1. Folyonosság és deriválhatóság. Függvények ábrázolása, alkalmazások

1.1. Folytonosság és deriválhatóság

1. Az $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ függvényt az

$$f(x)=\begin{cases} ae^x+b+e^{-x}, & \text{ha } x\le 0\\ x^2, & \text{ha } x>0\end{cases}$$

képlettel értelmezzük, ahol $a,b\in\mathbb{R}$ paraméterek. Legyen $x_0=0$. Mely állítások igazak az alább felsoroltak közül?

A Végtelen sok olyan (a,b) számpár létezik, amelyre az f folytonos az x_0-ban.
B f deriválható x_0-ban $\iff$ $(a=1$ és $b=-2)$.
C f folytonos x_0-ban $\iff$ $a+b=-1$.
D f deriválható x_0-ban $\iff$ $(a=-2$ és $b=1)$.

(*Felvételi vizsgafeladat, 2019.*)[1]

2. Adott az $f:\mathbb{R}\setminus\{-1\}\to\mathbb{R}$ függvény az $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x^n+x}{x^{2n}+1}$ képlettel, ahol $n\in\mathbb{N}$. Akkor

A az f függvény folytonos a 0-ban;
B az f függvény folytonos a -1-ben;
C az f függvény baloldali határértéke a -1-ben egyenlő 0-val;
D az f függvény nem folytonos 1-ben.

(*Matek-Info UBB versenyfeladat, 2019.*)[2]

3. Tanulmányozzuk az $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$,

$$f(x)=\begin{cases}\cos\left(\dfrac{1}{x}\right), & \text{ha } x\ne 0\\ a, & \text{ha } x=0\end{cases}$$

függvény folytonosságát az $a\in\mathbb{R}$ paraméter függvényében.

4. Legyenek a és b valós számok és $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$,

$$f(x)=\begin{cases}(x^2+ax)\sin\left(\dfrac{1}{x}\right), & \text{ha } x\ne 0\\ b, & \text{ha } x=0\end{cases}$$

összefüggéssel értelmezett függvény. Tanulmányozzuk az f függvény folytonosságát és deriválhatóságát.

5. Milyen $a\in\mathbb{R}$ értékre lesz folytonos az $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$,

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2+2}{x^2+1}e^{-\frac{1}{x^2}}, & \text{ha } x\ne 0\\ a, & \text{ha } x=0\end{cases}$$

függvény?

6. Legyen $a>0$. Tekintjük az $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$,

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{2^x}, & x\le a\\ \sqrt{x}, & x>a\end{cases}$$

függvényt.

[1] Felvételi vizsga, 2019. július, "A" rész, 6. feladat
[2] Matek-Info UBB verseny, 2019. április, "A" rész, 6. feladat

(a) Határozd meg az a azon értékeit, amelyekre f folytonos $\mathbb{R}$-en!

(*Felvételi vizsgafeladat-részlet, 2018.*)[3]

7. Az $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvényt az

$$f(x) = \begin{cases} |x|^p \sin\left(\dfrac{1}{x}\right), & \text{ha } x \neq 0 \\ 0, & \text{ha } x = 0 \end{cases}$$

összefüggéssel értelmezzük, ha ahol p valós szám. Igazoljuk, hogy:

(a) $p > 0$ esetén f folytonos az $\mathbb{R}$-en;

(b) $p \leq 0$ esetén f nem folytonos az origóban.

(*Felvételi vizsgafeladat-részlet, 1995.*)[4]

1.2. Monotonitás és konvexitás. Szélsőértékpontok. Asszimptóták

8. Az $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvényt az $f(x) = (x^2 - 4x + 6)e^x$ képlettel értelmezzük. Ekkor

$\boxed{\text{A}}$ f csökkenő a $(-\infty, 0]$ intervallumon és növekvő a $(0, +\infty)$ intervallumon;
$\boxed{\text{B}}$ 0 inflexiós pontja f-nek;
$\boxed{\text{C}}$ f szigorúan növekvő az $\mathbb{R}$ halmazon;
$\boxed{\text{D}}$ f konvex az $\mathbb{R}$ halmazon.

(*Felvételi vizsgafeladat, 2019.*)[5]

9. Legyen az $f : (-\infty, -1] \cup [1, \infty) \to \mathbb{R}$ függvény az $f(x) = (2x-7)\sqrt{x^2 - 1}$ képlettel értelmezve. Akkor

$\boxed{\text{A}}$ f-nek egyetlen helyi szélsőértékpontja van;
$\boxed{\text{B}}$ f-nek három helyi szélsőértékpontja van;
$\boxed{\text{C}}$ f szigorúan növekvő a $(-\infty, -1]$ intervallumon;
$\boxed{\text{D}}$ f szigorúan növekvő a $(-\infty, -1] \cup [2, \infty)$ halmazon.

(*Matek-Info UBB versenyfeladat, 2019.*)[6]

10. Tekintjük az $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} -x^2, & x < 1 \\ x - 2, & x \geq 1 \end{cases}$$

függvényt.

(a) Határozd meg az f szélsőértékpontjait!

(*Versenyfeladat-részlet, 2018.*)[7]

11. Tekintsük az $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 \ln x$. Tanulmányozzuk az f függvény monotonitását és konvexitását.

(*Felvételi vizsgafeladat-részlet, 1992*)[8]

12. Tekintjük az $f : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \frac{2}{\ln 5} \ln(1 + x) + \sqrt{x}, \qquad \forall x \geq 0$$

függvényt.

[3] Felvételi vizsga, 2018. július, "B" rész, 3. feladat
[4] Felvételi vizsga, 1995. szeptember, [ASz] 42. oldal, II. tétel, 2. feladat.
[5] Felvételi vizsga, 2019. július, "A" rész, 7. feladat
[6] Matek-Info UBB verseny, 2019. április, "A" rész, 7. feladat
[7] BBTE Matek-Infó verseny, 2018. március, "B" rész, 3. feladat
[8] Felvételi vizsga, 1992. július, [ASz] 51. oldal, II. tétel, 3. feladat.

(a) Határozzuk meg az f' függvényt és igazoljuk, hogy $4 \leq f(x) \leq x$, $\forall x \geq 4$.

(*Felvételi vizsgafeladat-részlet, 2017.*)[9]

13. Bizonyítsuk be, hogy $x \geq \ln(1+x)$, bármely $x \geq 0$ esetén.

(*Felvételi vizsgafeladat-részlet, 1991*)[10]

14. Tekintsük az $f : D \to \mathbb{R}$, $f(x) = \arcsin \dfrac{2x}{x^2+1}$, ahol $D \subseteq \mathbb{R}$ az f függvény maximális értelmezési tartománya.

(a) Határozzuk meg a D halmazt.

(b) Tanulmányozzuk az f függvény deriválhatóságát; számítsuk ki az f' és f'' deriváltakat. Határozzuk meg a függvény szélsőértékpontjait és az inflexiós pontokat, ha léteznek.

(*Felvételi vizsgafeladat-részlet, 2001.*)[11]

15. Határozzuk meg az $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} x+1, & \text{ha } x < -1 \\ x^2-1, & \text{ha } |x| \leq 1 \\ |1-\ln x|, & \text{ha } x > 1 \end{cases}$$

függvény szélsőértékpontjait.

(*Felvételi vizsgafeladat, 1995*)[12]

16. Tekintsük az $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt[3]{x^3+3x^2-4}$ függvényt.

(a) Határozzuk meg azokat a pontokat, amelyekben f deriválható.

(b) Határozzuk meg az f szélsőértékpontjait.

(*Felvételi vizsgafeladat-részlet, 2002*)[13]

17. Határozzuk meg az $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény aszimptótáit, ahol a függvényt az alábbi képlettel értelmezzük

$$f(x) = \frac{x^2-3x}{\sqrt{x^2+1}}.$$

(*Matek-Info UBB versenyfeladat, 2019.*)[14]

18. Határozzuk meg a következő függvények aszimptotáit:

(a) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{2x^2+1} + \operatorname{arctg}(x)$;

(b) $f : \mathbb{R} \setminus (-1, 0] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{\sqrt{x^6+x^5+x^2+x}}{x^2}$;

(c) $f : \mathbb{R} \setminus [0, 1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \ln\left(\dfrac{x}{x-1}\right)$;

(d) $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{x^2}{x^2+1} e^{\frac{1}{x}}$.

[9] Felvételi vizsga, 2017. július, III. tétel, 1. feladat.

[10] Felvételi vizsga, 1991. július, [ASz] 53. oldal, II. tétel, 1.(a) feladat.

[11] Felvételi vizsga, 2001. július, [ASz] 31. oldal, II. tétel.

[12] Felvételi vizsga, 1995. szeptember, [ASz], 43. oldal, II. tétel, 3. feladat.

[13] Felvételi vizsga, 2002. július, [ASz], 29. oldal, II. tétel, 1. feladat.

[14] Matek-Info UBB verseny, 2019. április, “B” rész, 2. feladat

1.3. Függvényábrázolás

19. Ábrázoljuk grafikusan az $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{1}{2+\sin x}$ függvényt.

(*Felvételi vizsgafeladat, 1993.*)[15]

20. Ábrázoljuk grafikusan az $f:D\to\mathbb{R}$, $f(x)=2\arcsin\left(\dfrac{1}{x}\right)-\arccos\left(\dfrac{1}{x}\right)$ függvényt a D maximális értelmezési tartományon.

(*Felvételi vizsgafeladat, 1990.*)[16]

21. Ábrázoljuk grafikusan az $f:\mathbb{R}\setminus\{-2,\frac{1}{2}\}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\ln\left(\dfrac{2x-1}{x+2}\right)^2$ függvényt, felhasználva a másodrendű deriváltat is.

(*Felvételi vizsgafeladat, 1999.*)[17]

2. További vizsga- és versenyfeladat-részletek az utóbbi évekből

22. Tekintjük az $f:D\to\mathbb{R}$,

$$f(x)=\frac{\sqrt{x+1}}{x}$$

függvényt, ahol $D\subset\mathbb{R}$ az f függvény maximális értelmezési tartománya.

(a) Határozd meg a D halmazt!

(b) Számítsd ki az f' függvényt!

(c) Határozd meg az f függvény monotonitási intervallumait!

(d) Bizonyítsd be, hogy

$$\frac{\sqrt{2016}}{2015}>\frac{\sqrt{2017}}{2016}.$$

(*Versenyfeladat-részlet, 2017.*)[18]

23. Tekintjük az $f:D\to\mathbb{R}$,

$$f(x)=\frac{x}{x^2-3x+2},\quad \forall x\in D,$$

függvényt, ahol $D\subset\mathbb{R}$ az f maximális értelmezési tartománya.

(a) Határozd meg a D halmazt!

(b) Számítsd ki $f'(x)$-et, ha $x\in D$!

(c) Határozd meg az f függvény aszimptótáit!

(d) Állítsd össze az f függvény változási táblázatát és határozzuk meg az f függvény monotonitási intervallumait!

(*Felvételi vizsgafeladat-részlet, 2016.*)[19]

24. Tekintjük az $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$,

$$f(x)=x^ne^{-x},\qquad \forall x\in\mathbb{R}$$

függvényt, ahol $n\in\mathbb{N}$ egy rögzített szám és $n\geq 2$.

(a) Határozzuk meg az f függvény vízszintes aszimptótáját a $+\infty$ felé.

(b) Határozzuk meg az f' és az f'' függvényeket.

[15]Felvételi vizsgafeladat, 1993. szeptember, [ASz], 48. oldal, II. tétel, 3. feladat.
[16]Felvételi vizsgafeladat, 1990. július, [ASz], 56. oldal, II. tétel, 3. feladat.
[17]Felvételi vizsga, 1999. szeptember, [ASz] 33. oldal, II. tétel, 1. feladat.
[18]BBTE Matek-Infó verseny, 2017. április, III. tétel, 1. feladat.
[19]Felvételi vizsga, 2016 július, III. tétel, 1. feladat.

(c) Bizonyítsuk be, hogy $f(x) \leq f(n)$, $\forall x \geq 0$.

(d) Határozzuk meg az f függvény inflexiós pontjait.

(*Tartalék vizsgafeladat-részlet, 2016.*)[20]

25. Tekintjük az $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = |x| \cdot \sqrt[3]{1 - x^2}, \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

függvényt.

(a) Határozd meg az f maximális deriválhatósági tartományát és számítsd ki az f' függvényt!

(b) Bizonyítsd be, hogy

$$f(x) \leq \frac{2^{\frac{1}{3}} \cdot 3^{\frac{1}{2}}}{5^{\frac{5}{6}}}, \qquad \forall x \in \mathbb{R}.$$

(c) Számítsd ki az f'' függvényt és határozzuk meg az f inflexiós pontjait!

(*Versenyfeladat-részlet, 2016.*)[21]

26. Tekintjük az $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \ln(x^2 + 1), \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

függvényt.

(a) Határozzuk meg az f' és f'' függvényeket.

(b) Tanulmányozzuk az f függvény monotonitását és konvexitását.

(c) Bizonyítsuk be az $f(x) \leq \min\{x, x^2\}$, $\forall x \geq 0$ egyenlőtlenséget.

(*Versenyfeladat-részlet, 2016.*)[22]

Hivatkozások

[ASz] András Szilárd, Szenkovits Ferenc, *Matematikai feladatgyűjtemény.* Státus Kiadó, Csíkszereda, 2017.

[web] A BBTE *„Matematika és informatika mintatételek a BBTE Matek-Infó versenyre és a felvételi vizsgára”* weboldala, (link).

[20] Felvételi vizsga, 2016. július, tartalék tételsor, [ASz] 5. oldal, III. tétel.

[21] BBTE Matek-Infó verseny, 2016. április, III. tétel.

[22] BBTE Matek-Infó verseny, 2016. április, I. tartalék tételsor, [ASz] 8. oldal, III. tétel.