

MODEL

Concurs MATE-INFO UBB și ADMITERE, 2018 Proba scrisă la MATEMATICĂ

PARTEA A

IMPORTANT: La fiecare problemă din Partea A cel puțin un răspuns este corect, și pot fi corecte mai multe răspunsuri.

1. (5 puncte) Dacă $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ și $\cos x = \frac{2}{3}$, atunci valoarea expresiei $\frac{\sin x + \operatorname{tg} x}{\cos x + \operatorname{ctg} x}$ este:

A $\frac{3}{4}(3 - \sqrt{5})$, B $\frac{4}{5}(3 + \sqrt{5})$, C $\frac{25}{16}(3 + \sqrt{5})$, D $\frac{16}{25}(3 - \sqrt{5})$, E $\frac{25}{16}(3 - \sqrt{5})$.

2. (5 puncte) Ecuația dreptei care trece prin punctul de intersecție al dreptelor $(d_1) : x + 2y - 7 = 0$ și $(d_2) : 2x - y + 1 = 0$ și este paralelă cu dreapta $(d) : 2x + 3y + 1 = 0$ este:

A $3x + y - 6 = 0$, B $\frac{y - 3}{-3} = x - 1$, C $2x + 3y - 11 = 0$, D $3x + 2y - 9 = 0$, E $\frac{y - 3}{-2} = \frac{x - 1}{3}$.

3. (5 puncte) Un monoid (G, \cdot) este grup dacă și numai dacă:

A G are toate elementele inversabile cu excepția elementului neutru; B elementul neutru din G este inversabil; C există elemente inversabile în G ; D toate elementele sale sunt inversabile. E nu există elemente inversabile în G .

4. (5 puncte) Pentru orice polinom P cu coeficienți reali numărul rădăcinilor reale este:

A egal cu gradul polinomului; B cel mult egal cu gradul polinomului, cu excepția cazului când polinomul este nul; C cel puțin egal cu gradul polinomului; D cel mult egal cu gradul polinomului; E egal cu numărul polinoamelor din $\mathbb{R}[X]$ care divid pe P .

5. (5 puncte) Funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definită prin $f(x) = \begin{cases} 2 \sin x + \cos x, & x \geq 0 \\ ax^2 + bx + c, & x < 0 \end{cases}$ este derivabilă de două ori ($a, b, c \in \mathbb{R}$ sunt parametri reali). Valoarea produsului $a \cdot b \cdot c$ este în mulțimea

A $(-\infty, 0)$; B $[-2, 2]$; C $[-\frac{\pi \cdot e}{8}, \pi + e)$; D $[-1, \infty)$; E $\{-1, 1, -i, i\}$.

6. (5 puncte) Șirul definit prin $x_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}$, $\forall n \geq 1$ este:

A cu termeni negativi; B crescător; C mărginit; D periodic; E divergent.

PARTEA B

1. (10 puncte) Fie în planul xOy punctele $A(1, 2)$, $B\left(-\frac{5}{3}, 0\right)$ și $C(0, 2)$. Bisectoarea unghiului \widehat{BAC} intersectează latura $[BC]$ în punctul D . Să se calculeze lungimea segmentului $[AD]$.

2. a) (10 puncte) Să se determine numerele întregi a și b astfel încât numărul complex

$$z = (-2a^2 + a + 6) + (a - b^2)i$$

să verifice condiția $z = |z|$.

b) (15 puncte) Să se calculeze numărul polinoamelor de grad cel mult 4 din $\mathbb{Z}_5[X]$ care au coeficienți distincți. Câte dintre acestea au pe $\widehat{0}$ ca rădăcină? Justificați răspunsurile date.

3. Considerăm funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definită prin relația

$$f(x) = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

a) (10 puncte) Să se calculeze

$$\lim_{x \rightarrow \infty} [f(x)]^{x^2}.$$

b) (10 puncte) Să se arate că

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{4x}{x^4 - 1}, \quad \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}.$$

c) (5 puncte) Să se calculeze

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x^2 \int_2^x \frac{4t}{t^4 - 1} dt.$$

NOTĂ:

Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.
Timpul efectiv de lucru este de 3 ore.

Răspunsuri și soluții

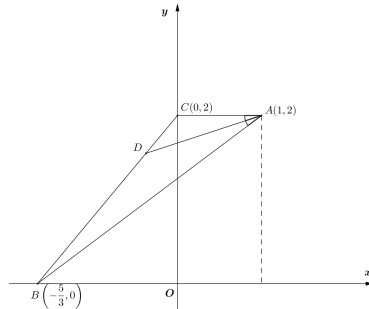
PARTEA I

1. **E**; 2. **C**, **E**; 3. **D**; 4. **B**; 5. **A**, **B**, **C**, **D**; **E**; 6. **B**, **E**.

PARTEA II

1. Folosind formula distanței dintre două puncte avem:

$$AC = \sqrt{(1-0)^2 + (2-2)^2} = 1$$



$$AB = \sqrt{\left(1 + \frac{5}{3}\right)^2 + (2-0)^2} = \sqrt{\frac{64}{9} + 4} = \frac{10}{3}$$

$$\frac{DC}{DB} = \frac{AC}{AB} = \frac{3}{10} \text{ (teorema bisectoarei)}$$

$$x_D = \frac{x_C + \frac{3}{10}x_B}{1 + \frac{3}{10}} = \frac{0 + \frac{3}{10}\left(-\frac{5}{3}\right)}{\frac{13}{10}} = \frac{-5}{13} = -\frac{5}{13}$$

$$y_D = \frac{y_C + \frac{3}{10}y_B}{1 + \frac{3}{10}} = \frac{2 + \frac{3}{10} \cdot 0}{\frac{13}{10}} = \frac{20}{13}$$

$$AD = \sqrt{\left(1 + \frac{5}{13}\right)^2 + \left(2 - \frac{20}{13}\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{18}{13}\right)^2 + \left(\frac{6}{13}\right)^2} = \frac{6}{13}\sqrt{9+1} = \frac{6\sqrt{10}}{13}$$

2. a) $z = |z| \Leftrightarrow z \in \mathbb{R}$ și $z \geq 0$.

$$z \in \mathbb{R} \Leftrightarrow a - b^2 = 0 \Leftrightarrow a = b^2.$$

În acest caz $z = -2a^2 + a + 6$ și $a \geq 0$.

$$z \geq 0 \Leftrightarrow -2a^2 + a + 6 \geq 0 \Leftrightarrow (2a+3)(a-2) \leq 0, \text{ deci } a \in \mathbb{Z} \cap \left[-\frac{3}{2}, 2\right] \cap [0, \infty) = \{0, 1, 2\}.$$

$a = 0 \Leftrightarrow b^2 = 0$, $a = 1 \Leftrightarrow b^2 = 1 \Leftrightarrow b \in \{-1, 1\}$, iar $a = 2 \Leftrightarrow b^2 = 2 \Rightarrow b \notin \mathbb{Z}$, nu convine. Astfel soluțiile sunt $(a, b) \in \{(0, 0), (1, -1), (1, 1)\}$

b) Polinoamele de grade diferite formează clase distincte. Avem 5 polinoame de grad $-\infty$ sau 0 (și anume $\hat{0}, \hat{1}, \hat{2}, \hat{3}, \hat{4}$). Polinoamele de grad 1 cu coeficienți distincți sunt de forma $aX + b$, cu $a, b \in \{\hat{0}, \hat{1}, \hat{2}, \hat{3}, \hat{4}\}$ distincte și $a \neq \hat{0}$. Cum a poate fi ales în 4 moduri, iar pentru fiecare alegere a lui a , b poate fi oricare dintre celelalte 4 elemente, există $4 \cdot 4 = 16$ polinoame de grad 1 cu coeficienți distincți.

Polinoamele de grad 2 din prima parte a problemei sunt de forma $aX^2 + bX + c$, cu $a, b \in \{\hat{0}, \hat{1}, \hat{2}, \hat{3}, \hat{4}\}$ distincte și $a \neq \hat{0}$; a poate fi ales în 4 moduri, pentru fiecare alegere a lui a , b poate fi oricare dintre celelalte 4 elemente diferite de a , iar pentru fiecare alegere a lui a și b , c poate fi oricare dintre cele 3 elemente rămase. Prin urmare, există $4 \cdot 4 \cdot 3 = 48$ polinoame de grad 2 cu coeficienți distincți. Similar se deduce că numărul polinoamelor cu coeficienți distincți care au gradul 3 este $4 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 = 96$, iar al celor de grad 4 este $4 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 96$. Deci răspunsul la prima întrebare este $96 + 96 + 48 + 16 + 5 = 261$.

Cum imaginea unui polinom în $\hat{0}$ este termenul liber, cerința problemei este de a găsi câte dintre polinoamele de mai sus au termenul liber 0. Putem raționa ca mai sus și, pe lângă polinomul nul,

avem polinoamele de forma aX cu $a \in \{\widehat{1}, \widehat{2}, \widehat{3}, \widehat{4}\}$, în număr de 4, polinoamele de forma $aX^2 + bX$ cu $a \neq b$ din $\{\widehat{1}, \widehat{2}, \widehat{3}, \widehat{4}\}$ care sunt $4 \cdot 3 = 12$, polinoamele de forma $aX^3 + bX^2 + cX$ cu $a, b, c \in \{\widehat{1}, \widehat{2}, \widehat{3}, \widehat{4}\}$ distincte care sunt $4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$ și polinoamele de forma $aX^4 + bX^3 + cX^2 + dX$ cu $a, b, c, d \in \{\widehat{1}, \widehat{2}, \widehat{3}, \widehat{4}\}$ care sunt $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$. Deci răspunsul la a doua întrebare este $1 + 4 + 12 + 24 + 24 = 65$.

Observație: Se poate observa că ceea ce numărăm de fapt sunt aranjamente. Mai exact, numărul polinoamelor:

- de gradul 1 cu coeficienți distincți este $A_5^2 - A_4^1$,
- de gradul 2 cu coeficienți distincți este $A_5^3 - A_4^2$,
- de gradul 3 cu coeficienți distincți este $A_5^4 - A_4^3$,
- de gradul 4 cu coeficienți distincți este $A_5^5 - A_4^4$,

unde scăzătorii numără submulțimi ordonate ale mulțimii $\{\widehat{1}, \widehat{2}, \widehat{3}, \widehat{4}\}$ ce corespund variantelor de alegere a coeficienților care nu convin deoarece au pe $\widehat{0}$ coeficient al lui X, X^2, X^3 , respectiv X^4 .

Pentru partea a doua, unde $\widehat{0}$ este termenul liber, numărăm submulțimi ordonate ale mulțimii $\{\widehat{1}, \widehat{2}, \widehat{3}, \widehat{4}\}$ care vor corespunde coeficienților celorlalti monoame din componența polinoamelor de numărat. Astfel, numărul polinoamelor cu $\widehat{0}$ rădăcină și cu coeficienți distincți care au:

- gradul 1 este A_4^1 ,
- gradul 2 este A_4^2 ,
- gradul 3 este A_4^3 ,
- gradul 4 este A_4^4 .

3. a) Limita din enunț este o determinare de forma 1^∞ , deci putem folosi limita $\lim_{y \rightarrow 0} (1+y)^{\frac{1}{y}} = e$.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} [f(x)]^{x^2} = \lim_{x \rightarrow \infty} [1 + (f(x) - 1)]^{x^2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left[[1 + (f(x) - 1)]^{\frac{1}{f(x)-1}} \right]^{x^2(f(x)-1)}.$$

În această expresie avem

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x^2(f(x) - 1) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-2x^2}{x^2 + 1} = -2,$$

și $y = f(x) - 1 \rightarrow 0$, deci $\lim_{x \rightarrow \infty} [f(x)]^{x^2} = e^{-2}$.

b) Funcția f este derivabilă pe \mathbb{R} , și ecuația $f(x) = 0$ are soluțiile $x_{1,2} = \pm 1$, deci fracția $\frac{f'(x)}{f(x)}$ este definită pe $\mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$. Calculăm derivata funcției f .

$$f'(x) = \frac{2x(x^2 + 1) - 2x(x^2 - 1)}{(x^2 + 1)^2} = \frac{4x}{(x^2 + 1)^2},$$

deci

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{4x}{(x^2 + 1)^2} \frac{x^2 + 1}{x^2 - 1} = \frac{4x}{(x^2 + 1)(x^2 - 1)} = \frac{4x}{x^4 - 1}, \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}.$$

c) Pe intervalul $(1, \infty)$ funcția f este pozitivă, deci folosind proprietatea anterioară avem

$$\int_2^x \frac{4t}{t^4 - 1} dt = \int_2^x \frac{f'(t)}{f(t)} dt = \ln f(t) \Big|_2^x = \ln f(x) - \ln f(2).$$

Astfel avem

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x^2 \int_2^x \frac{4t}{t^4 - 1} dt = \lim_{x \rightarrow \infty} [x^2 \ln f(x) - x^2 \ln f(2)].$$

Pe de altă parte $\lim_{x \rightarrow \infty} x^2 \ln f(x) = -2$ (datorită problemei a)) și $\ln f(2) = \ln \frac{3}{5} < 0$, deci $\lim_{x \rightarrow \infty} x^2 \ln f(2) = -\infty$, adică

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x^2 \int_2^x \frac{4t}{t^4 - 1} dt = \infty.$$