

Marți, 10 iulie, 2018

Problema 4. Numim *poziție* orice punct (x, y) din plan astfel încât x și y sunt numere naturale, ambele nenule și mai mici sau egale decât 20.

La început, fiecare din cele 400 de poziții este neocupată. Ana și Radu pun pe rând jetoane, cu Ana mutând prima. Când îi vine rândul, Ana pune un nou jeton roșu pe o poziție neocupată, astfel încât distanța dintre orice două poziții ocupate de jetoane roșii nu este egală cu $\sqrt{5}$. Când îi vine rândul, Radu pune un nou jeton albastru pe orice poziție neocupată (O poziție ocupată de un jeton albastru poate fi la orice distanță față de orice altă poziție ocupată). Ei se opresc atunci când un jucător nu mai poate pune un jeton.

Găsiți cel mai mare număr K astfel încât Ana poate pune sigur cel puțin K jetoane roșii, indiferent de cum pune Radu jetoanele lui albastre.

Problema 5. Fie a_1, a_2, \dots un șir infinit de numere naturale nenule. Presupunem că există un număr natural $N > 1$ astfel încât, pentru orice $n \geq N$, numărul

$$\frac{a_1}{a_2} + \frac{a_2}{a_3} + \dots + \frac{a_{n-1}}{a_n} + \frac{a_n}{a_1}$$

este natural. Demonstrați că există un număr natural nenul M astfel încât $a_m = a_{m+1}$ pentru orice $m \geq M$.

Problema 6. Fie $ABCD$ un patrulater convex cu proprietatea că $AB \cdot CD = BC \cdot DA$. Punctul X se află în interiorul patrulaterului $ABCD$ astfel încât

$$\angle XAB = \angle XCD \quad \text{și} \quad \angle XBC = \angle XDA.$$

Demonstrați că $\angle BXA + \angle DXC = 180^\circ$.