
Metoda simetrizării în studiul problemelor eliptice subliniare

REZUMATUL TEZEI DE DOCTORAT



Csaba Farkas

Conducător de doctorat

Prof. dr. Csaba Varga

Departamentul de Matematică

Facultea de Matematică și Informatică

Universitatea Babeș-Bolyai

Cluj-Napoca, România

Președintele comisiei

Prof. Dr. Radu Precup

Departamentul de Matematică
Universitatea Babeș-Bolyai, Cluj-Napoca, România

Referenți

Prof. Dr. Petru Jebelean

Departamentul de Matematică,
Universitatea de Vest, Timișoara, România

Prof. Dr. Cătălin Lefter

Departamentul de Matematică Aplicată,
Universitatea Al. I. Cuza, Iași, România

Prof. Dr. Adrian Petrușel

Departamentul de Matematică,
Universitatea Babeș-Bolyai, Cluj-Napoca, România

Comisia de îndrumare

Prof. Dr. Alexandru Kristály

Departamentul de Economie,
Universitatea Babeș-Bolyai, Cluj-Napoca, România

Prof. Dr. Adrian Petrușel

Departamentul de Matematică,
Universitatea Babeș-Bolyai, Cluj-Napoca, România

Prof. Dr. Radu Precup

Departamentul de Matematică,
Universitatea Babeș-Bolyai, Cluj-Napoca, România

CUPRINS

1	Spații L^p și spații Sobolev	1
2	Elemente de calcul variațional	2
3	Elemente din teoria funcțiilor local lipschitziene	2
4	Simetrizări	2
5	Elemente de geometrie Finsler	2
6	Soluții multiple invariante față de grupuri	3
6.1	Soluții multiple invariante față de grupuri	3
6.2	Un rezultat de multiplicitate	8
6.3	O incluziune diferențială subliniară	11
7	Soluții multiple invariante față de simetrizări	13
8	Ecuatii de tip Poisson pe spații Finsler-Hadamard	16
	Bibliografie	20

INTRODUCERE

În ultimii ani, numeroși matematicieni s-au ocupat de metode de simetrizare care au aplicații în teoria ecuațiilor diferențiale cu derivate parțiale și inegalități izoperimetrice. Menționăm lucrările lui J. V. Schaftingen [61], S. Kesenvan [35] și F. Faraci et al. [20]. Aceste lucrări confirmă legătura dintre calculul variațional și metodele de simetrizare.

Scopul tezei de doctorat este de a prezenta noi rezultate de existență și de multiplicitate în studiul problemelor eliptice subliniare, combinând tehnici din calculul variațional și din teoria simetrizărilor. Teza de doctorat a fost redactată pe baza articolelor [21–24] și [25].

Calculul variațional este în continuă dezvoltare. Metodele variaționale sunt indispensabile ca instrument de lucru în fizica matematică și în geometrie. De asemenea, calculul variațional are aplicații și în alte domenii ale matematicii, precum și în numeroase domenii ale fizicii (determinarea traiectoriilor și geodezicelor în mecanica clasică și teoria relativității generale), în aeronautică (maximizarea înălțării unei aripi de avion), designul echipamentelor sportive (minimizarea rezistenței aeriene asupra unei căști de bicicletă, optimizarea formei schiurilor), inginerie mecanică (maximizarea puterii unei coloane, a unui baraj sau a unei arcade), designul unor ambarcațiuni (optimizarea formei unei bărci cu cocă). Din domeniul calculului variațional amintim câteva monografii de referință, semnate de A. Kristály, V. D. Rădulescu, Cs. Varga [40], H. Brézis [9] și M. Struwe [68].

În ciuda faptului că simetrizările nu apar în modelarea situațiilor reale din viața cotidiană, acestea se dovedesc a fi foarte utile și reprezintă o metodă importantă folosită în studiul ecuațiilor diferențiale cu derivate parțiale. Numeroși matematicieni au lucrat și continuă să lucreze în domeniul simetrizărilor, încercând să descrie fenomene noi. Menționăm lucrările lui S. Kesenvan [35], Brock și Solynin [10], J. Van Schaftingen [61], M. Squassina [67], care au demonstrat în ultimii ani numeroase rezultate în cadrul simetrizărilor; de exemplu, versiunea simetrică a principiului minimax și principiul variațional al lui Ekeland, care au deschis căi noi de cercetare și de aplicare ale acestui domeniu.

În continuare prezentăm structura tezei.

În prima parte a tezei vom introduce noțiunile de bază și rezultate preliminare din teoria spațiilor Lebesgue și a spațiilor Sobolev (Capitolul 1), din calculul variațional (Capitolul 2), prezentăm elemente din teoria funcțiilor local lipschitziene (Capitolul 3), noțiuni și rezultate din teoria simetrizării (Capitolul 4) și din geometria Finsler (Capitolul 5).

În partea a doua prezentăm câteva rezultate de existență și de multiplicitate. Mai exact, în prima parte a Capitolului 6, vom studia următoarea ecuație cvasilineară de tip Neumann:

$$\begin{cases} -\Delta_p u + |u|^{p-2}u = \lambda \alpha(x, y) f(u) & \text{in } \Omega, \\ \frac{\partial u}{\partial n} = 0 & \text{on } \partial\Omega, \end{cases} \quad (\mathcal{N}_\lambda)$$

unde $\Omega = \omega \times \mathbb{R}^{N-m}$, $\omega \subset \mathbb{R}^m$ este mărginită și deschisă cu frontiera netedă, $p > N$, $N - m \geq 2$, Δ_p este operatorul p -Laplacian, λ este un parametru pozitiv, $\alpha \in L^\infty(\Omega)$ este un potențial nenul cu suport compact, n este vectorul normal la $\partial\Omega$, iar $f : [0, \infty[\rightarrow \mathbb{R}$ este o funcție continuă cu $f(0) = 0$. Mai întâi prezentăm un rezultat de scufundare compactă (vezi Teorema 6.3), după aceea vom demonstra un rezultat de multiplicitate pentru problema $(\mathcal{N}_\lambda)$ pe domenii de tip bandă (strip-like). Folosind metode variaționale, demonstrăm că pentru valori mari ale lui λ , problema $(\mathcal{N}_\lambda)$ are cel puțin două soluții slabe nenule, precum și faptul că există cel puțin un $\tilde{\lambda} > 0$, astfel încât problema $(\mathcal{N}_\lambda)$ are cel puțin trei soluții slabe nenule. Aceste soluții au proprietăți de simetrie (vezi Teorema 6.1).

În continuare aplicăm aceeași metodă, care a fost prezentată anterior, pentru următoarea ecuație cvasiliniară (vezi Capitolul 6, Secțiunea 6.2):

$$\begin{cases} -\Delta_p u + |u|^{p-2} \cdot u = \beta(x)g(u) & \text{în } \Omega \\ \frac{\partial u}{\partial n} = \lambda \alpha(x)f(u) & \text{pe } \partial\Omega, \end{cases} \quad (\mathcal{N}_\lambda)$$

unde $\Omega = \omega \times \mathbb{R}^{N-m}$, $\omega \subset \mathbb{R}^m$ este un domeniu mărginit cu frontiera netedă, $p > N$, $\alpha \in L^\infty(\partial\Omega) \cap L^1(\partial\Omega)$, $\beta \in L^1(\Omega)$ sunt potențiale pozitive, nenule, iar $f, g : [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ sunt funcții continue cu $f(0) = g(0) = 0$. Demonstrăm că, pentru valori mari ale lui λ , problema $(\mathcal{N}_\lambda)$ are cel puțin două soluții slabe nenule, cu anumite proprietăți de simetrie.

În ultima parte a Capitolului 6 vom considera următoarea incluziune diferențială subliniară de tip Dirichlet (vezi Capitolul 6, Secțiunea 6.3):

$$\begin{cases} -\Delta_p u + |u|^{p-2}u \in \lambda \alpha(x, y) \partial F(u(x, y)) & \text{în } \Omega, \\ u = 0 & \text{pe } \partial\Omega, \end{cases} \quad (\mathcal{P}_\lambda)$$

unde $\Omega = \omega \times \mathbb{R}^{N-m}$, $\omega \subset \mathbb{R}^m$ este un domeniu mărginit cu frontiera netedă, $p > N$, $\alpha \in L^\infty(\partial\Omega) \cap L^1(\partial\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ este o funcție axial simetrică, nenulă, nenegativă și ∂F reprezintă gradientul generalizat al funcției local lipschitziene $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. În rezultatul principal al acestei secțiuni demonstrăm că pentru valori mari ale parametrului λ , problema $(\mathcal{P}_\lambda)$ are cel puțin două soluții slabe, care au anumite proprietăți de simetrie.

În Capitolul 7 considerăm următorul sistem diferențial:

$$\begin{cases} -\Delta_p u = \lambda F_u(x, u(x), v(x)) & \text{în } \Omega, \\ -\Delta_q v = \lambda F_v(x, u(x), v(x)) & \text{în } \Omega, \\ u = v = 0 & \text{pe } \partial\Omega, \end{cases} \quad (\mathcal{S}_\lambda)$$

unde λ este un parametru pozitiv, $N > p, q > 1$ și $\Omega = B(0, 1) \subset \mathbb{R}^N$ este bila unitate, $F \in \mathcal{C}^1(\Omega \times \mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ și cu F_z notăm derivata parțială a funcției F în raport cu variabila z . Utilizând tehnici de simetrizare și forma simetrică a principiului variațional al lui Ekeland și a teoremei trecătorii montane, demonstrăm că pentru valori mari ale lui λ , problema $(\mathcal{S}_\lambda)$

are cel puțin două soluții slabe, invariante față de simetrizarea de tip "cap" (spherical cap symmetry).

În ultimul capitol demonstrăm teoreme de unicitate, localizare și de rigiditate pentru ecuația (singulară) a lui Poisson ce conține operatorul Finsler-Laplace pe varietăți Finsler-Hadamard cu reversibilitate finită. Studiem următoarea problemă:

$$\begin{cases} \Delta(-u) - \mu \frac{u}{d_F^2(x_0, x)} = 1 & \text{în } \Omega; \\ u = 0 & \text{pe } \partial\Omega, \end{cases} \quad (\mathcal{P}_\Omega^\mu)$$

În continuare enumerăm rezultatele originale din această teză:

Capitolul 6: Teorema 6.1, Observația 6.2, Teorema 6.3, Propoziția 6.4, Corolarul 6.5, Exemplul 6.6, Teorema 6.7, Exemplul 6.8, Teorema 6.10, Observația 6.11, Propoziția 6.12, Propoziția 6.13.

Capitolul 7: Teorema 7.1, Observația 7.2, Observația 7.3, Observația 7.4,

Capitolul 8: Teorema 8.1, Teorema 8.2, Propoziția 8.3, Teorema 8.4, Propoziția 8.5, Teorema 8.6, Propoziția 8.7, Teorema 8.8, Propoziția 8.9, Propoziția 8.10.

În încheiere, amintim alte cinci lucrări care au fost publicate sau trimise spre publicare de autor, dar care nu fac parte din subiectul tezei de doctorat.

1. CS. FARKAS, *A generalized form of Ekeland's variational principle*, Analele Științifice ale Universității Ovidius Constanța, Vol. 20 (1), pages 101-112, 2012.
2. CS. FARKAS, A. É. MOLNÁR, *A Generalized Variational Principle and its Application to Equilibrium Problems*, Journal of Optimization Theory and Applications, Vol. 156, pages 213-231, 2013.
3. CS. FARKAS, A. É. MOLNÁR, SZ. NAGY, *A generalized variational principle in b-metric spaces*, acceptată, Le Matematiche, 2014.
4. F. FARACI, CS. FARKAS, *New conditions for the existence of infinitely many solutions for a quasilinear problem*, acceptată, Proceedings of Edinburgh Mathematical Society, 2014.
5. F. FARACI, CS. FARKAS, *A quasilinear elliptic problem involving critical Sobolev exponents*, acceptată, Collectanea Mathematica 2014.

MULȚUMIRI

Îmi face deosebită plăcere să îmi exprim recunoștința față de numeroși oameni care m-au susținut sau care au jucat un rol important în ultimii trei ani din viața mea.

În primul rând sunt recunoscător domnului Prof. dr. Csaba Varga, pentru sprijinul acordat până la finalizarea tezei de doctorat. A fost un privilegiu să studiez sub îndrumarea dumnealui. Să lucrez alături de dumnealui a fost una dintre cele mai bogate experiențe din viața mea.

Sunt la fel de recunoscător domnului Prof. dr. Alexandru Kristály, nu numai pentru sfaturile sale matematice inestimabile, ci și pentru ajutorul său extraordinar, pentru timpul pe care mi l-a acordat pe parcursul scrierii tezei. De asemenea, doresc să îi mulțumesc pentru că am prilejul de a fi membru al Proiectului CNCS, PN-II-ID-PCE-2011-3-0241.

Gânduri calde de recunoștină se îndreaptă spre toate persoanele amabile pe care le-am întâlnit în cadrul Universității Babeș-Bolyai.

Aș dori, de asemenea, să îmi exprim recunoștința față de prietenii mei, care m-au încurajat în tot acest timp. Îi sunt deosebit de recunoscător lui Emil Horobeț pentru discuțiile noastre despre matematică. Îi sunt, de asemenea, recunoscător lui Andrea Éva Molnár pentru colaborarea cu ea și prietenia ei. Mulțumiri speciale se îndreaptă celui mai bun prieten al meu, Zsombor Kisfaludi-Bak, care m-a sprijinit pe tot parcursul scrierii tezei.

Aș dori să mulțumesc membrilor familiei mele pentru dragostea, înțelegerea și răbdarea lor nesfârșită. Părinților mei, care m-au învățat să iubesc știința și care m-au sprijinit în toate preocupările și aspirațiile mele.

Nu în ultimul rând, voi rămâne veșnic recunoscător logodnicei mele, Evelin, pentru toată dragostea și sprijinul ei. Fără ajutorul ei nu aș fi terminat această teză de doctorat și nu mi-aș fi găsit nicicând curajul de a depăși toate dificultățile care s-au ivit pe parcursul acestei lucrări. Îi mulțumesc!

Csaba Farkas
Cluj-Napoca, România

1

SPAȚII L^p ȘI SPAȚII SOBOLEV

2

ELEMENTE DE CALCUL VARIAȚIONAL

3

ELEMENTE DIN TEORIA FUNCȚIILOR
LOCAL LIPSCHITZIENE

4

SIMETRIZĂRI

5

ELEMENTE DE GEOMETRIE FINSLER

SOLUȚII MULTIPLE INVARIANTE FAȚĂ DE GRUPURI PE DOMENII DE TIP BANDĂ (STRIP-LIKE)

În acest capitol vom prezenta anumite rezultate de multiplicitate pe domenii de tip bandă (strip-like). Acest capitol se bazează pe articolele [21, 22, 25].

6.1 Soluții multiple invariante față de grupuri

Considerăm următoarea ecuație cvasilineară cu condiție la frontieră de tip Neumann, omogenă

$$\begin{cases} -\Delta_p u + |u|^{p-2}u = \lambda \alpha(x, y) f(u) & \text{în } \Omega, \\ \frac{\partial u}{\partial n} = 0 & \text{pe } \partial\Omega, \end{cases} \quad (\mathcal{N}_\lambda)$$

unde $\Omega = \omega \times \mathbb{R}^{N-m}$, iar $\omega \subset \mathbb{R}^m$ este mărginită și deschisă cu frontieră netedă, $p > N$, $N - m \geq 2$, Δ_p este operatorul p -Laplace, λ este un parametru pozitiv, $\alpha \in L^\infty(\Omega)$ este un potențial nenul cu suport compact, n este vectorul normal exterior la $\partial\Omega$, și $f : [0, \infty[\rightarrow \mathbb{R}$ este o funcție continuă astfel încât $f(0) = 0$.

Scopul acestui capitol este studiul existenței soluțiilor multiple pentru problema $(\mathcal{N}_\lambda)$, în care spațiul funcțional este $W^{1,p}(\Omega)$. În ceea ce privește lucrarea [19], dificultatea principală în studiul problemei constă în nemărginirea domeniului $\Omega = \omega \times \mathbb{R}^{N-m}$. Într-adevăr, nu avem o scufundare compactă pentru $W^{1,p}(\Omega)$ în spații Lebesgue. Pentru $p > N$, conform teoremei lui Morrey (vezi [9]), scufundarea $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^\infty(\Omega)$ este continuă, dar nu este compactă. Acest fapt se datorează lipsei concentrației de compactitate după anumite direcții în domeniul de tip bandă $\Omega = \omega \times \mathbb{R}^{N-m}$. Pe de altă parte, Faraci, Iannizzotto și Kristály [20] au demonstrat un rezultat de scufundare compactă pentru funcții cilindric simetrice pe domenii de tip bandă în spații cu dimensiuni mici; și anume, dacă $p > N$, atunci subspațiul funcțiilor cilindric simetrice ale lui $W^{1,p}(\Omega)$, notate cu $W_c^{1,p}(\Omega)$ este scufundat compact în $L^\infty(\Omega)$. Subspațiul

(închis) al lui $W^{1,p}(\Omega)$, constând din funcții *cilindric simetrice*, este definită prin

$$W_c^{1,p}(\Omega) = \{u \in W^{1,p}(\Omega) : u(x, \cdot) \text{ este radial simetrică pentru orice } x \in \omega\}.$$

Un astfel de rezultat de compactitate, combinată cu o metodă variațională potrivită, este un argument promițător în ceea ce privește studiul problemei $(\mathcal{N}_\lambda)$. În lucrarea [20], autorii au combinat principiul simetriei critice cu rezultatul de scufundare compactă menționat mai sus și un principiu variațional al lui Ricceri pentru a studia existența și multiplicitatea soluțiilor problemei $(\mathcal{N}_\lambda)$.

Pentru a prezenta rezultatul nostru reamintim că $u \in W^{1,p}(\Omega)$ este soluția slabă a problemei $(\mathcal{N}_\lambda)$, dacă pentru orice $v \in W^{1,p}(\Omega)$ are loc

$$\int_{\Omega} (|\nabla u|^{p-2} \nabla u \nabla v + |u|^{p-2} uv) dx dy = \lambda \int_{\Omega} \alpha(x, y) f(u) v dx dy. \quad (6.1.1)$$

Presupunem că $N - m \geq 2$ și fie

$$\mathcal{G}_{N,m} = \{G = id_{\mathbb{R}^m} \times O(k_1) \times \dots \times O(k_l) : k_1, \dots, k_l \geq 2, k_1 + \dots + k_l = N - m\}.$$

Fie $G \in \mathcal{G}_{N,m}$ un element fixat. Spunem că o funcție $h : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ este G -invariantă, dacă $h(\tilde{g}(x, y)) = h(x, y)$, pentru orice $\tilde{g} = id_{\mathbb{R}^m} \times g \in G$ și $(x, y) \in \Omega$. Funcția h este numită *cilindric simetrică*, dacă este $id_{\mathbb{R}^m} \times O(N - m)$ -invariantă.

Rezultatul principal al acestui capitol este:

Teorema 6.1 *Fie $p > N \geq m + 2$, $\Omega = \omega \times \mathbb{R}^{N-m}$, $\alpha \in L^\infty(\Omega)$ o funcție cilindric simetrică, nenegativă, nenulă cu suportul compact K . Fie $\mu = \text{dist}(K, \partial\Omega)$. Considerăm funcția continuă $f : [0, \infty[\rightarrow \mathbb{R}$ astfel încât are loc egalitatea $f(0) = 0$ și presupunem că:*

i) $M_F = \sup_{[0, \infty[} F < \infty$, unde $F(s) = \int_0^s f(t) dt$;

ii) $\lim_{s \rightarrow 0^+} \frac{f(s)}{s^{p-1}} = 0$.

Mai mult, presupunem că există $r > 0$ astfel încât

iii) $F(r) = \max_{[0, c_\infty(pM_F \|\alpha\|_{L^1})^{\frac{1}{p}}]} F < M_F$;

iv) $\frac{F(r)}{r^p} > \frac{1}{p \|\alpha\|_1} \left[\frac{|K_\mu \setminus K|}{\mu^p} + |K_\mu| \right]$.

Atunci, următoarele afirmații sunt adevărate:

(a) *Pentru orice $G \in \mathcal{G}_{N,m}$ și $\lambda > 1$, problema $(\mathcal{N}_\lambda)$ admite cel puțin două soluții slabe nenule, nenegative și G -invariante.*

(b) *Pentru orice $G \in \mathcal{G}_{N,m}$, există $\lambda_G > 1$ astfel încât problema $(\mathcal{N}_{\lambda_G})$ admite cel puțin trei soluții slabe nenule, nenegative și G -invariante.*

Observația 6.2 (a) Deoarece $f(0) = 0$, fără a pierde din generalitatea problemei, putem presupune că f este definită pe toată axa reală, punând $f(s) = 0$ pentru orice $s \leq 0$. Pentru $s \in \mathbb{R}$ considerăm $F(s) = \int_0^s f(t)dt$ și astfel are loc $F(s) = 0$ pentru orice $s \leq 0$.

(b) Dacă $u \in W^{1,p}(\Omega)$ este o soluție slabă a problemei $(\mathcal{N}_\lambda)$, atunci $u \geq 0$. Într-adevăr, dacă alegem $v = u_- = \min\{0, u\}$ ca funcție de test în (6.3.1), atunci din relația

$$\int_{\Omega} (|\nabla u|^{p-2} \nabla u \nabla u_- + |u|^{p-2} u u_-) dx dy = \lambda \int_{\Omega} \alpha(x, y) f(u) u_- dx dy = 0$$

rezultă că $u_- = 0$.

(c) Dacă, pe lângă condițiile de mai sus, presupunem că are loc

$$\lim_{s \rightarrow \infty} \frac{f(s)}{s^{p-1}} = 0,$$

atunci pentru valori mici ale parametrului $\lambda > 0$, problema $(\mathcal{N}_\lambda)$ admite numai soluția trivială. Într-adevăr, dacă $u \in W^{1,p}(\Omega)$ este soluția slabă a problemei $(\mathcal{N}_\lambda)$, și punem ca funcție de test $v = u$ în relația (6.3.1), obținem

$$\int_{\Omega} (|\nabla u|^p + |u|^p) dx dy = \lambda \int_{\Omega} \alpha(x, y) f(u) u dx dy \leq \lambda c_f \|\alpha\|_{L^\infty} \int_{\Omega} |u|^p dx dy,$$

unde $c_f = \max_{s>0} \frac{|f(s)|}{s^{p-1}} > 0$. Așadar, dacă $\lambda < (c_f \|\alpha\|_{L^\infty})^{-1}$, atunci $u = 0$.

Demonstrația Teoremei 6.1 se bazează pe argumente variaționale. Considerăm funcționala $\mathcal{L} : W_0^{1,p}(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ definită prin

$$\mathcal{L}(u) = \int_{\Omega} \alpha(x, y) F(x, y) dx dy.$$

Funcționala de energie asociată problemei $(\mathcal{N}_\lambda)$ este

$$\mathcal{E}_\lambda(u) = \frac{1}{p} \|u\|^p - \lambda \mathcal{L}(u).$$

Fie $m \geq 1$ și $n = N - m \geq 2$ numere întregi, fie $\omega \subset \mathbb{R}^m$ un domeniu mărginit cu frontiera Lipschitz $\partial\omega$, și fie $p > N$ un număr real. Considerăm $\Omega = \omega \times \mathbb{R}^{N-m}$. Putem demonstra într-un mod standard că $\mathcal{E}_\lambda$ este de clasă C^1 , iar punctele critice ale lui $\mathcal{E}_\lambda$ sunt exact soluțiile slabe ale problemei $(\mathcal{N}_\lambda)$. Acțiunea grupului G pe spațiul Sobolev $W^{1,p}(\Omega)$ este dată de

$$\tilde{g}u(x, y) = u(x, g^{-1}y) \text{ pentru orice } \tilde{g} = \text{id} \times g \in G, (x, y) \in \Omega, u \in W^{1,p}(\Omega).$$

Avem că G acționează liniar, continuu și izometric pe $W^{1,p}(\Omega)$, adică $\|\tilde{g}u\| = \|u\|$ pentru orice $\tilde{g} \in G$ și $u \in W^{1,p}(\Omega)$. Fie

$$W_G^{1,p}(\Omega) = \{u \in W^{1,p}(\Omega) : \tilde{g}u = u \text{ pentru orice } \tilde{g} \in G\}$$

subspațiul funcțiilor G -invariante în $W^{1,p}(\Omega)$. În caz particular, avem

$$W_{id_{\mathbb{R}^m} \times O(N-m)}^{1,p}(\Omega) = W_c^{1,p}(\Omega).$$

Un pas esențial al investigației noastre este următorul rezultat.

Teorema 6.3 *Presupunem că m, N, Ω, ω și p satisfac condițiile menționate mai sus, și fie $G \in \mathcal{G}_{N,m}$. Atunci scufundarea $W_G^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^\infty(\Omega)$ este compactă.*

Se știe că o funcție cilindric simetrică este și G -invariantă pentru orice $G \in \mathcal{G}_{N,m}$. Datorită principiului simetriei critice, punctele critice ale lui $\mathcal{E}_\lambda^G = \mathcal{E}_\lambda|_{W_G^{1,p}(\Omega)}$ devin puncte critice și pentru $\mathcal{E}_\lambda$, astfel, aceste puncte sunt și soluții slabe, G -invariante ale problemei $(\mathcal{N}_\lambda)$. Prin urmare este suficient să garantăm existența punctelor critice pentru $\mathcal{E}_\lambda^G = \mathcal{E}_\lambda|_{W_G^{1,p}(\Omega)}$.

În demonstrația teoremei de mai sus utilizăm următorul rezultat.

Propoziția 6.4

- (a) Funcționala $\mathcal{L}_\lambda^G$ este slab inferior semicontinuuă.
- (b) Pentru orice $\lambda \geq 0$, $\mathcal{E}_\lambda^G$ satisface condiția Palais-Smale.

O consecință imediată a Teoremei 6.1 este următorul rezultat.

Corolar 6.5 *Fie $p > N \geq m + 2$, $\Omega = \omega \times \mathbb{R}^{N-m}$. Fie $\alpha \in L^\infty(\Omega)$ o funcție cilindric simetrică, nenegativă, nenulă cu suportul compact K . Fie $\mu = \text{dist}(K, \partial\Omega)$, $f : [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ o funcție continuă astfel încât $f(0) = 0$. Presupunem că*

- j)** $M_F = \sup F_{[0,+\infty[} < +\infty$;
- jj)** 0 este maxim local al lui F ;
- jjj)** există constantele r, δ astfel încât

$$0 < r < \min \left\{ \mu, \lim_{p \rightarrow +\infty} \left[\frac{|K_\mu \setminus K|}{\mu^p} + |K_\mu| \right]^{-\frac{1}{p}} \right\},$$

precum și $\delta > 2$ astfel încât

$$0 < F(r) = \max_{[0,\delta]} F < M_F.$$

Atunci, există $p_0 > N$ astfel încât pentru orice $p \geq p_0$ concluziile Teoremei 6.1 rămân adevărate.

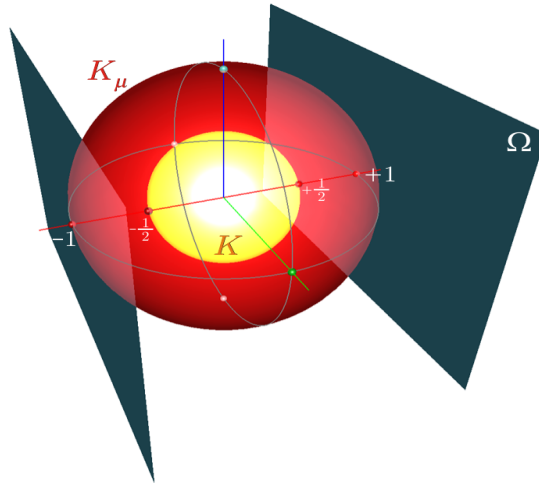


Figura 6.1: Ω , K , K_μ

Exemplu 6.6 Alegem $\Omega = [-1, 1] \times \mathbb{R}^2$ și

$$K = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq \frac{1}{4} \right\}.$$

Observăm că $\mu = \text{dist}(K, \partial\Omega) = \frac{1}{2}$, $|K| = \frac{\pi}{6}$ și $|K_\mu| = \frac{4}{3}\pi$.

Presupunem că

$$\|\alpha\|_{L^1} > \frac{75\pi^2}{27}. \quad (6.1.2)$$

Considerăm funcția $g : [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ definită prin $g(x) = \sin^5(2\pi x)$ și numărul natural $k_0 \in \mathbb{N}$, astfel încât $k_0 \geq c_\infty \sqrt[4]{4\|\alpha\|_{L^1}}$. Fie de asemenea funcția $h : [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ definită prin $h(x) = \frac{3}{2} - 6\left(x - k_0 + \frac{1}{2}\right)^2$.

Construim următoarea funcție

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} (1 - \delta_{k,k_0}) \cdot \chi_{[k-1,k]}(x) \cdot g(x) + \delta_{k,k_0} \cdot \chi_{[k_0-1,k_0]}(x) \cdot h(x), \quad (\forall) \ x \geq 0,$$

unde $\chi_{[k-1,k]}$ este funcția caracteristică a intervalului $[k-1, k]$, și δ_{k,k_0} reprezintă simbolul lui Kronecker, adică $\delta_{k,k_0} = \begin{cases} 0, & \text{dacă } k \neq k_0 \\ 1, & \text{dacă } k = k_0 \end{cases}$. Funcția f explicitată are următoarea formă

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{k} \sin^5(2\pi x), & \text{dacă } x \in [k-1, k], k \neq k_0 \\ \frac{3}{2} - 6\left(x - k_0 + \frac{1}{2}\right)^2, & \text{dacă } x \in [k_0-1, k_0]. \end{cases}$$

Vom arăta că funcția $F(x) = \int_0^x f(t)dt$ este mărginită superior. Într-adevăr, din construcție

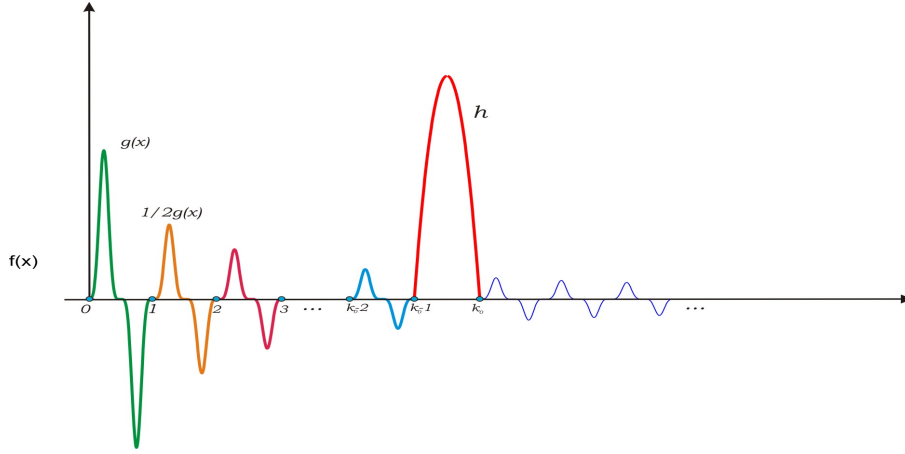


Figura 6.2: Graficul lui f

rezultă că

$$\max_{x \in \mathbb{R}_+ \setminus [k_0-1, k_0]} F(x) = \max_{x \in [0, 1]} F(x) = \int_0^{\frac{1}{2}} \sin^5(2\pi x) dx = \frac{8}{15\pi}.$$

Pe de altă parte, are loc

$$\max_{x \in [k_0-1, k_0]} F(x) = \int_{k_0-1}^{k_0} \left[\frac{3}{2} - 6 \left(x - k_0 + \frac{1}{2} \right)^2 \right] dx = 1,$$

ceea ce înseamnă că F este mărginită superior și avem $M_F = 1$.

Observăm că

$$\lim_{s \rightarrow 0^+} \frac{f(s)}{s^3} = \lim_{s \rightarrow 0^+} \frac{\sin^5(2\pi s)}{s^3} = 0. \quad (6.1.3)$$

Dacă alegem $p = 4$, $N = 3$, utilizând relația (6.1.3) și $M_F = 1$, rezultă că F satisface ipotezele *i)* și *ii)* din Teorema 6.1. Inegalitățile 6.1.2 și $k_0 \geq c_\infty \sqrt[4]{4\|\alpha\|_{L^1}}$ asigură faptul că ipotezele *iii)* și *iv)* din Teorema 6.1 sunt satisfăcute. În concluzie, putem aplica Teorema 6.1.

6.2 Un rezultat de multiplicitate

În acest paragraf aplicăm metoda prezentată în paragraful precedent pentru următoarea ecuație cvasiliniară, cu condiția la frontieră de tip Neumann neomogenă

$$\begin{cases} -\Delta_p u + |u|^{p-2} \cdot u = \beta(x, y)g(u(x, y)) & \text{în } \Omega \\ \frac{\partial u}{\partial n} = \lambda \alpha(x, y)f(u(x, y)) & \text{pe } \partial\Omega, \end{cases} \quad (\mathcal{N}_\lambda)$$

unde $\Omega = \omega \times \mathbb{R}^{N-m}$, iar $\omega \subset \mathbb{R}^m$ este un domeniu mărginit cu frontiera $\partial\omega$ netedă. Fie $p > N$, Δ_p reprezintă operatorul p -Laplace și λ este un parametru real pozitiv. Fie $\alpha \in L^\infty(\partial\Omega) \cap L^1(\partial\Omega)$, $\beta \in L^1(\Omega)$ doi potențiali nenuli și pozitivi, iar $f, g : [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ două funcții continue astfel încât $f(0) = g(0) = 0$.

În cele ce urmează vom stabili rezultatul principal al acestui paragraf. Fără a pierde din generalitatea problemei, putem presupune că f, g sunt definite pe toată axa reală, dacă alegem $f(s) = g(s) = 0$, pentru orice $s \leq 0$. Notăm cu F și G primitivele funcțiilor f respectiv g , adică

$$F(s) = \int_0^s f(t)dt \text{ și } G(s) = \int_0^s g(t)dt.$$

Fie q, r astfel încât $q < p < r$. Presupunem că următoarele ipoteze sunt îndeplinite:

(A) $\limsup_{|s| \rightarrow 0} \frac{F(s)}{|s|^r} < \infty$ și $|f(s)| \leq C(1 + |s|^{q-1})$;

(B) Există $\delta_1 > 0$ astfel încât

$$g(t) \leq 0, \forall 0 \leq t < \delta_1,$$

$$f(t) \leq 0, \forall 0 \leq t < \delta_1;$$

(C) Există q, r astfel încât $q < p < r$ și

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{G(t)}{|t|^q} = 0$$

și

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{G(t)}{|t|^r} = 0;$$

(D) Fie $K_\tau = \{(x, y) \in \omega \times \mathbb{R}^{N-m} : \|y\| < \tau\}$. Presupunem că

$$\inf_{(x,y) \in K_\tau} \alpha(x, y) > 0;$$

(E) Presupunem că $p \cdot \tilde{c} \|\beta\|_1 c_\infty^p < 1$, unde c_∞ reprezintă cea mai bună constantă de scufundare a lui $W^{1,p}(\Omega)$ în $L^\infty(\Omega)$, și $\tilde{c} = \max_{t \in \mathbb{R}} \frac{G(t)}{|t|^p} < +\infty$;

(F) Există $s_0 \in \mathbb{R}$ astfel încât $F(s_0) > 0$.

Rezultatul principal al acestui paragraf este următorul.

Teorema 6.7 *Presupunem că $p > N \geq 2$, și fie $\Omega = \omega \times \mathbb{R}^{N-m}$, unde $\omega \subset \mathbb{R}^m$ este un domeniu deschis, mărginit cu frontiera $\partial\omega$ netedă. Fie $\alpha \in L^\infty(\partial\Omega) \cap L^1(\partial\Omega)$ și $\beta \in L^1(\Omega)$ două funcții pozitive, cilindric simetrice și $f, g : [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ două funcții continue astfel încât $f(0) = g(0) = 0$ și care satisfac condițiile (A) – (F). Atunci, există $\lambda_0 > 0$ astfel încât pentru orice $\lambda > \lambda_0$, problema $(\mathcal{N}_\lambda)$ are cel puțin două soluții slabe nenule și cilindric simetrice.*

Întroducem funcționalele $I, J, \Phi : W^{1,p}(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$, definite prin

$$I(u) = \frac{1}{p} \|u\|^p, \quad J(u) = \int_{\Omega} \beta(x, y) G(u(x, y)) dx dy,$$

și

$$\Phi(u) = \int_{\partial\Omega} \alpha(x, y) F(u(x, y)) dx dy,$$

unde $\|\cdot\|$ este norma spațiului $W^{1,p}(\Omega)$. Funcționala de energie $\mathcal{E}_{\lambda} : W^{1,p}(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ asociată problemei $(\mathcal{N}_{\lambda})$ este definită prin

$$\mathcal{E}_{\lambda}(u) = I(u) - J(u) - \lambda \Phi(u).$$

Punctele critice ale funcționalei de energie $\mathcal{E}_{\lambda}$ sunt soluțiile slabe a problemei $(\mathcal{N}_{\lambda})$.

Deoarece $p > N$, subspațiul funcțiilor cilindric simetrice ale lui $W^{1,p}(\Omega)$, notată cu $W_c^{1,p}(\Omega)$, este scufundat compact în $L^{\infty}(\Omega)$ (vezi Teorema 6.3). Utilizând principiul simetriei critice al lui Palais [73], punctele critice ale funcționalei $\mathcal{F}_{\lambda} = \mathcal{E}_{\lambda}|_{W_c^{1,p}(\Omega)}$ devin puncte critice ale funcționalei $\mathcal{E}_{\lambda}$, deci sunt soluții slabe, cilindric simetrice ale problemei $(\mathcal{N}_{\lambda})$.

Prin urmare este suficient să studiem existența punctelor critice ale funcționalei $\mathcal{F}_{\lambda} = \mathcal{E}_{\lambda}|_{W_c^{1,p}(\Omega)}$.

Observația 6.8 Datorită ipotezelor din Teorema 6.7, putem alege

$$\lambda_0 = \inf \left\{ \frac{\frac{1}{p} \|u\|^p - J(u)}{\Phi(u)} : u \in W_c^{1,p}(\Omega), \Phi(u) > 0 \right\}.$$

În continuare prezentăm un exemplu pentru funcțiile f și g care satisfac condițiile din Teorema 6.7.

Exemplu 6.9 Dacă alegem

$$f(s) = \ln(1 + (s - 1)_+^r),$$

și

$$g(s) = r s^{r-1} (1 - s)_+,$$

atunci ipotezele **(A)**, **(B)**, **(C)**, **(E)** și **(F)** sunt satisfăcute cu $t_+ = \max\{0, t\}$.

În acest caz avem

$$\tilde{c} = \frac{1}{r + 1 - p} \cdot \left(\frac{(r - p)(r + 1)}{r(r + 1 - p)} \right)^{r-p}.$$

Deci putem aplica Teorema 6.7.

6.3 O incluziune diferențială subliniară

În acest paragraf considerăm următoarea problemă de incluziune diferențială subliniară eliptică, cu condiția la frontieră de tip Dirichlet omogenă, adică

$$\begin{cases} -\Delta_p u + |u|^{p-2}u \in \lambda \alpha(x, y) \partial F(u(x, y)) & \text{în } \Omega, \\ u = 0 & \text{pe } \partial\Omega, \end{cases} \quad (\mathcal{P}_\lambda)$$

unde $\Omega = \omega \times \mathbb{R}^{N-m}$, $\omega \subset \mathbb{R}^m$ este un domeniu mărginit cu frontiera $\partial\omega$ netedă, $p > N$, $N - m \geq 2$, λ este un parametru real pozitiv, $\alpha \in L^\infty(\Omega) \cap L^1(\Omega)$ este o funcție axial simetrică, nenegativă, nenulă, iar ∂F este gradientul generalizat al funcției local Lipschitz $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Pentru a prezenta rezultatul principal, reamintim că $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ este *soluția slabă* a problemei $(\mathcal{P}_\lambda)$, dacă pentru orice $v \in W_0^{1,p}(\Omega)$ există $\xi_F \in \partial F(u(x, y))$ pentru a.p.t. $(x, y) \in \Omega$ astfel încât

$$\int_{\Omega} (|\nabla u|^{p-2} \nabla u \nabla v + |u|^{p-2} uv) dx dy = \lambda \int_{\Omega} \alpha(x, y) \xi_F v(x, y) dx dy. \quad (6.3.1)$$

Presupunem că următoarele ipoteze sunt satisfăcute:

$$(A) \quad \inf_{\omega \times B(0, R)} \alpha(x, y) > 0, \text{ unde } B(0, R) = \{x \in \mathbb{R}^{N-m} : \|x\|_{\mathbb{R}^{N-m}} < R\} \subset \mathbb{R}^{N-m};$$

$$(\mathcal{F}_1) \quad \lim_{|s| \rightarrow 0} \frac{\max\{|\xi| : \xi \in \partial F(s)\}}{|s|^{p-1}} = 0;$$

$$(\mathcal{F}_2) \quad \lim_{|s| \rightarrow +\infty} \frac{F(s)}{|s|^{p-1}} = 0;$$

$$(\mathcal{F}_3) \quad \text{Există } s_0 \in \mathbb{R} \text{ astfel încât } F(s_0) > 0.$$

Rezultatul principal al acestui paragraf este următorul:

Teorema 6.10 *Presupunem că $p > N \geq 2$. Fie $\Omega = \omega \times \mathbb{R}^{N-m}$, unde $\omega \subset \mathbb{R}^m$ este un domeniu mărginit cu frontieră netedă. Fie $\alpha \in L^\infty(\Omega) \cap L^1(\Omega)$ o funcție axial simetrică, pozitivă, satisfăcând condiția (A), și fie $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție local Lipschitz, care satisface $F(0) = 0$ precum și condițiile $(\mathcal{F}_1) - (\mathcal{F}_3)$. Atunci există $\lambda_0 > 0$ astfel încât pentru orice $\lambda > \lambda_0$ problema $(\mathcal{P}_\lambda)$ admite cel puțin două soluții slabe nenule, axial simetrice în $W_0^{1,p}(\Omega)$.*

Demonstrația teoremei se bazează pe argumente variaționale. Considerăm funcționalele $I, \mathcal{L} : W_0^{1,p}(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ definite prin

$$I(u) = \frac{1}{p} \|u\|^p, \mathcal{L}(u) = \int_{\Omega} \alpha(x, y) F(u(x, y)) dx dy,$$

unde $\|\cdot\|$ este norma spațiului $W_0^{1,p}(\Omega)$. Funcționala de energie asociată problemei $(\mathcal{P}_\lambda)$ este

$$\mathcal{E}_\lambda(u) = I(u) - \lambda \mathcal{L}(u).$$

Funcționala $\mathcal{E}_\lambda$ este funcție local Lipschitz pe $W_0^{1,p}(\Omega)$. Un argument standard arată că punctele critice (în sensul lui Chang) ale funcționalei $\mathcal{E}_\lambda$ sunt soluțiile slabe ale problemei $(\mathcal{P}_\lambda)$. Utilizând principiul simetriei critice nenetede (vezi [43]), punctele critice ale funcționalei $\mathcal{A}_\lambda = \mathcal{E}_\lambda|_{W_c^{1,p}(\Omega)}$ devin puncte critice ale funcționalei $\mathcal{E}_\lambda$, deci aceste puncte critice sunt soluțiile slabe, axial simetrice ale problemei $(\mathcal{P}_\lambda)$. Astfel, este suficient să studiem existența punctelor critice ale funcționalei $\mathcal{A}_\lambda = \mathcal{E}_\lambda|_{W_c^{1,p}(\Omega)}$.

Observația 6.11 Dacă înlocuim condiția $(\mathcal{F}_2)$ cu

$$(\mathcal{F}_2)' \quad \lim_{|s| \rightarrow \infty} \frac{\max\{|\xi| : \xi \in \partial F(s)\}}{|s|^{p-1}} = 0,$$

atunci pentru valori mici ale lui $\lambda > 0$, problema $(\mathcal{P}_\lambda)$ admite numai soluția trivială. Într-adevăr, dacă $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ este o soluție slabă a problemei $(\mathcal{P}_\lambda)$, și alegem ca funcție de test $v = u$ în relația (6.3.1), obținem

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} (|\nabla u|^p + |u|^p) dx dy &= \lambda \int_{\Omega} \alpha(x, y) \xi_F u dx dy \leq \\ &\leq \lambda c_F \|\alpha\|_{L^\infty} \int_{\Omega} |u|^p dx dy, \end{aligned}$$

unde $c_F = \max_{s>0} \frac{\max\{|\xi| : \xi \in \partial F(s)\}}{s^{p-1}} > 0$. Prin urmare, dacă $\lambda < (c_F \|\alpha\|_{L^\infty})^{-1}$, atunci $u = 0$.

În continuare enunțăm două rezultate auxiliare, care sunt folosite în demonstrația Teoremei 6.10.

Propoziția 6.12 Pentru orice $\lambda > 0$ funcționala $\mathcal{A}_\lambda : W_c^{1,p}(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ este coercivă.

Propoziția 6.13 Pentru orice $\lambda > 0$, $\mathcal{A}_\lambda$ satisface condiția Palais-Smale nenetede.

SOLUȚII MULTIPLE INVARIANTE FAȚĂ DE SIMETRIZĂRI

În acest capitol vom studia soluțiile următorului sistem de ecuații, soluții ce rămân invariante față de simetrizarea "cap":

$$\begin{cases} -\Delta_p u = \lambda F_u(x, u(x), v(x)) & \text{în } \Omega, \\ -\Delta_q v = \lambda F_v(x, u(x), v(x)) & \text{în } \Omega, \\ u = v = 0 & \text{pe } \partial\Omega, \end{cases} \quad (\mathcal{S}_\lambda)$$

unde λ este un parametru pozitiv și $N > p, q > 1$, $\Omega = B(0, 1) \subset \mathbb{R}^N$ este bila de unitate, $F \in \mathcal{C}^1(\Omega \times \mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ și F_z reprezintă derivata parțială a lui F în raport cu variabila z . Sistemele de tip $(\mathcal{S}_\lambda)$ au făcut obiectul unor investigații în cazul domeniilor mărginite, de exemplu, în lucrările lui Boccardo și de Figueiredo [27], de Nápoli, Mariani [48] și monografia lui A. Kristály, V. Rădulescu și Cs. Varga [40].

Problema menționată mai sus prezintă interes nu doar din punct de vedere matematic, ci și din perspectiva aplicabilității sale în fizica matematică. Problema $(\mathcal{S}_\lambda)$ este o generalizare a ecuației pendulului de torsiune. Un pendul de torsiune este un sistem fizic în care o bucată de materie este legată de un arc, astfel încât mișcarea rezultată să conțină elemente ale unei simple mișcări de pendul, precum și ale unei mișcări de torsiune.

Pentru a prezenta rezultatul nostru de bază reamintim că $(u, v) \in W_0^{1,p} \times W_0^{1,q}$ se numește soluție slabă a problemei $(\mathcal{S}_\lambda)$, dacă

$$\begin{cases} \int_{\Omega} |\nabla u|^{p-2} \nabla u \nabla w_1 dx - \lambda \int_{\Omega} F_u(x, u(x), v(x)) w_1(x) dx = 0 \\ \int_{\Omega} |\nabla v|^{q-2} \nabla v \nabla w_2 dx - \lambda \int_{\Omega} F_v(x, u(x), v(x)) w_2(x) dx = 0, \end{cases} \quad (7.0.1)$$

pentru orice $(w_1, w_2) \in W_0^{1,p} \times W_0^{1,q}$.

În acest capitol considerăm spațiul Sobolev $W_0^{1,\alpha}(\Omega)$ cu norma

$$\|u\|_{1,\alpha} = \left(\int_{\Omega} |\nabla u|^\alpha \right)^{1/\alpha} \quad \text{cu } \alpha \in \{p, q\}.$$

Pentru $\beta \in [\alpha, \alpha^*]$ avem scufundarea continuă $W_0^{1,\alpha}(\Omega) \hookrightarrow L^\beta(\Omega)$, care este și compactă, dacă $\beta \in (\alpha, \alpha^*)$. Spațiul funcțiilor în care lucrăm este spațiul Sobolev produs $W_0^{1,p}(\Omega) \times W_0^{1,q}(\Omega)$ înzestrat cu norma $\|(u, v)\|_{1,p,q} = \|u\|_{1,p} + \|v\|_{1,q}$. Notăm cu C_z cea mai bună constantă de scufundare a lui $W_0^{1,z}(\Omega) \hookrightarrow L^z(\Omega)$. Presupunem că următoarele ipoteze sunt îndeplinite:

($\mathcal{F}_1$) $F : \Omega \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ este continuă, $(s, t) \mapsto F(x, s, t)$ este de clasă $\mathcal{C}^1$, $F(x, 0, 0) = F(x, s, 0) = F(x, 0, t) = 0$ și $F_s(x, s, t) \cdot s_- + F_t(x, s, t) \cdot t_- \leq 0$ pentru orice $x \in \Omega, s, t \in \mathbb{R}$, unde $\tau_- = \min\{0, \tau\}$;

($\mathcal{F}_2$) $\lim_{(s,t) \rightarrow (0,0)} \frac{F(x, s, t)}{|s|^p + |t|^q} = 0$, uniform pentru orice $x \in \Omega$;

($\mathcal{F}_3$) $\lim_{|s|+|t| \rightarrow +\infty} \frac{F(x, s, t)}{|s|^p + |t|^q} = 0$, uniform pentru orice $x \in \Omega$;

($\mathcal{F}_4$) Există $(u_0, v_0) \in W_0^{1,p}(\Omega) \times W_0^{1,q}(\Omega)$ astfel încât

$$\int_{\Omega} F(x, u_0(x), v_0(x)) dx > 0;$$

($\mathcal{F}_5$) Presupunem că $F(x, s, t) = F(y, s, t)$ pentru orice $x, y \in \Omega$ cu $|x| = |y|$ și $s, t \in \mathbb{R}$ și de asemenea pentru orice $x \in \Omega, a \leq b$ și $c \leq d$ avem

$$F(x, a, c) + F(x, b, d) \geq F(x, a, d) + F(x, b, c);$$

($\mathcal{F}_6$) Pentru orice $x \in \Omega$ și $s, t \in \mathbb{R}$ avem

$$F(x, s, t) \leq F(x, |s|, |t|).$$

Rezultatul principal al acestui capitol este următoarea teoremă:

Teorema 7.1 *Fie $p, q > 1$ două numere reale și fie $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ bila de unitate. Considerăm funcția $F \in \mathcal{C}^1(\Omega \times \mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ care satisface ipotezele ($\mathcal{F}_1$) – ($\mathcal{F}_6$). Atunci există un număr real λ_0 astfel încât, pentru orice $\lambda > \lambda_0$ problema ($\mathcal{S}_\lambda$) are cel puțin două soluții slabe, nenule, invariante față de simetrizarea "cap".*

Observația 7.2 *Fie $p = q = 2$, atunci funcția $F : \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definită prin $F(x, s, t) = \|x\| \ln(1 + s_+^2 \cdot t_+^2)$ satisface ipotezele ($\mathcal{F}_1$) – ($\mathcal{F}_6$), unde $\tau_+ = \max\{0, \tau\}$.*

Observația 7.3 *Folosind ipotezele ($\mathcal{F}_1$) și ($\mathcal{F}_5$), putem demonstra că*

$$F(x, 0, 0) + F(x, s, t) \geq F(x, 0, t) + F(x, s, 0), \text{ pentru orice } t, s \geq 0,$$

ceea ce înseamnă că

$$F(x, s, t) \geq 0 \text{ oricare ar fi } s, t \geq 0.$$

Observația 7.4 *Dacă*

$$S_F = C_{\max} \sup_{(s,t) \neq (0,0)} \frac{|sF_s(x, s, t) + tF_t(x, s, t)|}{|s|^p + |t|^q} < \infty,$$

atunci există un număr real λ_F astfel încât, pentru orice $0 < \lambda < \lambda_F$ problema $(\mathcal{S}_\lambda)$ are numai soluția trivială. Într-adevăr, soluția sistemului $(\mathcal{S}_\lambda)$ este o pereche $(u, v) \in W_0^{1,p}(\Omega) \times W_0^{1,q}(\Omega)$ astfel încât au loc:

$$\begin{cases} \int_{\Omega} |\nabla u|^{p-2} \nabla u \nabla w_1 dx - \lambda \int_{\Omega} F_u(x, u(x), v(x)) w_1(x) dx = 0 \\ \int_{\Omega} |\nabla v|^{q-2} \nabla v \nabla w_2 dx - \lambda \int_{\Omega} F_v(x, u(x), v(x)) w_2(x) dx = 0, \end{cases}$$

pentru orice $w_1 \in W_0^{1,p}(\Omega)$ și $w_2 \in W_0^{1,q}(\Omega)$.

Alegem $w_1 = u$ și $w_2 = v$ atunci, obținem că

$$\begin{aligned} \|u\|_{1,p}^p + \|v\|_{1,q}^q &= \lambda \int_{\Omega} (F_u(x, u, v)u + F_v(x, u, v)v) dx \leq \\ &\leq \lambda \frac{S_F}{C_{\max}} \int_{\Omega} |u|^p + |v|^q \leq \\ &\leq \lambda \frac{S_F}{C_{\max}} (C_p^p \|u\|_{1,p}^p + C_q^q \|v\|_{1,q}^q) \leq \lambda S_F (\|u\|_{1,p}^p + \|v\|_{1,q}^q), \end{aligned}$$

unde $C_{\max} = \max\{C_p^p, C_q^q\}$. Dacă $\lambda < \frac{1}{S_F}$ în mod necesar avem că $(u, v) = (0, 0)$.

Pentru a demonstra teorema principală folosim următoarele rezultate auxiliare.

1. Pentru orice $\lambda \geq 0$ funcționala de energie $\mathcal{A}_\lambda : W_0^{1,p,q}(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ este coercivă.
2. Are loc inegalitatea $\mathcal{A}_\lambda(u^H, v^H) \leq \mathcal{A}_\lambda(u, v)$.
3. Fie $\lambda \geq 0$ un număr real fixat și $\{(u_n, v_n)\} \subset W_0^{1,p,q}(\Omega)$ un șir mărginit astfel încât $\|\mathcal{A}'_\lambda(u_n, v_n)\|_* \rightarrow 0$ când $n \rightarrow \infty$. Atunci, șirul $\{(u_n, v_n)\}$ conține un subșir convergent în $W_0^{1,p,q}(\Omega)$.

ECUAȚII DE TIP POISSON PE SPAȚII FINSLER-HADAMARD

Problema lui Yamabe a condus la studiul ecuațiilor eliptice pe varietăți Riemann. Contribuții importante în această direcție au avut matematicieni de seamă ca Trudinger, Aubin, Hebey, A. Chang și alții. Problema lui Yamabe conduce în mod natural la o ecuație eliptică cu derivate parțiale în care apare operatorul lui Laplace-Beltrami, vezi T. Aubin [2] și Hebey [33].

Studiul fenomenelor anizotrope a condus la o generalizare a operatorului Laplace, care în literatura de specialitate are denumirea de *operatorul lui Finsler-Laplace*. Considerăm un spațiu Minkowski $(\mathbb{R}^n, F)$, unde $F \in C^2(\mathbb{R}^n, [0, \infty))$ este convexă, absolut omogenă (sau pozitiv omogenă) cu $F(0) = 0$. Normei Minkowski F i se poate asocia operatorul lui Finsler-Laplace. În ultimii ani proprietățile acestui operator au fost studiate de mai mulți autori, de exemplu, Alvino, Ferone, Lions și Trombetti [1], Bellettini și Paolini [5], Belloni, Ferone și Kawohl [6], [26] și alții.

Obiectivul principal al acestui capitol este de a studia pe varietăți Finsler ecuații de tip Poisson, care conțin un termen singular. Operatorul lui Finsler-Laplace pe varietăți Finsler a fost introdusă și studiată de către Ge și Shen [30], Ohta și Sturm [51].

Fie (M, F) o varietate Finsler. În mod natural, putem să introducem spațiile de funcții $W^{1,2}(M)$ și $W_0^{1,2}(M)$ asociate varietății Finsler (M, F) . Mai exact, considerăm mulțimile de funcții

$$W^{1,2}(M) = \left\{ u \in W_{\text{loc}}^{1,2}(M) : \int_M F^{*2}(x, Du(x)) dV_F(x) < +\infty \right\},$$

și fie $W_0^{1,2}(M)$ închiderea lui $C_0^\infty(M)$ în $W^{1,2}(M)$ relativ la norma

$$\|u\|_F = \left(\int_M F^{*2}(x, Du(x)) dV_F(x) + \int_M u^2(x) dV_F(x) \right)^{1/2}, \quad (8.0.1)$$

unde F^* este transformata polară a lui F .

În continuare, vom prezenta pe scurt principalele rezultate ale acestui capitol.

Teorema 8.1 *Spațiile de funcții $W^{1,2}(M)$ și $W_0^{1,2}(M)$ nu au în mod necesar o structură de spațiu vectorial.*

În continuare presupunem că (M, F) este o varietate Finsler-Hadamard, $n \geq 3$ cu constanta de uniformitate $l_F > 0$.

Scopul principal al acestui capitol este studiul ecuației

$$\begin{cases} \Delta(-u) - \mu \frac{u}{d_F^2(x_0, x)} = 1 & \text{în } \Omega; \\ u = 0 & \text{pe } \partial\Omega, \end{cases} \quad (\mathcal{P}_\Omega^\mu)$$

unde $\Omega \subset M$ este un domeniu mărginit, Δ reprezintă operatorul Finsler-Laplace pe (M, F) , d_F este funcția distanță de la punctul fixat $x_0 \in \Omega$ asociată metricii Finsler F și $\mu \geq 0$ este un parametru real.

Notăm cu $B^+(x_0, \rho) = \{x \in M : d_F(x_0, x) < \rho\}$ bila "forward" cu centru în x_0 și de rază $\rho > 0$. De asemenea considerăm funcția $\sigma_{\mu, \rho} : (0, \rho] \rightarrow \mathbb{R}$ definită prin

$$\sigma_{\mu, \rho}(s) = \frac{1}{\mu + 2n} \left(\rho^2 \left(\frac{s}{\rho} \right)^{-\sqrt{\bar{\mu}} + \sqrt{\bar{\mu} - \mu}} - s^2 \right), \quad (8.0.2)$$

unde $\bar{\mu} = \frac{(n-2)^2}{4}$ este constanta optimală a lui Hardy.

Utilizând simetrizarea anizotropă și teorema lui Bishop-Gromov putem stabili următorul rezultat de rigiditate.

Teorema 8.2 *Fie (M, F) o varietatea Finsler-Hadamard de dimensiune $n \geq 3$, de tip Berwald și cu constanta de uniformitate $l_F > 0$. Fie $x_0 \in M$ un element fixat. Atunci următoarele afirmații sunt echivalente:*

- (a)** *pentru orice $\mu \in [0, l_F r_F^{-2} \bar{\mu})$ și $\rho > 0$ fixat, funcția $u_{\mu, \rho}(x) = \sigma_{\mu, \rho}(d_F(x_0, x))$ este unica soluție a problemei $(\mathcal{P}_{B^+(x_0, \rho)}^\mu)$;*
- (b)** *spațiul Finsler-Hadamard (M, F) este izometric cu un spațiu Minkowski de dimensiune n .*

Următorul rezultat conține proprietăți ale constantei de uniformitate l_F și ale constantei de reversibilitate r_F asociate unui spațiu Finsler (M, F) .

Propoziția 8.3 *Fie (M, F) o varietate Finsler. Atunci următoarele afirmații sunt adevărate:*

- (a)** *dacă $l_F > 0$, atunci $r_F < +\infty$;*
- (b)** *dacă (M, F) este un spațiu de tip Randers cu $\mathbf{S} = 0$, atunci $l_F > 0$.*

Următorul rezultat clarifică situația când spațiile de funcții $W^{1,2}(M)$ și $W_0^{1,2}(M)$ devin spații liniare.

Teorema 8.4 Dacă (M, F) este un spațiu Finsler complet, de dimensiune n și $r_F < +\infty$, atunci $(W_0^{1,2}(M), \|\cdot\|_{F_s})$ este un spațiu Banach reflexiv, unde $F_s(x, y) = \sqrt{\frac{F^2(x, y) + F^2(x, -y)}{2}}$.

Următorul rezultat reprezintă o inegalitate de tip Hardy pe spații Finsler-Hadamard.

Propoziția 8.5 Fie (M, F) o varietate Finsler-Hadamard de dimensiune $n \geq 3$, cu $\mathbf{S} = 0$. Pentru un element fixat $x_0 \in M$, avem inegalitatea

$$\int_M F^{*2}(x, -D(|u|)(x)) dV_F(x) \geq \bar{\mu} \int_M \frac{u^2(x)}{d_F(x_0, x)^2} dV_F(x), \quad \forall u \in C_0^\infty(M), \quad (8.0.3)$$

unde constanta $\bar{\mu} = \frac{(n-2)^2}{4}$ este optimală și nu este atinsă niciodată.

Următorul rezultat este interesant în sine.

Teorema 8.6 Fie (M, F) o varietate Finsler-Hadamard de dimensiune $n \geq 3$, cu $\mathbf{S} = 0$ și $l_F > 0$. Fie $\Omega \subseteq M$ un deschis, $x_0 \in \Omega$ un element fixat și $\mu \in [0, l_F r_F^{-2} \bar{\mu})$. Atunci funcționala $\mathcal{K}_\mu : W_0^{1,2}(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ definită prin

$$\mathcal{K}_\mu(u) = \int_\Omega F^{*2}(x, Du(x)) dV_F(x) - \mu \int_\Omega \frac{u^2(x)}{d_F(x_0, x)^2} dV_F(x)$$

este pozitivă și strict convexă.

Următorul rezultat stabilește un principiu de comparație pentru operatorul $\mathcal{L}_F^\mu u = \Delta(-u) - \mu \frac{u}{d_F^2(x_0, x)}$.

Propoziția 8.7 (Principiul de comparație) Fie (M, F) o varietate Finsler-Hadamard de dimensiune $n \geq 3$, cu $\mathbf{S} = 0$ și $l_F > 0$. Fie $\Omega \subseteq M$ un domeniu deschis și $\mu \in [0, l_F r_F^{-2} \bar{\mu})$. Dacă $\mathcal{L}_F^\mu u \leq \mathcal{L}_F^\mu v$ în Ω și $u \leq v$ pe $\partial\Omega$, atunci $u \leq v$ a.p.t. în Ω .

Următorul rezultat asigură existența și unicitatea soluției ecuației Poisson cu termen singular pe varietăți Finsler-Hadamard.

Teorema 8.8 Fie (M, F) o varietate Finsler-Hadamard de dimensiune $n \geq 3$, cu $\mathbf{S} = 0$ și $l_F > 0$. Fie $\Omega \subseteq M$ un domeniu deschis și $\kappa \in L^\infty(\Omega)$ o funcție nenegativă. Atunci, problema $(\mathcal{P}_\Omega^{\mu, \kappa})$ are soluție unică, nenegativă.

Propoziția 8.9 Fie $(M, F) = (\mathbb{R}^n, \|\cdot\|)$ un spațiu Minkowski și fie $x_0 \in \mathbb{R}^n$ element fixat și $\mu \in [0, l_F r_F^{-2} \bar{\mu})$ fixat. Pentru orice $\rho > 0$, funcția $u_{\mu, \rho}(x) = \sigma_{\mu, \rho}(\|x - x_0\|)$ este soluția unică a problemei $(\mathcal{P}_{B^+(x_0, \rho)}^\mu)$.

În încheiere enunțăm un rezultat care compară soluția ecuației Poisson cu funcția $\sigma_{\mu,\rho}$.

Propoziția 8.10 *Fie $(M, F) = (\mathbb{R}^n, \|\cdot\|)$ un spațiu Minkowski, $x_0 \in \mathbb{R}^n$ un punct fixat, $\mu \in [0, l_F r_F^{-2} \bar{\mu})$ și $\rho > 0$ un număr fixat. Dacă $\tilde{u}_{\mu,\rho}$ este soluția unică a problemei $(\mathcal{P}_{B^-(x_0,\rho)}^\mu)$, atunci au loc inegalitățile*

$$\sigma_{\mu, r_F^{-1}\rho}(\|x - x_0\|) \leq \tilde{u}_{\mu,\rho}(x) \leq \sigma_{\mu, r_F\rho}(\|x - x_0\|), \quad x \in B^-(x_0, \rho).$$

BIBLIOGRAFIE

- [1] A. ALVINO, V. FERONE, P.-L. LIONS, G. TROMBETTI, *Convex symmetrization and applications*, Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire **14** (1997), no. 2, 275-293.
- [2] T. AUBIN, *Problèmes isopérimétriques et espaces de Sobolev*, J. Diff. Geom **11** (1976), no. 4, 573–598.
- [3] D. BAO, S. S. CHERN, Z. SHEN, *Introduction to Riemann–Finsler Geometry*, Graduate Texts in Mathematics 200, Springer Verlag, 2000.
- [4] D. BAO, C. ROBLES, Z. SHEN, *Zermelo navigation on Riemannian manifolds*, J. Diff. Geom. **66** (2004) 377–435.
- [5] G. BELLETTINI, M. PAOLINI, *Anisotropic motion by mean curvature in the context of Finsler geometry*, Hokkaido Math. J. **25** (1996), no. 3, 537-566.
- [6] M. BELLONI, V. FERONE, B. KAWOHL, *Isoperimetric inequalities, Wulff shape and related questions for strongly nonlinear elliptic operators*, Z. Angew. Math. Phys. **54** (2003), no. 5, 771–783.
- [7] M. BELLONI, B. KAWOHL, P. JUUTINEN, *The p –Laplace eigenvalue problem as $p \rightarrow \infty$ in a Finsler metric*, J. Eur. Math. Soc. (JEMS) **8** (2006), no. 1, 123–138.
- [8] L. BOCCARDO, D. G. DE FIGUEIREDO, *Some remarks on a system of quasilinear elliptic equations*, Nonlin. Diff. Eqns Applic. **9** (2002), 309–323.
- [9] H. BREZIS, *Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations*, Springer-Verlag; 1st Edition. 2010.
- [10] F. BROCK, A. YU. SOLYIN, *An approach to symmetrization via polarization*, Trans. AMS **352**, (2000) no. 4, 1759–1796.
- [11] S. S. CHERN, Z. SHEN, *Riemann-Finsler geometry*, Nankai Tracts in Mathematics, 6. World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., Hackensack, NJ, 2005.
- [12] A. CIANCHI, P. SALANI, *Overdetermined anisotropic elliptic problems*, Math. Ann. **345** (2009), no. 4, 859-881.
- [13] F. CLARKE, *Optimization and Nonsmooth Analysis*, John Wiley-Sons, New York, 1983.
- [14] N. COSTEA, Cs. VARGA, *Multiple critical points for non-differentiable parametrized functionals and applications to differential inclusion*, J. Global Optim., **56** (2013) no 2, 399–416.
- [15] G. DUVAUT J. L. LIONS, *Inequalities in Mechanics and Physics*, Springer, Berlin, 1976.

- [16] D. EGLOFF, *Uniform Finsler Hadamard manifolds*, Ann. Inst. H. Poincaré Phys. Théor. **66** (1997), no. 3, 323–357.
- [17] I. EKELAND, *On the variational principle*, J. Math. Anal. Appl. **47** (1974), 324–353.
- [18] L.C. EVANS, *Partial Differential Equations Second Edition (Graduate Studies in Mathematics)*, AIMS, 2010.
- [19] F. FARACI, A. KRISTÁLY, *Three non-zero solutions for a nonlinear eigenvalue problem*, J. Math. Anal. Appl., **394** (2012), no. 1, 225–230.
- [20] F. FARACI, A. IANNIZZOTTO, A. KRISTÁLY, *Low-dimensional compact embeddings of symmetric Sobolev spaces with applications*, Proc. of the Royal Society of Edinburgh, Sect. A **141**, (2011), 383–395.
- [21] CS. FARKAS, I. I. MEZEI, *Group-invariant multiple solutions for quasilinear elliptic problems on strip-like domains*, Nonlinear Anal. TMA, **79** (2013), 238–246.
- [22] CS. FARKAS, R. FÜLLÉR, A. KRISTÁLY, *A sublinear differential inclusion on strip-like domains*, IEEE 8th International Symposium on Applied Computational Intelligence and Informatics, (2013) 185–189.
- [23] CS. FARKAS, CS. VARGA, *Multiple symmetric invariant non trivial solutions for a class of quasilinear elliptic variational systems*, Applied Math. and Comp., **241** (2014), 347–355.
- [24] CS. FARKAS, A. KRISTÁLY, CS. VARGA, *Poisson-type equations on Finsler-Hadamard manifolds*, trimis spre publicare, 2014.
- [25] CS. FARKAS, *Multiplicity results in strip-like domains*, trimis spre publicare, 2014.
- [26] V. FERONE, B. KAWOHL, *Remarks on a Finsler-Laplace operator*, Proc. Amer. Math. Soc. **137** (2009), no. 1, 247–253.
- [27] D. G. DE FIGUEIREDO, *Semilinear elliptic systems in Nonlinear Functional Analysis and Applications to Differential Equations*, Trieste, 1997, pp. 122–152 (World Scientific, River Edge, NJ) 1998).
- [28] K. H. FIESELER, K. TINTAREV, *Concentration Compactness: Functional-Analytic Grounds and Applications*, Imperial College Press, 2007.
- [29] L. GASINSKI, N. PAPAGEORGIOU, *Nonsmooth critical point theory and nonlinear boundary value problems*, Series in Mathematical Analysis and Applications, 8. Chapman & Hall/CRC, Boca Raton, FL, 2005.
- [30] Y. GE, Z. SHEN, *Eigenvalues and eigenfunctions of metric measure manifolds*, Proc. London Math. Soc. **82** (2001), no. 3, 725–746.
- [31] M. R. GROSSINHO, *Some existence and bifurcation results for nonlinear elliptic problems in strip-like domains*, Ricerche Mat. **36** (1987), 127–138.

- [32] D. HABECK, F. SCHURICHT, *Contact between nonlinearly elastic bodies*, Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A **136** (2006), no. 6, 1239–1266.
- [33] E. HEBEY, *Nonlinear analysis on manifolds: Sobolev spaces and inequalities*, Courant Lecture Notes in Mathematics, 5. New York University, Courant Institute of Mathematical Sciences, New York; American Mathematical Society, Providence, RI, 1999.
- [34] C. Y. JIN, C. Z. CHENG, *Some applications of variational inequalities in nonsmooth analysis*, Nonlinear Anal. **66** (2007), no. 8, 1728–1738.
- [35] S. KESEVAN, *Symmetrization & Applications*, World Scientific Publishing: Series in Analysis, Vol. 3, 2006.
- [36] A. KRISTÁLY, *Multiplicity results for an eigenvalue problem for hemivariational inequalities in strip-like domains*, Set-Valued Anal. **13** (2005), no. 1, 85–103.
- [37] A. KRISTÁLY, *Infinitely many solutions for a differential inclusion problem in $\mathbb{R}^N$* , J. Differential Equations **220** (2006), no. 2, 511–530.
- [38] A. KRISTÁLY, W. MARZANTOWICZ, CS. VARGA *A non-smooth three critical points theorem with applications in differential inclusions*, J. Global Optim. **46** (2010), no.1, 49–62.
- [39] A. KRISTÁLY, I. MEZEI, *Multiple solutions for a perturbed system on strip-like domains*, Discrete Cont Dyn S. SER. S **5** (2012), no. 4, 789–796.
- [40] A. KRISTÁLY, V. RĂDULESCU, CS. VARGA, *Variational principles in mathematical physics, geometry and economics*, Cambridge University Press, 2010.
- [41] A. KRISTÁLY, I. J. RUDAS, *Elliptic problems on the ball endowed with Funk-type metrics*, 2014, preprint.
- [42] A. KRISTÁLY, CS. VARGA, *An introduction to critical point theory for non-smooth functions*, Casa Cărții de Știință, Cluj-Napoca, 2004.
- [43] A. KRISTÁLY, CS. VARGA, V. VARGA, *A nonsmooth principle of symmetric criticality and variational hemivariational inequalities*, J. Math. Anal. Appl. **325** (2007) 975–986.
- [44] J. KOBAYASHI, M. ÔTANI, *The principle of symmetric criticality for non-differentiable mappings*, J. Funct. Anal. **214** (2004), no. 2, 428–449.
- [45] E. H. LIEB, M. LOSS, *Analysis*, AIMS, 2001.
- [46] H. LISEI, CS. VARGA, *Multiple solutions for a differential inclusion problem with nonhomogeneous boundary conditions*, Numer. Funct. Anal. Optim. **30** (2009), no. 5-6, 566–581.
- [47] D. MOTREANU, P.D. PANAGIOTOPOULOS, *Minimax Theorems and Qualitative Properties of the Solutions of Hemivariational Inequalities*. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1999.

- [48] P. L. DE NAPOLI, M. C. MARIANI, *Quasilinear elliptic systems of resonant type and nonlinear eigenvalue problems*, Abstr. Appl. Analysis **7** (2002) 155–167.
- [49] S. OHTA, *Vanishing S -curvature of Randers spaces*, Differential Geom. Appl. **29** (2011), no. 2, 174–178.
- [50] S. OHTA, *Uniform convexity and smoothness, and their applications in Finsler geometry*, Math. Ann. **343** (2009), no. 3, 669–699.
- [51] S. OHTA, K. T. STURM, *Heat flow on Finsler manifolds*, Comm. Pure Appl. Math. **62** (2009), no. 10, 1386–1433.
- [52] R. S. PALAIS, *The principle of symmetric criticality*, Comm. Math. Phys. **69** (1979), 19–30.
- [53] R. PRECUP, *Lecții de ecuații cu derivate parțiale*, Presa Universitară Clujeană, Cluj-Napoca, 2004.
- [54] P. PUCCI, V. RĂDULESCU *The impact of the mountain pass theory in nonlinear analysis: a mathematical survey*, Boll. Unione Mat. Ital. Series IX, No. **3** (2010), 543–584.
- [55] H. B. RADEMACHER, *A sphere theorem for non-reversible Finsler metrics*, Math. Ann. **328** (2004), no. 3, 373–387.
- [56] G. RANDERS, *On an asymmetrical metric in the four-space of general relativity*, Phys. Rev. (2) **59** (1941), 195–199.
- [57] B. RICCERI, *A class of nonlinear eigenvalue problems with four solutions*, J. Nonlinear Convex Anal. **11** (2010) 503–511.
- [58] B. RICCERI, *A further refinement of a three critical points theorem*, Nonlinear Anal. **74** (2011), no. 18, 7446–7454.
- [59] B. RICCERI, *A new existence and localization theorem for the Dirichlet problem*, Dynam. Systems Appl., **22** (2013), no. 2-3, 317–324.
- [60] J. VAN SCHAFTINGEN, *Anisotropic symmetrization*, Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire **23** (2006), no. 4, 539–565.
- [61] J. VAN SCHAFTINGEN, *Symmetrization and minimax principles*, Comm. Contemp. Math. **7** (2005), 463–481.
- [62] Z. SHEN, *Lectures on Finsler Geometry*, World Scientific, 2001.
- [63] Z. SHEN, *Volume comparison and its applications in Riemann-Finsler geometry*, Adv. Math. **128** (1997), no. 2, 306–328.
- [64] Z. SHEN, *On Finsler geometry of submanifolds*, Math. Ann. **311** (1998), no. 3, 549–576.
- [65] Z. SHEN, *The non-linear Laplacian for Finsler manifolds. The theory of Finslerian Laplacians and applications*, 187–198, Mathematics and Its Applications, **459**. Kluwer, Dordrecht, The Netherlands, 1998.

- [66] D. SMETS, M. WILLEM, *Partial symmetry and asymptotic behavior for some elliptic problems*, Calc. Var. Partial Differential Equations **18** (2003), no. 1, 57–75.
- [67] M. SQUASSINA, *Symmetry in variational principles and applications*, J. London Math. Soc. **85** (2012), 323–348.
- [68] M. STRUWE, *Variational Methods, Applications to Nonlinear Partial Differential Equations and Hamiltonian Systems*, Springer-Verlag, Fourth Edition, 2007.
- [69] S. A. TERSIAN, *On the solvability of semilinear Schrödinger equations in strip-like domains*, C.R. Acad. Bulgare Sci. **51** (1998), 17–20.
- [70] CS. VARGA, *Metode topologice în calculul variațional*, Casa Cărții de Știință, Cluj-Napoca, 2005.
- [71] G. WANG, C. XIA, *A characterization of the Wulff shape by an overdetermined anisotropic PDE*, Arch. Ration. Mech. Anal. **199** (2011), no. 1, 99–115.
- [72] G. WANG, C. XIA, *A sharp lower bound for the first eigenvalue on Finsler manifolds*, Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire **30** (2013), no. 6, 983–996.
- [73] M. WILLEM, *Minimax theorems*, Progress in Nonlinear Differential Equations and their Applications **24**, Birkhäuser, Boston, 1996.
- [74] B. Y. WU, Y. L. XIN, *Comparison theorems in Finsler geometry and their applications*, Math. Ann. **337** (2007), no. 1, 177–196.
- [75] E. ZEIDLER, *Nonlinear functional analysis and its applications*, III. Variational methods and optimization, Springer-Verlag, New York, 1985.
- [76] W. ZHAO, Y. SHEN, *A universal volume comparison theorem for Finsler manifolds and related results*, Canad. J. Math. **65** (2013), no. 6, 1401–1435.