

# Tematica pentru proba scrisă Matematică

## NOTE:

- Tematica coincide cu programa de bacalaureat în vigoare mai puțin conținuturile referitoare la Matematici financiare, clasa a X-a;
- Tematica de concurs a fost actualizată conform Anexei nr. 2 la Ordinul Ministrului Educației nr. 3237/05.02.2021 privind aprobarea programelor pentru Evaluarea Națională pentru absolvenții clasei a VIII-a și pentru probele scrise ale examenului național de bacalaureat, în anul școlar 2020-2021.

## CLASA a IX-a

### Mulțimi și elemente de logică matematică

- Mulțimea numerelor reale: operații algebrice cu numere reale, ordonarea numerelor reale, modulul unui număr real, aproximări prin lipsă sau prin adaos, partea întreagă, partea fracționară a unui număr real; operații cu intervale de numere reale
- Propoziție, predicat, cuantificatori
- Operații logice elementare (negație, conjuncție, disjuncție, implicație, echivalență), corelate cu operațiile și cu relațiile dintre mulțimi (complementară, intersecție, reuniune, incluziune, egalitate); raționament prin reducere la absurd
- Inducția matematică

### Șiruri

- Modalități de a defini un șir, șiruri mărginite, șiruri monotone
- Șiruri particulare: progresii aritmetice, progresii geometrice, formula termenului general în funcție de un termen dat și rație, suma primilor  $n$  termeni ai unei progresii
- Condiția ca  $n$  numere să fie în progresie aritmetică sau geometrică, pentru  $n \geq 3$

### Funcții; lecturi grafice

- Reper cartezian, produs cartezian; reprezentarea prin puncte a unui produs cartezian de mulțimi numerice; condiții algebrice pentru puncte aflate în cadrane; drepte din plan de forma  $x = m$  sau  $y = m$ , cu  $m \in \mathbf{R}$
- Funcția: definiție, exemple, exemple de corespondențe care nu sunt funcții, modalități de a descrie o funcție, lecturi grafice. Egalitatea a două funcții, imaginea unei mulțimi printr-o funcție, graficul unei funcții, restricții ale unei funcții
- Funcții numerice ( $F = \{f : D \rightarrow \mathbf{R}, D \subseteq \mathbf{R}\}$ ); reprezentarea geometrică a graficului: intersecția cu axele de coordonate, rezolvări grafice ale unor ecuații și inecuații de forma  $f(x) = g(x)$ , ( $\leq, <, >, \geq$ ); proprietăți ale funcțiilor numerice introduse prin lectură grafică: mărginire, monotonie; alte proprietăți: paritate/imparitate, simetria graficului față de drepte de forma  $x = m$ ,  $m \in \mathbf{R}$ , periodicitate
- Compunerea funcțiilor; exemple pe funcții numerice

## Funcția de gradul I

- Definiție; reprezentarea grafică a funcției  $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ ,  $f(x) = ax + b$ , unde  $a, b \in \mathbf{R}$ , intersecția graficului cu axele de coordonate, ecuația  $f(x) = 0$
- Interpretarea grafică a proprietăților algebrice ale funcției: monotonia și semnul funcției; studiul monotoniei prin semnul diferenței  $f(x_1) - f(x_2)$  (sau prin studierea semnului raportului  $\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2}$ ,  $x_1, x_2 \in \mathbf{R}$ ,  $x_1 \neq x_2$ )
- Inecuații de forma  $ax + b \leq 0$  ( $<, >, \geq$ ) studiate pe  $\mathbf{R}$  sau pe intervale de numere reale
- Poziția relativă a două drepte, sisteme de ecuații de tipul  $\begin{cases} ax + by = c \\ mx + ny = p \end{cases}$ ,  $a, b, c, m, n, p$  numere reale
- Sisteme de inecuații de gradul I

## Funcția de gradul al II-lea

- Reprezentarea grafică a funcției  $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ ,  $f(x) = ax^2 + bx + c$ , cu  $a, b, c \in \mathbf{R}$  și  $a \neq 0$  intersecția graficului cu axele de coordonate, ecuația  $f(x) = 0$ , simetria față de drepte de forma  $x = m$ , cu  $m \in \mathbf{R}$
- Relațiile lui Viète, rezolvarea sistemelor de forma  $\begin{cases} x + y = s \\ xy = p \end{cases}$ , cu  $s, p \in \mathbf{R}$

## Interpretarea geometrică a proprietăților algebrice ale funcției de gradul al II-lea

- Monotonie; studiul monotoniei prin semnul diferenței  $f(x_1) - f(x_2)$  sau prin rata creșterii/descrășterii:  $\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2}$ ,  $x_1, x_2 \in \mathbf{R}$ ,  $x_1 \neq x_2$ , punct de extrem, vârful parabolei
- Poziționarea parabolei față de axa  $Ox$ , semnul funcției, inecuații de forma  $ax^2 + bx + c \leq 0$  ( $\geq, <, >$ ),  $a, b, c \in \mathbf{R}$ ,  $a \neq 0$ , studiate pe  $\mathbf{R}$  sau pe intervale de numere reale, interpretare geometrică: imagini ale unor intervale (proiecțiile unor porțiuni de parabolă pe axa  $Oy$ )
- Poziția relativă a unei drepte față de o parabolă: rezolvarea sistemelor de forma  $\begin{cases} mx + n = y \\ ax^2 + bx + c = y \end{cases}$ ,  $a, b, c, m, n \in \mathbf{R}$

## Vectori în plan

- Segment orientat, vectori, vectori coliniari
- Operații cu vectori: adunarea (regula triunghiului, regula paralelogramului), proprietăți ale operației de adunare; înmulțirea cu un scalar, proprietăți ale înmulțirii cu un scalar; condiția de coliniaritate, descompunerea după doi vectori necoliniari

## Coliniaritate, concurență, paralelism – calcul vectorial în geometria plană

- Vectorul de poziție al unui punct

- Vectorul de poziție a punctului care împarte un segment într-un raport dat, teorema lui Thales (condiții de paralelism)
- Vectorul de poziție a centrului de greutate al unui triunghi (concurența medianelor unui triunghi)
- Teorema lui Menelau, teorema lui Ceva

### Elemente de trigonometrie

- Cercul trigonometric, definierea funcțiilor trigonometrice:  $\sin : [0, 2\pi] \rightarrow [-1, 1]$ ,  $\cos : [0, 2\pi] \rightarrow [-1, 1]$ ,  $\operatorname{tg} : [0, \pi] \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} \right\} \rightarrow \mathbf{R}$ ,  $\operatorname{ctg} : (0, \pi) \rightarrow \mathbf{R}$
- Definierea funcțiilor trigonometrice:  $\sin : \mathbf{R} \rightarrow [-1, 1]$ ,  $\cos : \mathbf{R} \rightarrow [-1, 1]$ ,  $\operatorname{tg} : \mathbf{R} \setminus D \rightarrow \mathbf{R}$ , cu  $D = \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbf{Z} \right\}$ ,  $\operatorname{ctg} : \mathbf{R} \setminus D \rightarrow \mathbf{R}$ , cu  $D = \{k\pi \mid k \in \mathbf{Z}\}$
- Reducerea la primul cadran; formule trigonometrice:  $\sin(a+b)$ ,  $\sin(a-b)$ ,  $\cos(a+b)$ ,  $\cos(a-b)$ ,  $\sin 2a$ ,  $\cos 2a$ ,  $\sin a + \sin b$ ,  $\sin a - \sin b$ ,  $\cos a + \cos b$ ,  $\cos a - \cos b$  (transformarea sumei în produs)

### Aplicații ale trigonometriei și ale produsului scalar a doi vectori în geometria plană

- Produsul scalar a doi vectori: definiție, proprietăți. Aplicații: teorema cosinusului, condiții de perpendicularitate, rezolvarea triunghiului dreptunghic
- Aplicații vectoriale și trigonometrice în geometrie: teorema sinusurilor, rezolvarea triunghiurilor oarecare
- Calcularea razei cercului înscris și a razei cercului circumscris în triunghi, calcularea lungimilor unor segmente importante din triunghi, calcularea unor arii

## CLASA a X-a

### Mulțimi de numere

- Numere reale: proprietăți ale puterilor cu exponent rațional, irațional și reale ale unui număr pozitiv nenul, aproximări raționale pentru numere reale
- Radical de ordin  $n$  ( $n \in \mathbf{N}$  și  $n \geq 2$ ) dintr-un număr, proprietăți ale radicalilor
- Noțiunea de logaritm, proprietăți ale logaritmilor, calcule cu logaritmi, operația de logaritmare
- Mulțimea  $\mathbf{C}$ . Numere complexe sub formă algebrică, conjugatul unui număr complex, operații cu numere complexe. Interpretarea geometrică a operațiilor de adunare și de scădere a numerelor complexe și a înmulțirii acestora cu un număr real
- Rezolvarea în  $\mathbf{C}$  a ecuației de gradul al doilea având coeficienți reali. Ecuații bipătrate

### Funcții și ecuații

- Funcția putere cu exponent natural:  $f : \mathbf{R} \rightarrow D$ ,  $f(x) = x^n$ ,  $n \in \mathbf{N}$ ,  $n \geq 2$  și funcția radical:  $f : D \rightarrow \mathbf{R}$ ,  $f(x) = \sqrt[n]{x}$ ,  $n \in \mathbf{N}$  și  $n \geq 2$ , unde  $D = [0, +\infty)$  pentru  $n$  par și  $D = \mathbf{R}$  pentru  $n$  impar
- Funcția exponențială:  $f : \mathbf{R} \rightarrow (0, +\infty)$ ,  $f(x) = a^x$ ,  $a \in (0, +\infty)$ ,  $a \neq 1$  și funcția logaritmică:  $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbf{R}$ ,  $f(x) = \log_a x$ ,  $a \in (0, +\infty)$ ,  $a \neq 1$

- Injectivitate, surjectivitate, bijectivitate; funcții inversabile: definiție, proprietăți grafice, condiția necesară și suficientă ca o funcție să fie inversabilă
- Funcții trigonometrice directe și inverse
- Rezolvări de ecuații folosind proprietățile funcțiilor:
  1. Ecuații care conțin radicali de ordinul 2 sau de ordinul 3
  2. Ecuații exponențiale, ecuații logaritmice
  3. Ecuații trigonometrice:  $\sin x = a$ ,  $\cos x = a$ ,  $a \in [-1,1]$ ,  $\operatorname{tg} x = a$ ,  $\operatorname{ctg} x = a$ ,  $a \in \mathbf{R}$ ,  
 $\sin f(x) = \sin g(x)$ ,  $\cos f(x) = \cos g(x)$ ,  $\operatorname{tg} f(x) = \operatorname{tg} g(x)$ ,  $\operatorname{ctg} f(x) = \operatorname{ctg} g(x)$

**Notă:** Pentru toate tipurile de funcții se vor studia: intersecția cu axele de coordonate, ecuația  $f(x) = 0$ , reprezentarea grafică prin puncte, simetrie, lectura grafică a proprietăților algebrice ale funcțiilor: monotonie, bijectivitate, inversabilitate, semn, convexitate.

### Metode de numărare

- Mulțimi finite ordonate. Numărul funcțiilor  $f : A \rightarrow B$ , unde  $A$  și  $B$  sunt mulțimi finite
- Permutări
  - numărul de mulțimi ordonate care se obțin prin ordonarea unei mulțimi finite cu  $n$  elemente
  - numărul funcțiilor bijective  $f : A \rightarrow B$ , unde  $A$  și  $B$  sunt mulțimi finite
- Aranjamente
  - numărul submulțimilor ordonate cu câte  $k$  elemente fiecare,  $k \leq n$ , care se pot forma cu cele  $n$  elemente ale unei mulțimi finite
  - numărul funcțiilor injective  $f : A \rightarrow B$ , unde  $A$  și  $B$  sunt mulțimi finite
- Combinări – numărul submulțimilor cu câte  $k$  elemente, unde  $0 \leq k \leq n$ , ale unei mulțimi finite cu  $n$  elemente. Proprietăți: formula combinărilor complementare, numărul tuturor submulțimilor unei mulțimi cu  $n$  elemente
- Binomul lui Newton

### Geometrie

- Reper cartezian în plan, coordonatele unui vector în plan, coordonatele sumei vectoriale, coordonatele produsului dintre un vector și un număr real, coordonate carteziene ale unui punct din plan, distanța dintre două puncte în plan
- Ecuații ale dreptei în plan determinate de un punct și de o direcție dată și ale dreptei determinate de două puncte distincte
- Condiții de paralelism, condiții de perpendicularitate a două drepte din plan; calcularea unor distanțe și a unor arii

### CLASA a XI-a

### ELEMENTE DE CALCUL MATRICEAL ȘI SISTEME DE ECUAȚII LINIARE

#### Matrice

- Tabel de tip matriceal. Matrice, mulțimi de matrice

- Operații cu matrice: adunarea, înmulțirea, înmulțirea unei matrice cu un scalar, proprietăți

### Determinanți

- Determinant de ordin  $n$ , proprietăți

### Sisteme de ecuații liniare

- Matrice inversabile din  $M_n(\mathbf{C})$ ,  $n \leq 4$
- Ecuații matriceale
- Sisteme liniare cu cel mult 4 necunoscute, sisteme de tip Cramer, rangul unei matrice
- Studiul compatibilității și rezolvarea sistemelor: proprietatea Kroneker-Capelli, proprietatea Rouché, metoda Gauss
- Aplicații: ecuația unei drepte determinate de două puncte distincte, aria unui triunghi și coliniaritatea a trei puncte în plan

## ELEMENTE DE ANALIZĂ MATEMATICĂ

### Limite de funcții

- Noțiuni elementare despre mulțimi de puncte pe dreapta reală: intervale, mărginire, vecinătăți, dreapta încheiată, simbolurile  $+\infty$  și  $-\infty$
- Funcții reale de variabilă reală: funcția polinomială, funcția rațională, funcția putere, funcția radical, funcția logaritm, funcția exponențială, funcții trigonometrice directe și inverse
- Limita unui șir utilizând vecinătăți, șiruri convergente
- Monotonie, mărginire, limite; proprietatea lui Weierstrass. Exemple semnificative:  $(a^n)_n$ ,  $(n^a)_n$ ,  $\left(\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right)_n$  (fără demonstrație), numărul  $e$ ; limita șirului  $\left(1 + u_n\right)^{\frac{1}{u_n}}$ ,  $u_n \rightarrow 0$ ,  $u_n \neq 0$ , pentru orice număr natural  $n$
- Operații cu șiruri care au limită
- Limite de funcții: interpretarea grafică a limitei unei funcții într-un punct utilizând vecinătăți, limite laterale
- Calculul limitelor pentru funcțiile studiate; cazuri exceptate la calculul limitelor de funcții:  $\frac{0}{0}$ ,  $\frac{\infty}{\infty}$ ,  $\infty - \infty$ ,  $0 \cdot \infty$ ,  $1^\infty$ ,  $\infty^0$ ,  $0^0$
- Asimptotele graficului funcțiilor studiate: asimptote verticale, oblice

### Continuitate

- Continuitatea unei funcții într-un punct al domeniului de definiție, funcții continue, interpretarea grafică a continuității unei funcții, studiul continuității în puncte de pe dreapta reală pentru funcțiile studiate, operații cu funcții continue
- Proprietatea lui Darboux, semnul unei funcții continue pe un interval de numere reale, studiul existenței soluțiilor unor ecuații în  $\mathbf{R}$

### Derivabilitate

- Tangenta la o curbă, derivata unei funcții într-un punct, funcții derivabile, operații cu funcții derivabile, calculul derivatelor de ordin I și al II-lea pentru funcțiile studiate

- Funcții derivabile pe un interval: puncte de extrem ale unei funcții, teorema lui Fermat, teorema lui Rolle, teorema lui Lagrange și interpretarea lor geometrică, corolarul teoremei lui Lagrange referitor la derivata unei funcții într-un punct
- Rolul derivatei I în studiul funcțiilor: monotonia funcțiilor, puncte de extrem
- Rolul derivatei a II-a în studiul funcțiilor: concavitate, convexitate, puncte de inflexiune

### Reprezentarea grafică a funcțiilor

- Reprezentarea grafică a funcțiilor
- Rezolvarea grafică a ecuațiilor, utilizarea reprezentării grafice a funcțiilor în determinarea numărului de soluții ale unei ecuații
- Reprezentarea grafică a conicelor (cerc, elipsă, hiperbolă, parabolă)
- Regulile lui l'Hospital

## CLASA a XII-a

### ELEMENTE DE ALGEBRĂ

#### Grupuri

- Lege de compoziție internă (operație algebrică), tabla operației, parte stabilă
- Grup, exemple: grupuri numerice, grupuri de matrice, grupuri de permutări, grupul aditiv al claselor de resturi modulo  $n$
- Subgrup
- Grup finit, tabla operației, ordinul unui element
- Morfism, izomorfism de grupuri

#### Inele și corpuri

- Inel, exemple: inele numerice ( $\mathbf{Z}$ ,  $\mathbf{Q}$ ,  $\mathbf{R}$ ,  $\mathbf{C}$ ),  $\mathbf{Z}_n$ , inele de matrice, inele de funcții reale
- Corp, exemple: corpuri numerice ( $\mathbf{Q}$ ,  $\mathbf{R}$ ,  $\mathbf{C}$ ),  $\mathbf{Z}_p$ ,  $p$  prim
- Morfisme de inele și de corpuri

### ELEMENTE DE ANALIZĂ MATEMATICĂ

- Probleme care conduc la noțiunea de integrală

#### Primitive (antiderivate)

- Primitivele unei funcții definite pe un interval. Integrala nedefinită a unei funcții, proprietăți ale integralei nedefinite, liniaritate. Primitive uzuale

#### Integrala definită

- Diviziuni ale unui interval  $[a, b]$ , norma unei diviziuni, sistem de puncte intermediare, sume Riemann, interpretare geometrică. Definiția integrabilității unei funcții pe un interval  $[a, b]$
- Proprietăți ale integralei definite: liniaritate, monotonie, aditivitate în raport cu intervalul de integrare
- Formula Leibniz-Newton

- Integrabilitatea funcțiilor continue, teorema de medie, interpretare geometrică, teorema de existență a primitivelor unei funcții continue
- Metode de calcul al integralelor definite: integrarea prin părți, integrarea prin schimbare de variabilă. Calculul integralelor de forma  $\int_a^b \frac{P(x)}{Q(x)} dx$ ,  $\text{grad } Q \leq 4$  prin metoda descompunerii în fracții simple

**Notă:** Se utilizează exprimarea „proprietate” sau „regulă”, pentru a sublinia faptul că se face referire la un rezultat matematic utilizat în aplicații, dar a cărui demonstrație este în afara programei.

## **Bibliografie**

Manualele școlare și auxiliarele aprobate de Ministerul Educației Naționale.