

Secția matematică

Algebră

1 Să se definească noțiunile de transformare liniară, nucleu și imagine ale unei transformări liniare. Să se arate că dacă $f : V \rightarrow V'$ este o transformare liniară între două spații vectoriale V și V' peste un corp K , atunci nucleul său $\text{Ker}(f)$ este un subspațiu al lui V , imaginea sa $\text{Im}(f)$ este un subspațiu al lui V' , iar f este injectivă dacă și numai dacă $\text{Ker}(f) = \{0\}$.

2 Pentru orice $n \in \mathbb{N}$, notăm $n\mathbb{Z} = \{n \cdot a \mid a \in \mathbb{Z}\}$. Fie $m, n \in \mathbb{N}$. Să se arate că $n\mathbb{Z}$ este un subgrup al grupului $(\mathbb{Z}, +)$, $n\mathbb{Z} \subseteq m\mathbb{Z}$ dacă și numai dacă m divide pe n , și pentru orice subgrup H al lui $(\mathbb{Z}, +)$ există un unic $k \in \mathbb{N}$ astfel ca $H = k\mathbb{Z}$.

Analiză matematică

1. Teorema lui Leibniz-Newton relativă la calculul integralei Riemann (enunț și demonstrație)

2. Se dă funcția $f :]-1, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ definită prin

$$f(x) = x \ln(x+1), \text{ oricare ar fi } x > -1.$$

a) Determinați intervalele de monotonie ale funcției f și punctele ei de optim (dacă există).

b) Determinați intervalele de convexitate ale funcției f și punctele ei de inflexiune (dacă există).

c) Calculați (dacă există)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{1 - \cos x}.$$

d) Calculați $\int_0^1 f(x) dx$.

Geometrie

1. Distanța de la un punct la un plan, distanța dintre două drepte necoplanare.

2. Fie cubul $[ABCD A' B' C' D']$ de muchie "a" raportat la reperul ortonormat având ca axe Ox, Oy, Oz , dreptele AB, AD, AA' . Se consideră punctele M, N și P , aparținând

segmentelor $(AB), (BC)$ și (CC') astfel încât $(MA) = (MB), NB/NC = 1/2, PC/PC' = 1/3$.

a) Să se determine distanța de la punctul C' la planul (MNP) .

b) Dreptele DD' și AA' intersectează planul (MNP) în punctele Q și

R . Să se determine unghiul dintre dreptele QR și $B'C'$.

c) Să se determine distanța dintre dreptele AC' și BB' .