f'g\right)(x)\,\mathrm{d}x,\ \ x \in I.$$

adică concluzia teoremei. ■

Observaţia 3.7.2 Schematic, formula de integrare prin părţi se scrie

$$\int fg' = fg - \int f'g.$$

Exemplul 3.7.3 Să se calculeze integrala

$$\int x \ln x \mathrm{d}x,\ \ x \in]0, +\infty[;$$

Soluţie. Considerăm funcţiile $f, g :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ definite prin

$$f(x) = \ln x,\ \ \ g'(x) = x,\ \text{ oricare ar fi } x \in]0, +\infty[.$$

Deducem $g(x) = \dfrac{x^2}{2}$, oricare ar fi $x \in]0, +\infty[$. Aplicând formula integrării prin părţi, obţinem

$$\int x \ln x \mathrm{d}x = \frac{x^2}{x} \ln x - \int \frac{x^2}{2} \cdot \frac{1}{x} \mathrm{d}x = \frac{x^2}{2} \ln x - \frac{1}{2} \int x \mathrm{d}x =$$
$$= \frac{x^2}{2} \ln x - \frac{x^2}{4} + \mathcal{C},\ x \in]0, +\infty[.$$

■

7.2. Metoda schimbării de variabilă. Metoda schimbării de variabilă are la bază formula derivării unei funcţii compuse.

Teorema 3.7.4 (*prima metodă de schimbare de variabilă*) *Fie I şi J două intervale din $\mathbb{R}$ şi $f : J \to \mathbb{R}$ şi $u : I \to \mathbb{R}$ două funcţii. Dacă*

(*i*) $u(I) \subseteq J$;

(*ii*) *funcţia u este derivabilă pe I*;

(*iii*) *funcţia f admite primitive pe J*,

atunci funcţia $(f \circ u) u'$ admite primitive pe I.

Mai mult, dacă $F : J \to \mathbb{R}$ este o primitivă a funcţiei f pe J, atunci funcţia $F \circ u$ este o primitivă a funcţiei $(f \circ u) u'$ pe I şi are loc egalitatea

$$\int f(u(x)) u'(x) \mathrm{d}x = F \circ u + \mathcal{C}.$$

Demonstraţie. Fie $F : J \to \mathbb{R}$ o primitivă a funcţiei f pe intervalul J, atunci funcţia F este derivabilă pe J şi $F' = f$. Cum funcţia u este derivabilă pe I, obţinem că $F \circ u$ este derivabilă pe I şi

$$(F \circ u)'(x) = F'(u(x)) u'(x) = f(u(x)) u'(x), \text{ oricare ar fi } x \in I..$$

Prin urmare, funcţia funcţia $F \circ u$ este o primitivă a funcţiei $(f \circ u) u'$. ■

Observaţia 3.7.5 Fie I un interval din $\mathbb{R}$. Pentru a calcula primitivele funcţiei primitivabile $g : I \to \mathbb{R}$, adică pentru a calcula integrala

$$\int g(x) \mathrm{d}x,$$

folosind metoda schimbării de variabilă, parcurgem următoarele trei etape:

1^0 Punem în evidenţă, în expresia funcţiei g, o funcţie derivabilă $u : I \to \mathbb{R}$ şi o funcţie primitivabilă $f : u(I) \to \mathbb{R}$ astfel încât $g(x) = f(u(x)) u'(x)$, oricare ar fi $x \in I$.

2^0 Determinăm o primitivă $F : u(I) \to \mathbb{R}$ a funcţiei f pe $u(I)$, adică

$$\int f(t) \mathrm{d}t = F + \mathcal{C}.$$

3^0 O primitivă a funcţiei $g = (f \circ u) u'$ pe I este $F \circ u$, adică

$$\int g(x) \mathrm{d}x = F \circ u + \mathcal{C},$$

sau, echivalent,

$$\int g(x)\,\mathrm{d}x = F(u(x)) + \mathcal{C},\ x \in I.$$

Exemplul 3.7.6 Să se calculeze integrala

$$\int \cot x \mathrm{d}x,\ x \in]0,\pi[.$$

Soluţie. Avem $I =]0,\pi[$ şi $g(x) = \cot x$, oricare ar fi $x \in]0,\pi[$. Deoarece

$$g(x) = \frac{1}{\sin x}(\sin x)',\ \text{oricare ar fi } x \in]0,\pi[,$$

luăm $u :]0,\pi[\to \mathbb{R}$ definită prin $u(x) = \sin x$, oricare ar fi $x \in]0,\pi[$ şi $f :]0,+\infty[\to \mathbb{R}$ definită prin $f(t) = 1/t$, oricare ar fi $t \in]0,+\infty[$. Evident

$$g(x) = f(u(x))\,u'(x),\ \text{oricare ar fi } x \in]0,+\infty[.$$

O primitivă a funcţiei f pe $]0,+\infty[$ este funcţia $F :]0,+\infty[\to \mathbb{R}$ definită prin

$$F(t) = \ln t,\ \text{oricare ar fi } t \in]0,+\infty[,$$

adică

$$\int f(t)\,\mathrm{d}t = \int \frac{1}{t}\mathrm{d}t = \ln t + \mathcal{C},\quad t \in]0,+\infty[.$$

Atunci o primitivă a funcţiei g pe $]0,+\infty[$ este $F \circ u$, adică avem

$$\int \cot x \mathrm{d}x = \ln|\sin x| + \mathcal{C},\quad x \in]0,\pi[.$$

■

Teorema 3.7.7 (*a doua metodă de schimbare de variabilă*) *Fie I şi J două intervale din $\mathbb{R}$ şi $f : I \to \mathbb{R}$ şi $u : J \to I$ două funcţii. Dacă:*

(i) *funcţia u este bijectivă;*

(ii) *funcţia u este derivabilă pe J şi $u'(x) \neq 0$, oricare ar fi $x \in J$;*

(iii) *funcţia $h = (f \circ u)\,u'$ admite primitive pe J,*

atunci funcţia f admite primitive pe I.

Maimult, dacă $H : J \to \mathbb{R}$ este o primitivă a funcţiei $h = (f \circ u)\,u'$ pe J, atunci funcţia $H \circ u^{-1}$ este o primitivă a funcţiei f pe I, adică are loc egalitatea

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x = H \circ u^{-1} + \mathcal{C}.$$

Demonstraţie. Fie $H : J \to \mathbb{R}$ o primitivă a funcţiei $h = (f \circ u)\,u'$ pe J, atunci funcţia H este derivabilă pe J şi

$$H' = h = (f \circ u)\,u'.$$

Pe de altă parte, din (i) şi (ii) rezultă că funcţia $u^{-1} : I \to J$ este derivabilă pe I. Atunci funcţia $H \circ u^{-1}$ este derivabilă pe I şi

$$\left(H \circ u^{-1}\right)(x) = H'\left(u^{-1}(x)\right)\left(u^{-1}\right)'(x) = h\left(u^{-1}(x)\right)\left(u^{-1}\right)'(x) =$$

$$= \left(\left(f \circ u\right)\left(u^{-1}\left(x\right)\right)\right) u'\left(u^{-1}\left(x\right)\right)\left(u^{-1}\right)'\left(x\right) =$$

$$= f\left(x\right) u'\left(u^{-1}\left(x\right)\right) \frac{1}{u'\left(u^{-1}\left(x\right)\right)} = f\left(x\right), \text{ oricare ar fi } x \in I.$$

Prin urmare, funcţia $H \circ u^{-1}$ este o primitivă a funcţiei f pe I. ■

Observaţia 3.7.8 Fie I un interval din $\mathbb{R}$. Pentru a calcula primitivele funcţiei primitivabile $f : I \to \mathbb{R}$, adică pentru a calcula integrala

$$\int f\left(x\right) \mathrm{d}x,$$

folosind metoda schimbării de variabilă dată de teorema 3.7.7, parcurgem următoarele trei etape:

1^0 Punem în evidenţă un interval $J \subseteq \mathbb{R}$ şi o funcţie $u : J \to I$ bijectivă, derivabilă pe J şi cu derivata nenulă pe J (Se apune că funcţia u^{-1} schimbă variabila x în variabila t).

2^0 Determinăm o primitivă $H : J \to \mathbb{R}$ a funcţiei $\left(f \circ u\right) u'$ pe J, adică

$$\int f\left(u\left(t\right)\right) \mathrm{d}t = H + \mathcal{C}.$$

3^0 O primitivă a funcţiei f pe I este $H \circ u^{-1}$, adică

$$\int f\left(x\right) \mathrm{d}x = H \circ u^{-1} + \mathcal{C},$$

sau, echivalent,

$$\int f\left(x\right) \mathrm{d}x = H\left(u^{-1}\left(x\right)\right) + \mathcal{C},\ x \in I.$$

Exemplul 3.7.9 Să se calculeze integrala

$$\int \frac{1}{\sin x} \mathrm{d}x,\ x \in]0, \pi[.$$

Avem $I :=]0, \pi[$. Luăm funcţia $u :]0, +\infty[\to]0, \pi[$ definită prin $u\left(t\right) = 2 \arctan t$, oricare $t \in]0, +\infty[$. Funcţia u este bijectivă, derivabilă

Observaţia 3.7.10 Fie I şi J două intervale din $\mathbb{R}$ şi $f : J \to \mathbb{R}$ şi $u : I \to J$ două funcţii cu următoarele proprietăţi:

(a) funcţia u este bijectivă, derivabilă pe I cu derivata continuă şi nenulă pe I;

(b) funcţia f este continuă pe J.

Fie $F : J \to \mathbb{R}$ o primitivă a funcţiei f pe J (o astfel de primitivă există deoarece f este continuă pe J).

In baza primei metode de schimbare de variabilă (teorema 3.7.4), funcţia $F \circ u$ este o primitivă a funcţiei $\left(f \circ u\right) u'$ pe I.

Reciproc, să presupunem că $H = F \circ u$ este o primitivă a funcţiei $\left(f \circ u\right) u'$ pe I. Atunci, în baza celei de a doua metode de schimbare de variabilă (teorema 3.7.7), funcţia $H \circ u^{-1} = F \circ u \circ u^{-1} = F$ este o primitivă a funcţiei f pe J.

Prin urmare, în ipotezele (a) şi (b), funcţia $F : I \to \mathbb{R}$ este o primitivă a funcţiei f pe J dacă şi numai dacă funcţia $F \circ u$ este o primitivă a funcţiei $(f \circ u)\, u'$ pe I. Cu alte cuvinte, în ipotezele (a) şi (b), cele două metode de schimbare de variabilă sunt echivalente.

Practic avem o singură metodă de schimbare de variabilă şi mai multe variante de aplicare a ei.

Varianta 1. Avem de calculat

$$\int f(x)\, \mathrm{d}x, \quad x \in I.$$

Atunci:

1^0 Punem în evidenţă în expresia lui f, o funcţie $u : I \to \mathbb{R}$ şi o funcţie primitivabilă $g : u(I) \to \mathbb{R}$ astfel încât

$$f(x) = g(u(x))\, u'(x), \text{ oricare ar fi } x \in I.$$

2^0 Facem înlocuirile formale $u(x) := t$ şi $u'(x)\, dx := dt$; obţinem integrala nedefinită

$$\int g(t)\, \mathrm{d}t = G(t) + \mathcal{C},\ t \in u(I).$$

3^0 Revenim la vechea variabilă x, punând $t := u(x)$ în expresia primitivei G; obţinem

$$\int f(x)\, \mathrm{d}x = G(u(x)) + \mathcal{C},\ x \in I.$$

Varianta 2. Avem de calculat

$$\int f(x)\, \mathrm{d}x, \quad x \in I.$$

Atunci:

1^0 Punem în evidenţă un interval $J \subseteq \mathbb{R}$ şi o funcţie $u : J \to I$ bijectivă şi derivabilă.

2^0 Facem înlocuirile formale $x := u(t)$ şi $dx := u'(t)\, dt$; obţinem integrala nedefinită

$$\int f(u(t))\, u'(t)\, \mathrm{d}t,\ t \in J,$$

pe care o calculăm. Fie

$$\int f(u(t))\, u'(t)\, \mathrm{d}t = H(t) + \mathcal{C},\ t \in J.$$

3^0 Revenim la vechea variabilă x, punând $t := u^{-1}(x)$ în expresia primitivei H; obţinem

$$\int f(x)\, \mathrm{d}x = H\left(u^{-1}(x)\right) + \mathcal{C},\ x \in I.$$

Varianta 3. Avem de calculat

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x, \quad x \in I.$$

Atunci:

1^0 Punem în evidenţă, în expresia lui f, o funcţie injectivă $u : I \to \mathbb{R}$ cu $u^{-1} : u(I) \to I$ derivabilă, şi o funcţie $g : u(I) \to \mathbb{R}$ astfel încât

$$f(x) = g(u(x)), \text{ oricare ar fi } x \in I.$$

2^0 Facem înlocuirile formale $u(x) := t$ şi $dx := \left(u^{-1}\right)'(t)\,dt$; obţinem integrala nedefinită

$$\int g(t)\left(u^{-1}\right)'(t)\,\mathrm{d}t,\ t \in u(I),$$

pe care o calculăm. Fie

$$\int g(t)\left(u^{-1}\right)'(t)\,\mathrm{d}t = F(t),\ t \in u(I),$$

3^0 Revenim la vechea variabilă x, punând $t := u(x)$ în expresia primitivei F; obţinem

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x = G(u(x)) + \mathcal{C},\ x \in I.$$

În toate cele trei variante ale formulei schimbării de variabilă,expuse mai sus, expresia funcţiei u se impune din context, analizând expresia funcţiei f.

Când se dă o indicaţie asupra schimbării de variabilă folosite, se spune simplu "*se face substituţia* $x = u(t)$" sau "*se face substituţia* $t = u(x)$", celelalte elemente rezultând din context.

Exemplul 3.7.11 Să se calculeze

$$I = \int \frac{\mathrm{tg}x}{1+\mathrm{tg}x}\mathrm{d}x,\ x \in \left(-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right).$$

Se face substituţia $\tan x = t$, deci $x := \arctan t$ şi $dx := \dfrac{1}{1+t^2}$. Se obţine

$$I = \int \frac{t}{(1+t)(1+t^2)}\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\int\left(\frac{1}{t^2+1} + \frac{1}{t^2+1} - \frac{1}{t+1}\right)\mathrm{d}t =$$

$$= \frac{1}{4}\left(t^2+1\right) + \frac{1}{2}\arctan t - \frac{1}{2}\ln(t+1) + \mathcal{C},\ t \in (-1, +\infty).$$

Atunci

$$I = \int \frac{\tan x}{1+\tan x}\mathrm{d}x = \frac{1}{2}(x - \ln(\sin x + \cos x)) + \mathcal{C},\ x \in \left(-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right).$$

Observaţia 3.7.12 Nu există reguli de calcul al primitivelor decât pentru clase restrânse de funcţii elementare.

8. Probleme propuse spre rezolvare

Exemplul 3.8.1 Să se arate că următoarele funcţii $f : I \to \mathbb{R}$ admit primitive pe intervalul $I \subseteq \mathbb{R}$ şi să se determine o primitivă $F : I \to \mathbb{R}$ a funcţiei f pe intervalul I, dacă:

a) $f(x) = x^2 + x$, oricare ar fi $x \in I = \mathbb{R}$;

b) $f(x) = x^3 + 2x - 4$, oricare ar fi $x \in I = \mathbb{R}$;

c) $f(x) = x(x+1)(x+2)$, oricare ar fi $x \in I = \mathbb{R}$;

d) $f(x) = 1/x$, oricare ar fi $x \in I =]0, +\infty[$;

e) $f(x) = 1/x$, oricare ar fi $x \in I =]-\infty, 0[$;

f) $f(x) = x^5 + 1/x$, oricare ar fi $x \in I =]0, +\infty[$;

g) $f(x) = 1/x^2$, oricare ar fi $x \in I =]0, +\infty[$;

h) $f(x) = 1/x^2$, oricare ar fi $x \in I =]-\infty, 0[$.

Exemplul 3.8.2 Să se calculeze:

a) $\displaystyle\int \frac{2x-1}{x^2-3x+2}\mathrm{d}x,\ \ x \in]2, +\infty[$;

b) $\displaystyle\int \frac{4}{(x-1)(x+1)^2}\mathrm{d}x,\ \ x > 1$;

c) $\displaystyle\int \frac{1}{x^3-x^4}\mathrm{d}x,\ \ x > 1$;

d) $\displaystyle\int \frac{2x+5}{x^2+5x+10},\ x \in \mathbb{R}$;

e) $\displaystyle\int \frac{1}{x^2+x+1},\ x \in \mathbb{R}$.

Exemplul 3.8.3 Să se calculeze:

a) $\displaystyle I = \int \frac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}\mathrm{d}x,\ \ x \in]0, +\infty[$;

b) $\displaystyle I = \int \frac{1}{x+\sqrt{x-1}}\mathrm{d}x,\ \ x \in]1, +\infty[$.

Exemplul 3.8.4 Să se calculeze:

a) $\displaystyle I = \int \frac{1}{1+\sqrt{x^2+2x-2}}\mathrm{d}x,\quad x \in]\sqrt{3}-1, +\infty[$;

b) $\displaystyle I = \int \frac{1}{(x+1)\sqrt{-4x^2-x+1}}\mathrm{d}x,\quad x \in \left]\frac{-1-\sqrt{17}}{8}, \frac{\sqrt{17}-1}{8}\right[$.

Exemplul 3.8.5 Să se calculeze:

$$a)\ \int_1^2 \frac{1}{x^3+x^2+x+1}\mathrm{d}x; \qquad b)\ \int_1^3 \frac{1}{x\left(x^2+9\right)}\mathrm{d}x;$$

$$c)\ \int_{-1}^1 \frac{x^2+1}{x^4+1}\mathrm{d}x; \qquad d)\ \int_{-1}^1 \frac{x}{x^2+x+1}\mathrm{d}x.$$

Exemplul 3.8.6 Să se calculeze:

$$a)\ \int_{-3}^{-2} \frac{x}{(x+1)\left(x^2+3\right)}\mathrm{d}x; \qquad b)\ \int_0^1 \frac{x+1}{\left(x^2+4x+5\right)^2}\mathrm{d}x;$$

$$c)\ \int_1^2 \frac{1}{x^3+x}\mathrm{d}x; \qquad d)\ \int_0^2 \frac{x^3+2x^2+x+4}{(x+1)^2}\mathrm{d}x.$$

Exemplul 3.8.7 Să se calculeze:

$$a)\ \int_0^1 \frac{1}{1+x^4}\mathrm{d}x; \qquad b)\ \int_0^1 \frac{1}{(x+1)\left(x^2+4\right)}\mathrm{d}x;$$

$$c)\ \int_2^3 \frac{2x^3+x^2+2x-1}{x^4-1}\mathrm{d}x; \qquad d)\ \int_0^1 \frac{x^3+2}{(x+1)^3}\mathrm{d}x.$$

Exemplul 3.8.8 Să se calculeze:

$$a)\ \int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{4-x^2}}\mathrm{d}x; \qquad b)\ \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x^2+x+1}}\mathrm{d}x;$$

$$c)\ \int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{4x^2+x+1}}\mathrm{d}x; \qquad d)\ \int_2^3 \frac{x^2}{\left(x^2-1\right)\sqrt{x^2-1}}\mathrm{d}x.$$

Exemplul 3.8.9 Să se calculeze:

$$a)\ \int_2^3 \sqrt{x^2+2x-7}\mathrm{d}x; \qquad b)\ \int_0^1 \sqrt{6+4x-2x^2}\mathrm{d}x;$$

$$c)\ \int_0^{3/4} \frac{1}{(x+1)\sqrt{x^2+1}}\mathrm{d}x; \qquad d)\ \int_2^3 \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}\mathrm{d}x.$$

Exemplul 3.8.10 Să se arate că:

$$a)\ 2\sqrt{2} < \int_{-1}^1 \sqrt{x^2+4x+5}\mathrm{d}x < 2\sqrt{10};$$

$$b)\ \mathrm{e}^2(\mathrm{e}-1) < \int_{\mathrm{e}}^{\mathrm{e}^2} \frac{x}{\ln x}\mathrm{d}x < \frac{\mathrm{e}^3}{2}(\mathrm{e}-1).$$

Observaţia 3.8.11 Pentru detalii puteţi consulta [**5**] şi [**3**].

Bibliografie

[1] D. Andrica, D.I. Duca, I. Purdea şi I. Pop: *Matematica de bază*, Editura Studium, Cluj-Napoca, 2004

[2] D.I. Duca şi E. Duca: *Exerciţii şi probleme de analiză matematică* (vol. 1), Editura Casa Cărţii de Stiinţă, Cluj-Napoca, 2007

[3] D.I. Duca şi E. Duca: *Exerciţii şi probleme de analiză matematică* (vol. 2), Editura Casa Cărţii de Stiinţă, Cluj-Napoca, 2009

[4] D.I. Duca şi E. Duca: *Culegere de probleme de analiză matematică*, Editura GIL, Zalău, 1996 (vol. 1), 1997 (vol. 2)

[5] D.I. Duca: *Analiza matematică*, Casa Cărţii de Stiinţă, Cluj-Napoca, 2013

[6] M. Megan: *Bazele analizei matematice* (vol. 1), Editura Eurobit, Timişoara 1997

[7] M. Megan: *Bazele analizei matematice* (vol. 2), Editura Eurobit, Timişoara 1997

[8] M. Megan, A.L. Sasu, B. Sasu: *Calcul diferenţial în* $\mathbb{R}$, *prin exerciţii şi probleme*, Editura Universităţii de Vest, Timişoara, 2001

[9] P. Preda, A. Crăciunescu, C. Preda: *Probleme de analiză matematică*, Editura Mirton, Timişoara, 2004

[10] P. Preda, A. Crăciunescu, C. Preda: *Probleme de analiză matematică. Diferenţiabilitate*, Editura Mirton, Timişoara, 2005

[11] P. Preda, A. Crăciunescu, C. Preda: *Probleme de analiză matematică. Integrabilitate*, Editura Mirton, Timişoara, 2007

Glosar