GEOMETRIE-Indrumar pentru examenul licenţă valabil începând cu sesiunea de finalizare a studiilor iulie 2013 specializarea Matematică

Cuprins

Partea 1

Geometrie analitică plană

CAPITOLUL 1

Ecuaţiile carteziene ale dreptelor în raport cu un reper ortonormat în plan (dreapta definită prin punct şi vector director, dreapta definită prin două puncte, dreapta prin tăieturi)

1.1. Dreapta definită prin punct şi vector director

Fie reperul cartezian ortonormat $\mathcal{R}\{0; \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\}$ în plan. Fie d o dreaptă în plan care are un vector director $\overrightarrow{d}$ de componente p şi q, adică

$$\overrightarrow{d} = p\overrightarrow{i} + q\overrightarrow{j}$$

($\overrightarrow{d} \neq \overrightarrow{0}$, adică p şi q nu sunt nule simultan). Pe dreapta d se consideră un punct fixat M_0 de coordonate (x_0, y_0) şi un punct variabil M de coordonate (x, y).

Fie $\overrightarrow{r}_M$ şi $\overrightarrow{r}_{M_0}$ vectorii de poziţie ai punctelor M şi M_0 faţă de originea O.

Ecuaţia vectorială a dreptei d este:

$$d: \ \overrightarrow{r}_M = \overrightarrow{r}_{M_0} + \lambda\overrightarrow{d}, \text{ unde } \lambda \in \mathbb{R}.$$

Propoziţie. *Ecuaţia carteziană a dreptei d în raport cu reperul $\mathcal{R}\{0; \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\}$ este:*

$$\frac{x - x_0}{p} = \frac{y - y_0}{q}.$$

Demonstraţie. Ecuaţia vectorială a dreptei $d: \ \overrightarrow{r}_M = \overrightarrow{r}_{M_0} + \lambda\overrightarrow{d}$ se transcrie astfel:

$$x\overrightarrow{i} + y\overrightarrow{j} = x_0\overrightarrow{i} + y_0\overrightarrow{j} + \lambda(p\overrightarrow{i} + q\overrightarrow{j}).$$

Deoarece versorii $\overrightarrow{i}$ şi $\overrightarrow{j}$ sunt liniar independenţi, avem:

$$\begin{cases} x = x_0 + \lambda p \\ y = y_0 + \lambda q \end{cases}$$

Acestea sunt ecuaţiile parametrice ale dreptei d. Eliminând λ între cele două ecuaţii, avem:

$$\frac{x - x_0}{p} = \frac{y - y_0}{q}.$$

Observaţie. Dacă unul dintre numerele reale p sau q este zero atunci nu se poate face împărţirea cu el. Să presupunem că $p = 0$. Atunci din ecuaţiile parametrice rezultă $x = x_0$ (şi y variabil). Aceasta este ecuaţia unei drepte paralele cu axa Oy. Analog $y = y_0$ este ecuaţia unei drepte paralele cu axa Ox.

Observaţie. Dacă $p \neq 0$, ecuaţia dreptei d se poate scrie:

$$y - y_0 = \frac{q}{p}(x - x_0).$$

Dacă notăm cu $m = \dfrac{q}{p}$, ecuaţia devine:

$$y - y_0 = m(x - x_0).$$

m se numeşte panta dreptei d şi este egală cu $\operatorname{tg} \alpha$, unde α este unghiul dintre axa Ox şi dreapta d.

1.2. Dreapta definită prin două puncte distincte

Fie dreapta d în planul xOy, raportată la reperul ortonormat $\mathcal{R}\{0; \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\}$. Se consideră pe dreapta d punctele distincte fixate M_1 şi M_2 de coordonate (x_1, y_1) respectiv (x_2, y_2) şi punctul variabil M de coordonate (x, y).

Ecuaţia vectorială a dreptei d este:

$$\overrightarrow{r}_M = \overrightarrow{r}_{M_1} + \alpha(\overrightarrow{r}_{M_2} - \overrightarrow{r}_{M_1}).$$

Propoziţie. *Ecuaţia carteziană a dreptei d este:*

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}.$$

Demonstraţie. Ecuaţia vectorială a dreptei se explicitează astfel:

$$x\overrightarrow{i} + y\overrightarrow{j} = x_1\overrightarrow{i} + y_1\overrightarrow{j} + \alpha(x_2\overrightarrow{i} + y_2\overrightarrow{j} - x_1\overrightarrow{i} - y_1\overrightarrow{j}) \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x = x_1 + \alpha(x_2 - x_1) \\ y = y_1 + \alpha(y_2 - y_1) \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}.$$

Observaţie. Dacă $x_2 - x_1 = 0$ atunci ecuaţia dreptei este $x = x_1$ şi reprezintă o dreaptă paralelă cu axa Oy, iar dacă $y_2 - y_1 = 0$, atunci ecuaţia dreptei este $y = y_1$ şi reprezintă o dreaptă paralelă cu axa Ox.

Dacă $x_2 - x_1 \neq 0$ atunci ecuaţia dreptei este

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$$

şi atunci panta dreptei d este

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}.$$

Observaţie. Ecuaţia dreptei date prin două puncte distincte

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}$$

se poate scrie în mod echivalent:

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Observaţie. Dacă punctul $M_3(x_3, y_3)$ aparţine dreptei d determinată de punctele distincte $M_1(x_1, y_1)$ şi $M_2(x_2, y_2)$ atunci coordonatele punctului M_3 verifică ecuaţia dreptei M_1M_2, deci avem:

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Aceasta este condiţia de coliniaritate a punctelor M_1, M_2, M_3.

Observaţie. Dacă dreapta d intersectează axa Ox în punctul $A(a, 0)$ şi axa Oy în punctul $B(0, b)$, atunci ecuaţia dreptei $d = AB$ se scrie:

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ a & 0 & 1 \\ 0 & b & 1 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1.$$

Această ecuaţie se numeşte ecuaţia dreptei prin tăieturi.

1.3. Unghiul dintre două drepte

Definiţie. Unghiul dintre două drepte plane este prin definiţie unghiul dintre vectorii lor directori.

Propoziţie. *Dacă dreptele* d_1 *şi* d_2 *au vectorii directori* $\overrightarrow{d}_1(p_1, q_1)$ *şi* $\overrightarrow{d}_2(p_2, q_2)$*, atunci*

$$\cos(\widehat{d_1, d_2}) = \frac{p_1p_2 + q_1q_2}{\sqrt{p_1^2 + q_1^2} \cdot \sqrt{p_2^2 + q_2^2}}.$$

Demonstraţie. Din definiţia produsului scalar avem:

$$\overrightarrow{d}_1 \cdot \overrightarrow{d}_2 = \|\overrightarrow{d}_1\| \cdot \|\overrightarrow{d}_2\| \cdot \cos(\widehat{\overrightarrow{d}_1, \overrightarrow{d}_2}).$$

Explicitând produsul scalar şi normele, adică:

$$\overrightarrow{d}_1 \cdot \overrightarrow{d}_2 = p_1p_2 + q_1q_2 \quad \text{şi} \quad \|\overrightarrow{d}_1\| = \sqrt{p_1^2 + q_1^2},\ \|\overrightarrow{d}_2\| = \sqrt{p_2^2 + q_2^2},$$

rezultă formula care permite calculul cosinusului unghiului dintre două drepte.

Propoziţie. *Dacă dreptele* d_1 *şi* d_2 *sunt date prin punct şi pantă, adică:*

$$d_1 : \ y - y_1 = m_1(x - x_1) \Leftrightarrow y = m_1x + n_1$$

$$d_2 : \ y - y_2 = m_2(x - x_2) \Leftrightarrow y = m_2x + n_2$$

atunci

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{m_2 - m_1}{1 + m_1m_2}$$

unde θ *este unghiul dintre cele două drepte.*

Demonstraţie. $\theta = \alpha_2 - \alpha_1$

$$\operatorname{tg}\theta = \operatorname{tg}(\alpha_2 - \alpha_1) = \frac{\operatorname{tg}\alpha_2 - \operatorname{tg}\alpha_1}{1 + \operatorname{tg}\alpha_1 \operatorname{tg}\alpha_2} = \frac{m_2 - m_1}{1 + m_1m_2}.$$

Propoziţie. *(a) Dacă dreptele* d_1 *şi* d_2 *sunt date prin punct şi vector director, adică:*

$$d_1 : \ \frac{x - x_1}{p_1} = \frac{y - y_1}{q_1}$$

$$d_2 : \ \frac{x - x_2}{p_2} = \frac{y - y_2}{q_2}$$

atunci

$$d_1 \| d_2 \Leftrightarrow \frac{p_1}{p_2} = \frac{q_1}{q_2}.$$

(b) Dacă dreptele d_1 *şi* d_2 *sunt date prin punct şi pantă, adică:*

$$d_1 : \ y = m_1x + n_1$$

$$d_2: \ y = m_2 x + n_2$$

atunci $d_1 \| d_2 \Leftrightarrow m_1 = m_2$.

Demonstraţie. (a) $d_1 \| d_2 \Leftrightarrow \overrightarrow{d}_1 \| \overrightarrow{d}_2 \Leftrightarrow \exists\ \lambda \in \mathbb{R}^*$ astfel încât

$$\overrightarrow{d}_1 = \lambda \overrightarrow{d}_2 \Leftrightarrow p_1 \overrightarrow{i} + q_1 \overrightarrow{j} = \lambda(p_1 \overrightarrow{i} + q_1 \overrightarrow{j}) \Leftrightarrow$$

$$p_1 = \lambda p_2 \text{ şi } q_1 = \lambda q_2 \Leftrightarrow \frac{p_1}{p_2} = \frac{q_1}{q_2}.$$

(b) $d_1 \| d_2 \Leftrightarrow \theta = 0 \Leftrightarrow \operatorname{tg}\theta = 0 \Leftrightarrow m_1 = m_2$.

Propoziţie. *(a) Dacă dreptele d_1 şi d_2 sunt date prin punct şi vector director, adică*

$$d_1: \ \frac{x - x_1}{p_1} = \frac{y - y_1}{q_1}$$

$$d_2: \ \frac{x - x_2}{p_2} = \frac{y - y_2}{q_2}$$

atunci $d_1 \perp d_2 \Leftrightarrow p_1 p_2 + q_1 q_2 = 0$.

(b) Dacă dreptele d_1 şi d_2 sunt date prin punct şi pantă, adică

$$d_1: \ y = m_1 x + n_1$$

$$d_2: \ y = m_2 x + n_2$$

atunci $d_1 \perp d_2 \Leftrightarrow m_1 m_2 + 1 = 0$.

Demonstraţie. (a) $d_1 \perp d_2 \Leftrightarrow \cos(\widehat{\overrightarrow{d}_1, \overrightarrow{d}_2}) = 0 \Leftrightarrow p_1 p_2 + q_1 q_2 = 0$.

(b) $d_1 \perp d_2 \Leftrightarrow \theta = \dfrac{\pi}{2} \Rightarrow \operatorname{ctg}\theta = 0 \Leftrightarrow m_1 m_2 + 1 = 0$.

1.4. Distanţa de la un punct la o dreaptă

Fie $M_0(x_0, y_0)$ un punct şi d o dreaptă dată prin ecuaţia carteziană generală

$$d: \ ax + by + c = 0.$$

Observaţie. Ecuaţia dreptei d poate fi adusă la această formă generală, prin calcule directe în toate cazurile prezentate înainte, adică dreapta prin punct şi vector director, dreapta prin două puncte distincte şi cazul particular, dreapta prin tăieturi. Desigur coeficienţii a şi b din această ecuaţie nu sunt aceiaşi ca în cazul dreptei prin tăieturi.

Propoziţie. *Distanţa de la punctul M_0 la dreapta d este*

$$d(M_0, d) = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

Demonstraţie. Panta dreptei d este

$$m_d = -\frac{a}{b}.$$

Atunci panta perpendicularei d' din M_0 pe d este

$$m_{d'} = \frac{b}{a},$$

deci ecuaţia perpendicularei din M_0 pe d este:

$$d' : \ y - y_0 = \frac{b}{a}(x - x_0).$$

Coordonatele piciorului perpendicularei din M_0 pe dreapta d, punctul M', se obţin rezolvând sistemul format din ecuaţiile dreptelor d şi d'

$$\begin{cases} ax + by + c = 0 & (d) \\ y - y_0 = \dfrac{b}{a}(x - x_0) & (d') \end{cases}$$

Se obţine:

$$x_{M'} = \frac{b^2 x_0 - aby_0 - ac}{a^2 + b^2}$$

$$y_{M'} = \frac{-abx_0 + a^2 y_0 - bc}{a^2 + b^2}$$

(după efectuarea unor calcule elementare).

Distanţa de la punctul M_0 la dreapta d este distanţa dintre punctele M_0 şi M', adică

$$d(M_0, d) = d(M_0, M') = \sqrt{(x_{M'} - x_{M_0})^2 + (y_{M'} - y_{M_0})^2} = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

(după efectuarea unor calcule elementare).

Aria triunghiului. Fie $M_i(x_i, y_i)$, $i = \overline{1,3}$, trei puncte necoliniare în planul xOy.

Propoziţie. *Aria triunghiului determinat de punctele necoliniare M_i, $i = \overline{1,3}$, este:*

$$\sigma[M_1 M_2 M_3] = \frac{1}{2} \cdot \left| \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} \right|.$$

Demonstraţie. Ecuaţia dreptei M_2M_3 este:

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Aria triunghiului $M_1M_2M_3$ este:

$$\sigma[M_1M_2M_3] = \frac{1}{2} \cdot M_2M_3 \cdot d(M_1, M_2M_3)$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{(x_3 - x_2)^2 + (y_3 - y_2)^2} \cdot | \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} | \cdot \frac{1}{\sqrt{(x_3 - x_2)^2 + (y_3 - y_2)^2}}$$

$$= \frac{1}{2} | \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} |.$$

CAPITOLUL 2

2.1. Cercul

Definiţie. Cercul este locul geometric al punctelor din plan egal depărtate de un punct fix, numit centrul cercului. Distanţa de la oricare punct al cercului la centru se numeşte raza cercului şi se notează în general cu R.

Propoziţie. *Ecuaţia carteziană a cercului cu centrul în punctul* $C(a,b)$ *şi de rază* R *este:*

$$(x-a)^2+(y-b)^2=R^2.$$

Demonstraţie. Fie punctul oarecare $M(x,y)$ al cercului. Avem $CM=R$, din definiţie. Rezultă:

$$\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}=R^2$$

sau

$$(x-a)^2+(y-b)^2=R^2.$$

Observaţie. Ecuaţia cercului se mai poate scrie:

$$x^2+y^2-2ax-2by+a^2+b^2-R^2=0$$

sau

$$x^2+y^2+mx+ny+p=0$$

unde s-a notat:

$$m=-2a$$

$$n=-2b$$

$$p=a^2+b^2-R^2.$$

2.2. Elipsa

Fie c un număr real pozitiv şi F, F' două puncte fixate în plan (distincte) astfel încât $FF' = 2c$. Fie $a \in \mathbb{R}$, $a > c$.

Definiţie. Mulţimea E a punctelor M cu proprietatea că

$$MF + MF' = 2a$$

se numeşte elipsă.

Observaţie. Dacă $c = 0$, atunci elipsa se reduce la cercul de rază a.

Propoziţie. *Punctul $M(x, y)$ aparţine elipsei E dacă şi numai dacă*

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \text{ unde } b^2 = a^2 - c^2.$$

Demonstraţie. Alegem originea reperului în mijlocul segmentului FF', axa Ox fiind OF', iar axa Oy fiind mediatoarea segmentului FF'. Avem: $F(-c, 0)$, $F'(c, 0)$.

$$M \in E \Leftrightarrow \sqrt{(x+c)^2 + y^2} + \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a.$$

Se trece un radical în membrul drept (de exemplu al doilea radical) şi se ridică la pătrat fiecare membru al ecuaţiei. Se obţine:

$$4cx = 4a^2 - 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} \Leftrightarrow$$

$$a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} = a^2 - cx.$$

Se ridică din nou la pătrat şi după efectuarea unor calcule elementare se obţine:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2 - c^2} = 1.$$

Deoarece $a > c > 0$, putem nota expresia pozitivă $a^2 - c^2$ cu b^2. Rezultă ecuaţia canonică a elipsei:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

2.3. Hiperbola

Fie c un număr real strict pozitiv şi F, F' două puncte fixate în plan (distincte) astfel încât $FF' = 2c$. Fie $a \in \mathbb{R}$, $a \in (0, c)$.

Definiţie. Mulţimea H a punctelor M din plan cu proprietatea că

$$|MF - MF'| = 2a$$

se numeşte hiperbolă.

Propoziţie. *Punctul* $M(x, y)$ *aparţine hiperbolei* H *dacă şi numai dacă:*

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \ \textit{unde } b^2 = c^2 - a^2.$$

Demonstraţie. $M \in H \Leftrightarrow |MF - MF'| = 2a \Leftrightarrow$

$$MF - MF' = \pm 2a \Leftrightarrow \sqrt{(x+c)^2 + y^2} - \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = \pm 2a.$$

Am ales ca în cazul elipsei dreapta FF' drept axă Ox, O originea reperului cartezian fiind mijlocul segmentului FF' şi mediatoarea segmentului FF' drept axă Oy. În aceste condiţii punctele F şi F' au coordonatele: $(-c, 0)$ respectiv $(c, 0)$.

Se trece al doilea radical în membrul drept, se ridică la pătrat şi se obţine:

$$x^2 + 2cx + c^2 + y^2 = x^2 - 2cx + c^2 + y^2 \pm 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + 4a^2.$$

După efectuarea calculelor şi după o altă ridicare la pătrat se obţine ecuaţia hiperbolei:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

unde am notat expresia pozitivă $c^2 - a^2$ cu b^2.

Observaţie. Punctele F şi F' se numesc focare, atât în cazul elipsei cât şi în cazul hiperbolei.

Observaţie. Hiperbola

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

are ca asimptote oblice dreptele:

$$y = \pm\frac{b}{a}x.$$

2.4. Parabola

Fie h o dreaptă în plan şi F un punct care nu aparţine lui h.

Definiţie. Mulţimea $\mathcal{P}$ a punctelor M din plan cu proprietatea că

$$d(M, h) = MF$$

se numeşte parabolă.

Punctul F se numeşte focarul parabolei, dreapta h se numeşte directoarea parabolei iar MF se numeşte raza focală corespunzătoare punctului M.

Fie A proiecţia focarului F pe directoarea h şi O mijlocul segmentului $[AF]$. Alegem ca axă Ox semidreapta $[OF$, iar ca axă Oy mediatoarea segmentului AF. Notăm cu p lungimea segmentului $[AF]$. Acest număr real pozitiv p se numeşte parametrul parabolei.

Propoziţie. *Punctul $M(x, y)$ aparţine parabolei dacă şi numai dacă*

$$y^2 = 2px.$$

Demonstraţie. $M \in \mathcal{P} \Leftrightarrow d(M, h) = MF \Leftrightarrow$

$$d^2(M, h) = MF^2 \Leftrightarrow \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 = \left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2 \Leftrightarrow y^2 = 2px.$$

Tangenta într-un punct la parabolă. Propoziţie. *Fie parabola de ecuaţie $y^2 = 2px$ şi $M_0(x_0, y_0)$ un punct al parabolei. Tangenta la parabolă în punctul M_0 are ecuaţia:*

$$yy_0 = p(x + x_0).$$

Demonstraţie. $y^2 = 2px \Rightarrow y = \pm\sqrt{2px}$

Ecuaţia generală a tangentei la curba $y = f(x)$ în punctul (x_0, y_0) unde $y_0 = f(x_0)$ este:

$$y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0).$$

În cazul parabolei avem

$$f'(x_0) = \pm\frac{\sqrt{2p}}{2\sqrt{x_0}} = \frac{p}{y_0}.$$

Deci ecuaţia tangentei este:

$$y - y_0 = \frac{p}{y_0}(x - x_0) \Leftrightarrow yy_0 = p(x + x_0).$$

Teoremă. (Proprietatea optică a parabolei) *Tangenta şi normala la parabolă într-un punct M al ei sunt bisectoarele unghiului format de raza focală M_0F şi paralela la axa Ox dusă prin punctul M_0.*

Demonstraţie. Fie $B\left(-\frac{p}{2}, y_0\right)$ punctul de intersecţie al directoarei h cu paralela dusă prin M_0 la axa Ox. Din definiţia parabolei rezultă că triunghiul M_0BF este isoscel, deci pentru a demonstra că tangenta în M_0 este bisectoarea unghiului $\widehat{BM_0F}$ este suficient să demonstrăm că tangenta este mediana corespunzătoare laturii BF.

Ecuaţia tangentei în M_0 este

$$yy_0 = p(x + x_0).$$

Mijlocul lui BF are coordonatele $\left(0, \dfrac{y_0}{2}\right)$ şi se verifică imediat că aceste coordonate verifică ecuaţia tangentei.

Partea 2

Geometrie analitică în spaţiu

CAPITOLUL 1

Ecuaţiile carteziene ale dreptei în spaţiu în raport cu un reper ortonormat (dreapta definită prin punct şi vector director, dreapta definită prin două puncte distincte, dreapta definită ca intersecţie de două plane)

1.1. Dreapta definită prin punct şi vector director

Fie reperul cartezian ortonormat $\mathcal{R}\{0; \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}\}$ în spaţiu. Fie d o dreaptă în spaţiu care are un vector director $\overrightarrow{d}$ de componente p, q şi r, adică

$$\overrightarrow{d} = p\,\overrightarrow{i} + q\,\overrightarrow{j} + r\,\overrightarrow{k}$$

($\overrightarrow{d} = \overrightarrow{0}$, adică p, q, r nu sunt nule simultan).

Pe dreapta d se consideră un punct fixat M_0 de coordonate (x_0, y_0, z_0) şi un punct variabil M de coordonate (x, y, z).

Fie $\overrightarrow{r}_M$ şi $\overrightarrow{r}_{M_0}$ vectorii de poziţie ai punctelor M şi M_0 faţă de originea O.

Ecuaţia vectorială a dreptei d este

$$d: \ \overrightarrow{r}_M = \overrightarrow{r}_{M_0} + \lambda\,\overrightarrow{d}, \text{ unde } \lambda \in \mathbb{R}.$$

Propoziţie. *Ecuaţiile carteziene ale dreptei d în raport cu reperul $\mathcal{R}\{0, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}\}$ sunt:*

$$\frac{x - x_0}{p} = \frac{y - y_0}{q} = \frac{z - z_0}{r}.$$

Demonstraţie. Ecuaţia vectorială a dreptei d

$$\overrightarrow{r}_M = \overrightarrow{r}_{M_0} + \lambda\,\overrightarrow{d}$$

se transcrie astfel:

$$x\,\overrightarrow{i} + y\,\overrightarrow{j} + z\,\overrightarrow{k} = x_0\,\overrightarrow{i} + y_0\,\overrightarrow{j} + z_0\,\overrightarrow{k} + \lambda(p\,\overrightarrow{i} + q\,\overrightarrow{j} + r\,\overrightarrow{k}).$$

Deoarece versorii $\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}$ sunt liniar independenţi avem:

$$\begin{cases} x = x_0 + \lambda p \\ y = y_0 + \lambda q \\ z = z_0 + \lambda r \end{cases}$$

Acestea sunt ecuaţiile parametrice ale dreptei d. Eliminând parametrul λ între cele trei ecuaţii avem:

$$\frac{x - x_0}{p} = \frac{y - y_0}{q} = \frac{z - z_0}{r}.$$

1.2. Dreapta definită prin două puncte distincte

Fie dreapta d în spaţiul trei-dimensional şi fie reperul ortonormat $\mathcal{R} = \{0; \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}\}$.

Considerăm punctele fixate, distincte, pe dreapta d, $M_1(x_1, y_1, z_1)$ şi $M_2(x_2, y_2, z_2)$ şi punctul variabil $M(x, y, z)$ aparţinând dreptei d.

Propoziţie. *Ecuaţiile carteziene ale dreptei d sunt:*

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}.$$

Demonstraţie. Punctele distincte M_1 şi M_2 de pe dreapta d determină un vector director

$$\overrightarrow{M_1M_2} = (x_2 - x_1)\overrightarrow{i} + (y_2 - y_1)\overrightarrow{j} + (z_2 - z_1)\overrightarrow{k}$$

al dreptei d.

Deci, conform propoziţiei anterioare, ecuaţiile parametrice ale dreptei d sunt:

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}.$$

1.3. Dreapta definită ca intersecţie de două plane

Fie planele π_1 şi π_2 de ecuaţii:

$$A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$$

$$A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0.$$

Propoziţie. *Mulţimea de intersecţie a celor două plane poate fi: o dreaptă, un plan sau mulţimea vidă.*

Demonstraţie. Sistemul format cu cele două ecuaţii de plane are matricea:

$$M = \begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{pmatrix}$$

şi matricea extinsă:

$$\overline{M} = \begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 & -D_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 & -D_2 \end{pmatrix}.$$

Conform teoremei lui Kronecker-Capelli, sistemul este compatibil dacă şi numai dacă rangul matricei sistemului este egal cu rangul matricei extinse. Avem următoarele cazuri:

(i) $\operatorname{rang} M = \operatorname{rang} \overline{M} = 1$, ceea ce este echivalent cu

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} = \frac{D_1}{D_2},$$

atunci planele coincid, deci $\pi_1 \cap \pi_2$ este un plan.

(ii) $\operatorname{rang} M = 1$, $\operatorname{rang} \overline{M} = 2$, ceea ce este echivalent cu

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} \neq \frac{D_1}{D_2},$$

atunci sistemul este incompatibil, deci π_1 este paralel cu π_2 (intersecţia este vidă).

(iii) $\operatorname{rang} M = 2$ ceea ce implică şi $\operatorname{rang} \overline{M} = 2$, atunci sistemul este compatibil şi intersecţia celor două plane este o dreaptă.

Deci, să reţinem că o altă modalitate de a descrie analitic o dreaptă în spaţiu este prin intersecţia a două plane, adică printr-un sistem de tipul:

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases}$$

cu proprietatea că rangul matricei sistemului este egal cu 2.

Observaţie. Descrierea analitică a dreptei ca intersecţie de două plane nu scoate în evidenţă un punct şi un vector director al dreptei. Pentru a obţine un vector director al dreptei avem următoarea propoziţie.

Propoziţie. *Fie dreapta d dată prin intersecţia a două plane:*

$$d: \begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0. \end{cases}$$

Atunci ecuaţiile dreptei sunt:

$$\frac{x - x_0}{p} = \frac{y - y_0}{q} = \frac{z - z_0}{r},$$

unde (x_0, y_0, z_0) *este o soluţie particulară a sistemului, iar*

$$p = \begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix}, \quad q = \begin{vmatrix} C_1 & A_1 \\ C_2 & A_2 \end{vmatrix}, \quad r = \begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}.$$

Demonstraţie. Orice punct de pe dreaptă are coordonatele:

$$\begin{cases} x = x_0 + \lambda p \\ y = y_0 + \lambda q \\ z = z_0 + \lambda r \end{cases}$$

Printr-un calcul elementar şi direct se introduc aceste coordonate în ecuaţiile celor două plane şi se arată că aceste ecuaţii sunt verificate.

1.4. Distanţa de la un punct la o dreaptă în spaţiu. Aria unui triunghi în spaţiu

1.4.1. Aria unui triunghi în spaţiu. Fie punctele $M_i(x_i, y_i, z_i)$, $i = \overline{1,3}$, necoliniare, în spaţiul trei-dimensional.

Propoziţie. *Aria triunghiului* $M_1M_2M_3$ *este:*

$$\sigma[M_1M_2M_3] = \frac{1}{2} \cdot \|\overrightarrow{M_1M_2} \times \overrightarrow{M_1M_3}\|.$$

Demonstraţie. Vectorii $\overrightarrow{M_1M_2}$ şi $\overrightarrow{M_1M_3}$ sunt necoliniari şi determină un paralelogram având ca laturi adiacente cei doi vectori. Din interpretarea geometrică a normei produsului vectorial avem că aria acestui paralelogram este $\|\overrightarrow{M_1M_2} \times \overrightarrow{M_1M_3}\|$.

Triunghiul $M_1M_2M_3$ are aria jumătate din aria acestui paralelogram, de unde rezultă concluzia.

Observaţie. Ţinând cont că produsul vectorial $\overrightarrow{M_1M_2} \times \overrightarrow{M_1M_3}$ are expresia analitică:

$$\overrightarrow{M_1M_2} \times \overrightarrow{M_1M_3} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix},$$

rezultă că aria triunghiului $M_1M_2M_3$ are următoarea expresie analitică (în funcţie de coordonatele punctelor M_i):

$$\sigma[M_1M_2M_3] = \frac{1}{2}\sqrt{\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} z_2 - z_1 & x_2 - x_1 \\ z_3 - z_1 & x_3 - x_1 \end{vmatrix}^2}.$$

1.4.2. Distanţa de la un punct la o dreaptă în spaţiu. Fie punctele $M_i(x_i, y_i, z_i)$, $i = \overline{1, 3}$, în spaţiu.

Propoziţie. *Distanţa de la punctul M_1 la dreapta M_2M_3 se calculează după formula:*

$$d(M_1, M_2M_3) = \frac{\sqrt{\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} z_2 - z_1 & x_2 - x_1 \\ z_3 - z_1 & x_3 - x_1 \end{vmatrix}^2}}{\sqrt{(x_2 - x_3)^2 + (y_2 - y_3)^2 + (z_2 - z_3)^2}}.$$

Demonstraţie. Distanţa de la punctul M_1 la dreapta M_2M_3 este înălţimea triunghiului $M_1M_2M_3$, dusă din vârful M_1. Deci

$$d(M_1, M_2M_3) = 2 \cdot \frac{\sigma[M_1M_2M_3]}{M_2M_3},$$

de unde rezultă concluzia.

CAPITOLUL 2

Ecuaţiile carteziene ale planului

2.1. Ecuaţia carteziană a planului prin punct şi doi vectori directori

Fie $\mathcal{R} = \{0; \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}\}$ un reper cartezian ortonormat în spaţiu, M_0 un punct fixat în planul π, de coordonate (x_0, y_0, z_0), $\overrightarrow{d}_1$ şi $\overrightarrow{d}_2$ doi vectori nenuli şi necoliniari de componente (p_1, q_1, r_1) şi (p_2, q_2, r_2) situaţi în planul π (sau paraleli cu planul π).

Propoziţie. *Planul π are ecuaţia carteziană:*

$$\pi : \begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ p_1 & q_1 & r_1 \\ p_2 & q_2 & r_2 \end{vmatrix} = 0.$$

Demonstraţie. Ecuaţia vectorială a planului determinat de punctul fixat M_0 şi vectorii nenuli şi necoliniari $\overrightarrow{d}_1$ şi $\overrightarrow{d}_2$ este:

$$\overrightarrow{r}_M = \overrightarrow{r}_{M_0} + \alpha \overrightarrow{d}_1 + \beta \overrightarrow{d}_2,$$

unde $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ şi M este un punct variabil în plan. Transcriind vectorii pe componente, obţinem:

$$\begin{cases} x = x_0 + \alpha p_1 + \beta p_2 \\ y = y_0 + \alpha q_1 + \beta q_2 \\ z = z_0 + \alpha r_1 + \beta r_2 \end{cases}$$

Acestea sunt ecuaţiile parametrice ale planului π. Interpretând acest sistem ca un sistem liniar de trei ecuaţii cu două necunoscute α şi β, atunci trebuie ca rangul matricei sistemului să fie egal cu rangul matricei extinse.

Matricea sistemului este:

$$\mathcal{M} = \begin{pmatrix} p_1 & p_2 \\ q_1 & q_2 \\ r_1 & r_2 \end{pmatrix} \text{ şi } \operatorname{rang} \mathcal{M} = 2$$

(pentru că $\operatorname{rang}\mathcal{M} = 1$ ar însemna că vectorii sunt coliniari, adică există $\lambda \in \mathbb{R}$ astfel încât $\overrightarrow{d}_1 = \lambda \overrightarrow{d}_2$, ceea ce este în contradicţie cu ipoteza).

Deci şi $\operatorname{rang}\overline{\mathcal{M}} = 2$, unde

$$\overline{\mathcal{M}} = \begin{pmatrix} p_1 & p_2 & x - x_0 \\ q_1 & q_2 & y - y_0 \\ r_1 & r_2 & z - z_0 \end{pmatrix}.$$

Dar $\operatorname{rang}\overline{\mathcal{M}} = 2 \Leftrightarrow \det\overline{\mathcal{M}} = 0 \Leftrightarrow$

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ p_1 & q_1 & r_1 \\ p_2 & q_2 & r_2 \end{vmatrix} = 0.$$

2.2. Ecuaţia carteziană a planului prin trei puncte distincte, necoliniare

Fie $M_i(x_i, y_i, z_i)$, $i = \overline{1,3}$ trei puncte distincte, necoliniare, în spaţiul tridimensional raportat la reperul cartezian $\mathcal{R} = \{0; \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}\}$.

Propoziţie. *Planul π determinat de punctele M_i, $i = \overline{1,3}$ are ecuaţia:*

$$\pi : \begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Demonstraţie. Punctele necoliniare, distincte, M_i, $i = \overline{1,3}$ determină doi vectori nenuli şi necoliniari $\overrightarrow{M_1M_2}$ şi $\overrightarrow{M_1M_3}$.

Componentele acestor vectori sunt:

$$(x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1) \text{ şi } (x_3 - x_1, y_3 - y_1, z_3 - z_1).$$

Conform propoziţiei anterioare, ecuaţia planului este:

$$\pi : \begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

2.3. Ecuaţia carteziană a planului prin tăieturi

Dacă se consideră punctele particulare: $A(a,0,0)$, $B(0,b,0)$ şi $C(0,0,c)$ atunci planul determinat de ele are ecuaţia:

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1,$$

şi este numită ecuaţia planului prin tăieturi, pentru că planul "taie" axele Ox, Oy şi Oz în punctele A, B şi C.

Într-adevăr, avem un caz particular de plan definit de trei puncte distincte şi necoliniare şi care are ecuaţia:

$$\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ a & 0 & 0 & 1 \\ 0 & b & 0 & 1 \\ 0 & 0 & c & 1 \end{vmatrix}=0$$

care după dezvoltarea determinantului devine:

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1.$$

Observaţie. Atât în cazul ecuaţiei carteziene a planului prin punct şi doi vectori directori cât şi în cazul ecuaţiei planului prin trei puncte distincte, după dezvoltarea determinantului din membrul drept se obţine ecuaţia generală a planului:

$$Ax+By+Cz+D=0.$$

Interpretarea geometrică a coeficienţilor A, B şi C este prezentată în cele ce urmează.

Fie planul π de ecuaţie $Ax+By+Cz+D=0$, şi fie un punct fixat $M_0(x_0,y_0,z_0)$ în planul π. Atunci coordonatele punctului M_0 verifică ecuaţia planului, adică:

$$Ax_0+By_0+Cz_0+D=0.$$

Scăzând din ecuaţia planului această identitate, rezultă:

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0.$$

Această relaţie exprimă perpendicularitatea a doi vectori: $\overrightarrow{n}(A,B,C)$ şi $\overrightarrow{M_0M}(x-x_0,y-y_0,z-z_0)$ (produsul lor scalar fiind nul).

Din punct de vedere geometric, rezultă că vectorul $\overrightarrow{n}(A, B, C)$ este perpendicular pe planul π pentru că este perpendicular pe orice vector variabil $\overrightarrow{M_0M}$ din planul π.

Vectorul $\overrightarrow{n}(A, B, C)$ se numeşte vector normal al planului, iar ecuaţia:

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$$

se numeşte ecuaţia carteziană a planului definit de punctul fixat $M_0(x_0, y_0, z_0)$ şi de vectorul normal $\overrightarrow{n}(A, B, C)$.

2.4. Distanţa de la un punct la un plan

Fie planul π de ecuaţie $Ax + By + Cz + D = 0$ şi punctul $M_0(x_0, y_0, z_0)$ care nu aparţine planului π. Fie M' proiecţia ortogonală a punctului M_0 pe planul π şi

$$\overrightarrow{M'M''} = \frac{1}{\|\overrightarrow{n}\|} \cdot \overrightarrow{n} = \overrightarrow{n}_0,$$

versorul lui $\overrightarrow{n}$. Numărul real δ determinat prin relaţia:

$$\overrightarrow{M'M_0} = \delta \cdot \overrightarrow{n}_0$$

se numeşte distanţa orientată de la punctul M_0 la planul π.

Dacă M_0 se găseşte în acelaşi semispaţiu cu M'' atunci $\delta > 0$ iar dacă M_0 este în celălalt semispaţiu, atunci $\delta < 0$.

Înmulţim scalar relaţia $\overrightarrow{M'M_0} = \delta \cdot \overrightarrow{n}_0$ cu $\overrightarrow{n}_0$ şi rezultă:

$$\delta = \overrightarrow{n}_0 \cdot \overrightarrow{M'M_0} = \frac{1}{\|\overrightarrow{n}\|} \cdot \overrightarrow{n} \cdot (\overrightarrow{A_1M_0} - \overrightarrow{A_1M'})$$

$$= \frac{1}{\|\overrightarrow{n}\|} \cdot \overrightarrow{n} \cdot \overrightarrow{A_1M_0} = \frac{A(x_0 - x_1) + B(y_0 - y_1) + C(z_0 - z_1)}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

$$= \frac{Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}},$$

unde $A_1(x_1, y_1, z_1)$ este un punct oarecare al planului π.

Numărul real pozitiv

$$d = |\delta| = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

este distanţa de la punctul M_0 la planul π.

2.5. Perpendiculara comună a două drepte necoplanare

Fie dreptele necoplanare

$$d_i: \ \frac{x-x_i}{p_i} = \frac{y-y_i}{q_i} = \frac{z-z_i}{r_i}, \ i = \overline{1,2}.$$

Definiţie. Perpendiculara comună a celor două drepte este dreapta care intersectează cele două drepte şi este perpendiculară pe fiecare dintre ele.

Propoziţie. *Ecuaţiile perpendicularei comune a dreptelor d_1 şi d_2 sunt:*

$$d: \left\{ \begin{array}{l} \begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ p_1 & q_1 & r_1 \\ \begin{vmatrix} q_1 & r_1 \\ q_2 & r_2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} r_1 & p_1 \\ r_2 & p_2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} p_1 & q_1 \\ p_2 & q_2 \end{vmatrix} \end{vmatrix} = 0 \\ \\ \begin{vmatrix} x-x_2 & y-y_2 & z-z_2 \\ p_2 & q_2 & r_2 \\ \begin{vmatrix} q_1 & r_1 \\ q_2 & r_2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} r_1 & p_1 \\ r_2 & p_2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} p_1 & q_1 \\ p_2 & q_2 \end{vmatrix} \end{vmatrix} = 0 \end{array} \right.$$

Demonstraţie. Perpendiculara comună d are ca vector director vectorul

$$\overrightarrow{d} = \overrightarrow{d}_1 \times \overrightarrow{d}_2 = \begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ p_1 & q_1 & r_1 \\ p_2 & q_2 & r_2 \end{vmatrix}.$$

Dreapta d este definită ca intersecţia dintre planele π_1 şi π_2 definite de dreptele d_1 şi d respectiv de d_2 şi d.

Ecuaţia planului π_1 se scrie în varianta prin punct şi doi vectori directori adică prin punctul $M_1(x_1, y_1, z_1) \in d_1$ şi prin vectorii $\overrightarrow{d}_1(p_1, q_1, r_1)$ şi $\overrightarrow{d} = \overrightarrow{d}_1 \times \overrightarrow{d}_2$.

Analog se scrie ecuaţia planului π_2, de unde rezultă sistemul de ecuaţii al dreptei d.

2.6. Distanţa dintre două drepte necoplanare

Definiţie. Distanţa dintre două drepte necoplanare din spaţiu este lungimea segmentului de pe perpendiculara comună, cuprins între cele două drepte.

Propoziţie. *Fiind date dreptele necoplanare*

$$d_1 : \ \frac{x-x_1}{p_1} = \frac{y-y_1}{q_1} = \frac{z-z_1}{r_1}$$

$$d_2 : \ \frac{x-x_2}{p_2} = \frac{y-y_2}{q_2} = \frac{z-z_2}{r_2},$$

distanţa dintre dreptele d_1 *şi* d_2 *este:*

$$d(d_1, d_2) = \frac{|(\overrightarrow{M_1M_2}, \overrightarrow{d}_1, \overrightarrow{d}_2)|}{\|\overrightarrow{d}_1 \times \overrightarrow{d}_2\|},$$

unde $M_1(x_1, y_1, z_1)$ *este un punct oarecare pe dreapta* d_1, $M_2(x_2, y_2, z_2)$ *este un punct oarecare pe dreapta* d_2 *şi vectorii directori ai dreptelor* d_1 *şi* d_2 *sunt* $\overrightarrow{d}_1(p_1, q_1, r_1)$ *şi* $\overrightarrow{d}_2(p_2, q_2, r_2)$.

Demonstraţie. Se demonstrează uşor că distanţa dintre dreptele d_1 şi d_2 este înălţimea paralelipipedului construit pe vectorii $\overrightarrow{d}_1$, $\overrightarrow{d}_2$ şi $\overrightarrow{M_1M_2}$.

Volumul acestui paralelipiped este modulul produsului mixt al celor trei vectori, adică:

$$|(\overrightarrow{M_1M_2}, \overrightarrow{d}_1, \overrightarrow{d}_2)| = |\begin{vmatrix} x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ p_1 & q_1 & r_1 \\ p_2 & q_2 & r_2 \end{vmatrix}|$$

iar aria bazei este aria paralelogramului construit pe vectorii $\overrightarrow{d}_1$ şi $\overrightarrow{d}_2$, adică: $\|\overrightarrow{d}_1 \times \overrightarrow{d}_2\|$, unde

$$\overrightarrow{d}_1 \times \overrightarrow{d}_2 = \begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ p_1 & q_1 & r_1 \\ p_2 & q_2 & r_2 \end{vmatrix}.$$

2.7. Unghiul dintre două drepte în spaţiu

Definiţie. Unghiul dintre două drepte în spaţiu este unghiul dintre doi vectori directori ai lor.

Fie dreptele d_1 şi d_2 având ca vectori directori $\overrightarrow{d}_1(p_1, q_1, r_1)$ şi $\overrightarrow{d}_2(p_2, q_2, r_2)$.

Din definiţia produsului scalar a doi vectori avem:

$$\overrightarrow{d}_1 \cdot \overrightarrow{d}_2 = \|\overrightarrow{d}_1\| \cdot \|\overrightarrow{d}_2\| \cdot \cos(\widehat{\overrightarrow{d}_1, \overrightarrow{d}_2}).$$

Rezultă

$$\cos(\widehat{\overrightarrow{d}_1, \overrightarrow{d}_2}) = \frac{\overrightarrow{d}_1 \cdot \overrightarrow{d}_2}{\|\overrightarrow{d}_1\| \cdot \|\overrightarrow{d}_2\|} = \frac{p_1p_2 + q_1q_2 + r_1r_2}{\sqrt{p_1^2 + q_1^2 + r_1^2} \cdot \sqrt{p_2^2 + q_2^2 + r_2^2}}.$$

2.8. Unghiul dintre o dreaptă şi un plan

Definiţie. Unghiul dintre o dreaptă şi un plan este unghiul dintre acea dreaptă şi proiecţia ei ortogonală pe plan.

Fie dreapta

$$d: \ \frac{x - x_0}{p} = \frac{y - y_0}{q} = \frac{z - z_0}{r}$$

şi planul

$$\pi: \ Ax + By + Cz + D = 0.$$

Unghiul dintre dreapta d şi planul π este complementul unghiului dintre vectorul director $\overrightarrow{d}$ al dreptei d şi vectorul normal $\overrightarrow{n}$ al planului π.

Deci măsura unghiului dintre dreapta d şi planul π este:

$$m(\widehat{d, \pi}) = \begin{cases} \dfrac{\pi}{2} - \arccos \dfrac{\overrightarrow{d} \cdot \overrightarrow{n}}{\|\overrightarrow{d}\| \cdot \|\overrightarrow{n}\|} & \text{dacă} \quad \overrightarrow{d} \cdot \overrightarrow{n} \geq 0 \\ \\ \arccos \dfrac{\overrightarrow{d} \cdot \overrightarrow{n}}{\|\overrightarrow{d}\| \cdot \|\overrightarrow{n}\|} - \dfrac{\pi}{2} & \text{dacă} \quad \overrightarrow{d} \cdot \overrightarrow{n} < 0. \end{cases}$$

2.9. Unghiul dintre două plane

Fie planele

$$\pi_1: \ A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$$

$$\pi_2: \ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0.$$

Din definiţie, unghiul dintre planele π_1 şi π_2 este unghiul dintre vectorii lor normali. Deci cosinusul unghiului dintre două plane este:

$$\cos(\widehat{\pi_1, \pi_2}) = \frac{A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}},$$

(adică $\dfrac{\overrightarrow{n}_1 \cdot \overrightarrow{n}_2}{\|\overrightarrow{n}_1\| \cdot \|\overrightarrow{n}_2\|}$).

2.10. Sfera

Definiţie. Se numeşte sferă locul geometric al punctelor din spaţiu egal depărtate de un punct fixat numit centrul sferei.

Propoziţie. *Fie punctul fixat în spaţiu $C(a,b,c)$. Atunci ecuaţia sferei cu centrul în C şi de rază R este:*

$$(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=R^2.$$

Demonstraţie. Fie $M(x,y,z)$ un punct variabil al sferei. Avem

$$CM=R \Leftrightarrow \sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2}=R \Rightarrow$$

$$(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=R^2.$$

Ecuaţia generală a sferei se mai poate scrie:

$$x^2+y^2+z^2+mx+ny+pz+q=0$$

unde am notat $m=-2a$, $n=-2b$, $p=-2c$, $q=a^2+b^2+c^2-R^2$.

Intersecţia unei sfere cu un plan

Propoziţie. *Fie sfera S de ecuaţie:*

$$(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=R^2$$

şi planul π de ecuaţie

$$Ax+By+Cz+D=0.$$

Atunci intersecţia sferei S cu planul π este un cerc, un punct sau mulţimea vidă.

Demonstraţie. Într-adevăr dacă distanţa de la centrul sferei la planul π este mai mică strict decât R atunci intersecţia este un cerc. Deci dacă:

$$\frac{|Aa+Bb+Cc+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}<R$$

atunci intersecţia este cercul de ecuaţii:

$$\begin{cases} (x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=R^2 \\ Ax+By+Cz+D=0 \end{cases}$$

Dacă distanţa de la centrul sferei la plan este egală cu R, adică:

$$\frac{|Aa+Bb+Cc+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}=R$$

atunci intersecţia sferei S cu planul π este un punct.

În acest caz planul π este tangent sferei S.

Dacă
$$\frac{|Aa + Bb + Cc + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} > R,$$
atunci planul nu intersectează sfera.

2.11. Probleme propuse

1. Într-un reper cartezian xOy se consideră punctele $A(\alpha, 0)$ şi $B(0, \beta)$ unde $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

1. Calculaţi lungimea segmentului AB şi coordonatele mijlocului acestuia.

2. Scrieţi ecuaţia cercului circumscris triunghiului AOB.

3. Dacă punctele A, B sunt variabile, segmentul AB are lungimea constantă, iar M este un punct fix al acestuia, să se determine locul geometric al lui M. Studiaţi cazul în care M este mijlocul segmentului.

2. Se dă parabola de ecuaţie $y^2 = 2px$.

a) Să se scrie ecuaţia tangentei la parabolă într-un punct oarecare al ei.

b) Să se afle coordonatele proiecţiei unui punct din plan pe tangentă.

c) Să se afle locul geometric al proiecţiilor focarului pe tangentele la parabolă.

3. Se dau parabolele de ecuaţii $y^2 = 2px$ şi $y^2 = 2qx$, $(0 < q < p)$. O tangentă variabilă dusă la a doua parabolă intersectează prima parabolă în punctele M_1 şi M_2. Să se determine locul geometric al mijlocului segmentului $[M_1M_2]$.

4. Se consideră reperul cartezian xOy şi P un punct pe prima bisectoare a axelor de coordonate. Fie P_1 şi P_2 proiecţiile ortogonale ale lui P pe axa absciselor respectiv pe axa ordonatelor. O dreaptă variabilă d care trece prin P intersectează axa absciselor în M şi axa ordonatelor în N. Să se demonstreze că pentru orice poziţie a dreptei d, dreptele MP_2, NP_1 şi perpendiculara pe d care trece prin O sunt trei drepte concurente.

5. Fie ABC un triunghi oarecare şi M mijlocul laturii $[BC]$. Se notează cu N un punct pe AB astfel ca $A \in (BN)$. Ortocentrul H al triunghiului ABC se proiectează pe bisectoarele unghiurilor $\widehat{BAC}$ şi $\widehat{CAN}$ respectiv în punctele P şi Q. Să se arate că punctele M, P şi Q sunt coliniare.

6. Fie cubul $ABCDA'B'C'D'$ de muchie $AB = a$ şi punctele $M \in (AB)$, $N \in (AD)$ şi $P \in (AA')$ astfel încât $AM = \alpha$, $AN = \beta$ şi $AP = \gamma$.

Să se demonstreze că sfera înscrisă în cubul $ABCDA'B'C'D'$ este tangentă planului (M, N, P) dacă şi numai dacă are loc relaţia:

$$\frac{2\alpha\beta\gamma}{\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha-\sqrt{\alpha^2\beta^2+\beta^2\gamma^2+\gamma^2\alpha^2}}=a.$$

7. Fie cubul $[ABCDA'B'C'D']$ cu muchia de lungime a, M şi P mijloacele muchiilor $[BC]$ şi respectiv $[AA']$, O centrul cubului, O' centrul bazei de jos $[A'B'C'D']$ a cubului şi S mijlocul segmentului $[OO']$. Să se determine secţiunea realizată în cub de planul $[MPS]$ şi aria acestei secţiuni.

8. Se consideră într-un reper oarecare punctul $A(1, 2, 1)$ şi dreptele

$$d_1 : \begin{cases} x+2y-z+1=0 \\ x-y+z-1=0 \end{cases} \qquad d_2 : \begin{cases} 2x-y+z=0 \\ x-y+z=0 \end{cases}$$

Să se scrie ecuaţia planului ce trece prin A şi este paralel cu dreptele d_1 şi d_2.

9. Să se scrie ecuaţia planului determinat de dreptele

$$d_1 : \frac{x}{7}=\frac{y+2}{3}=\frac{z-1}{5},$$
$$d_2 : \frac{x-1}{7}=\frac{y-3}{3}=\frac{z+2}{5}.$$

10. Să se găsească ecuaţiile perpendicularei coborâte din punctul $P(4, 3, 10)$ pe dreapta

$$d : \frac{x-1}{2}=\frac{y-2}{4}=\frac{z-3}{5}$$

precum şi simetricul P' al punctului P faţă de dreapta d.

11. Să se scrie ecuaţia planului care conţine dreapta

$$d_1 : \frac{x-3}{2}=\frac{y+4}{1}=\frac{z-2}{-3}$$

şi este paralel cu dreapta

$$d_2 : \frac{x+5}{4}=\frac{y-2}{2}=\frac{z-1}{2}.$$

12. Să se găsească proiecţia ortogonală a punctului $(5, 0, -2)$ pe dreapta

$$\frac{x-2}{3}=\frac{y-1}{2}=\frac{z-3}{4}.$$

13. Să se găsească distanţa dintre dreptele

$$\frac{x-1}{2}=\frac{y+1}{3}=\frac{z}{1} \text{ şi } \frac{x+1}{3}=\frac{y}{4}=\frac{z-1}{3}$$

şi ecuaţiile perpendicularei comune.

14. Se dau dreptele M_1M_2, unde $M_1(-1,0,1)$ şi $M_2(-2,1,0)$ şi

$$x+y+z=1, \quad 2x-y-5z=0.$$

Să se afle distanţa dintre cele două drepte şi ecuaţiile perpendicularei comune.

15. Să se calculeze unghiul dintre dreptele

$$d_1: \begin{cases} x+2y+z-1=0 \\ x-2y+z+1=0 \end{cases} \qquad d_2: \begin{cases} x-y-z-1=0 \\ x-y+2z+1=0 \end{cases}$$

16. Se dau dreptele

$$d: \begin{cases} x+y-z=1 \\ 2x-y+z=2 \end{cases} \qquad d': \begin{cases} 5x-y+z=1 \\ 2y+3z=3 \end{cases}$$

Se cere:

a) ecuaţia planului P care trece prin d şi este paralelă cu d';

b) ecuaţia planului Q care trece prin d' şi este perpendicular pe planul P;

c) unghiul format de dreapta d cu planul Q;

d) distanţa de la origine la dreapta d.

17. Să se găsească ecuaţiile planelor tangente la sfera

$$(x-2)^2+(y+1)^2+(z-3)^2=6$$

în punctele de intersecţie cu dreapta

$$\frac{x-1}{1}=\frac{y}{-1}=\frac{z-1}{2}.$$

18. Să se scrie ecuaţia sferei care are centrul în planul

$$P:\ 2x-y+z-4=0$$

şi care este tangentă planului

$$P':\ 4x+3z-29=0$$

în punctul $T(5,-2,3)$.

19. Să se găsească ecuaţia sferei tangente dreptei

$$d_1:\ \frac{x+1}{1}=\frac{y-2}{4}=\frac{z-3}{3}$$

în punctul $T_1(-1,2,3)$ şi dreptei

$$d_2: \ \frac{x+3}{1} = \frac{y+2}{2} = \frac{z-1}{-3}$$

în punctul $T_2(-3,-2,1)$.

Bibliografie

[1] Andrica D., Ţopan L., *Analytic Geometry*, Cluj University Presss, 2004.

[2] Andrica D., Varga Cs., Văcăreţu D., *Teme şi probleme alese de geometrie*, Editura Plus, Bucureşti, 2002.

[3] Galbură Gh., Rado F., *Geometrie*, Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1979.

[4] Murgulescu E., Flexi S., Kreindler O., Sacter O., Tîrnoveanu M., *Geometrie analitică şi diferenţială*, Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1965.

[5] Rado F., Orban B., Groze V., Vasiu A., *Culegere de probleme de geometrie*, Litografia Univ. Babeş-Bolyai, Cluj-Napoca, 1979.