

MODEL

MATE-INFO UBB COMPETITION and ADMISSIONS EXAM, 2018 Written test in MATHEMATICS

PART A

IMPORTANT: For each problem in Part A at least one answer is correct, and several answers may be correct.

1. (5 points) Consider the points $A(2m^2, m + 3)$, $B(-1, 1)$ and $C(3, 5)$ in the xOy plane. The value $m \in \mathbb{R}$ for which the points A , B and C are collinear is:

- A -1 ; B 1 ; C $-\frac{1}{2}$; D $\frac{1}{2}$; E 0 .

2. (5 points) A solution in the interval $[0, 2\pi]$ of equation $\sqrt{3}\sin x + \cos x = 0$ is:

- A $\frac{5\pi}{4}$; B $\frac{5\pi}{6}$; C $\frac{\pi}{3}$; D $\frac{11\pi}{6}$; E $\frac{\pi}{4}$.

3. (5 points) Let X be a set with 3 elements and Y a set with 2 elements. The number of functions $f : X \rightarrow Y$ is:

- A C_3^2 ; B A_3^2 C 0 ; D 8 ; E 9 .

4. (5 points) Let $x_1, x_2 \in \mathbb{C}$ be the solutions of equation $x^2 - 2x + 3 = 0$. The value of $x_1^2 + x_2^2$ is:

- A 3 ; B $\frac{2}{3}$; C $\frac{3}{2}$; D 1 ; E -2 .

5. (5 points) Let $a \in \mathbb{R}^*$ and the function $f : \mathbb{R} \setminus \{1\} \rightarrow \mathbb{R}$, given by $f(x) = \frac{\sqrt{x^2 + a^2}}{x - 1}$. Decide which of the following are true:

- A the graph of f has 2 asymptotes; B the graph of f has 3 asymptotes;
 C on $(1, \infty)$, f is decreasing; D on $(1, \infty)$, f is increasing;
 E on $(0, \infty) \setminus \{1\}$, f is monotone.

6. (5 points) Let $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, defined by $f(x) = x^2 e^x$. The second order derivative of the function f is:

- A $f''(x) = (x^2 + 2x + 2)e^x$; B $f''(x) = (x^2 + 4x + 2)e^x$; C $f''(x) = 2e^x$;
 D $f''(x) = (2x^2 + x + 2)e^x$; E $f''(x) = 2(x^2 + x + 1)e^x$.

PART B

1. (10 points) Consider the triangle $\triangle ABC$ and the points $N \in (AB)$, $P \in (BC)$ and $Q \in (AC)$ such that $AN = 2BN$, $BP = 2CP$ and $CQ = 2AQ$. Express the vectors \overrightarrow{NP} , \overrightarrow{PQ} and \overrightarrow{QN} in terms of the vectors \overrightarrow{AB} and \overrightarrow{AC} .

2. a) (10 points) Consider the matrix $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Compute $A + A^2 + \dots + A^{2018}$.

b) (15 points) On \mathbb{R} let „ $*$ ” be the operation defined by $x * y = xy + ax + ay + b$. Find $a, b \in \mathbb{Z}$, $|a| \leq 2$ and $|b| \leq 2$, such that $(\mathbb{R}, *)$ is a monoid.

3. Let $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ be given by $f(x) = \min\{x, x^2, x^3\}$.

a) (15 points) Draw the graph of the function f .

b) (10 points) Compute $\int_{1/2}^2 f(x)dx$.

NOTE:

All subjects are mandatory. Grading starts at 10 points.
Working time is 3 hours.

Răspunsuri și soluții

PARTEA A

1. \boxed{B} , \boxed{C} ; 2. \boxed{B} , \boxed{D} ; 3. \boxed{D} ; 4. \boxed{E} ; 5. \boxed{B} , \boxed{C} ; 6. \boxed{B} .

PARTEA B

1. Avem $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}$. Rezultă că:

$$\begin{aligned}\overrightarrow{NP} &= \overrightarrow{NB} + \overrightarrow{BP} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{BC} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}) = -\frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AC}, \\ \overrightarrow{PQ} &= \overrightarrow{PC} + \overrightarrow{CQ} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BC} - \frac{2}{3}\overrightarrow{AC} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}) - \frac{2}{3}\overrightarrow{AC} = -\frac{1}{3}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}, \\ \overrightarrow{QN} &= \overrightarrow{AN} + \overrightarrow{QA} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}.\end{aligned}$$

Având exprimați 2 dintre cei 3 vectori în funcție de \overrightarrow{AB} și \overrightarrow{AC} , al treilea se poate determina și din egalitatea $\overrightarrow{NP} + \overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QN} = \vec{0}$.

2. a) Avem $A^2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = -I_2$, $A^3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = -A$, $A^4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2$, deci $A + A^2 + A^3 + A^4 = O_2$. Inductiv, $A^{4k+1} + A^{4k+2} + A^{4k+3} + A^{4k+4} = O_2$ pentru orice $k \in \mathbb{N}$. Rezultă că $A + A^2 + \dots + A^{2018} = (A + A^2 + \dots + A^{2016}) + A^{2017} + A^{2018} = A^{2017} + A^{2018} = A + A^2 = A - I_2 = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$.

b) $(\mathbb{R}, *)$ este monoid dacă și numai dacă legea de compoziție „ $*$ ” este asociativă și există element neutru relativ la „ $*$ ”. Pentru ca „ $*$ ” să fie asociativă trebuie să avem $(x*y)*z = x*(y*z)$ pentru orice $x, y, z \in \mathbb{R}$. Folosind definiția legii de compoziție „ $*$ ”, condiția are loc dacă și numai dacă $(a+b)z + a^2x = (a+b)x + a^2z$ pentru orice $x, z \in \mathbb{R}$ dacă și numai dacă $(z-x)(a^2 - a - b) = 0$ pentru orice $x, z \in \mathbb{R}$. Astfel avem $a^2 - a - b = 0$. Deoarece căutăm $a, b \in \mathbb{Z}$ cu $|a| \leq 2$ și $|b| \leq 2$, rezultă că $(a, b) \in \{(-1, 2), (0, 0), (1, 0), (2, 2)\}$.

Presupunem că există element neutru $e \in \mathbb{R}$ relativ la „ $*$ ”, deci $e*x = x$ pentru orice $x \in \mathbb{R}$ (legea este evident comutativă). Condiția are loc dacă și numai dacă $(e+a-1)x + ae + b = 0$ pentru orice $x \in \mathbb{R}$. Astfel avem $e+a-1 = 0$ și $ae + b = 0$, de unde $e = 1-a$ și $a^2 - a - b = 0$. Rezultă că valorile $a, b \in \mathbb{Z}$ cu $|a| \leq 2$ și $|b| \leq 2$ pentru care există element neutru sunt aceleași cu cele pentru care legea este asociativă.

În concluzie, avem $(a, b) \in \{(-1, 2), (0, 0), (1, 0), (2, 2)\}$.

3. a) Numerele $-1, 0, 1$ sunt rădăcini pentru cel puțin una dintre ecuațiile $x = x^2$, $x = x^3$, $x^2 = x^3$. Comparând cantitățile x, x^2, x^3 succesiv pe intervalele $(-\infty, -1]$, $(-1, 0]$, $(0, 1]$, $(1, \infty)$, obținem:

$$f(x) = \begin{cases} x^3, & \text{dacă } x \in (-\infty, -1] \cup [0, 1], \\ x, & \text{dacă } x \in (-1, 0) \cup (1, \infty). \end{cases}$$

Trasarea graficului lui f se bazează pe trasarea graficelor funcțiilor $x \mapsto x$ și $x \mapsto x^3$.

b) Avem:

$$\int_{1/2}^2 f(x) dx = \int_{1/2}^1 x^3 dx + \int_1^2 x dx = \frac{111}{64}.$$