CONTRIBUȚIILE
Şcolii din Timişoara în teoria punctelor fixe

Şcoala din Timişoara de teoria punctelor fixe, deși nu are o tradiție foarte îndelungată și nici o echipă de cercetători foarte numeroasă, a obținut rezultate notabile în câteva domenii relativ actuale și importante, stabilitatea Ulam-Hyers, teoria punctelor fixe în spații metrice probabiliste și fuzzy, aproximarea iterativă a punctelor fixe (iterația Mann și variante). Aceste rezultate au avut ecouri semnificative în literatura de specialitate și în mediile academice din multe țări, comparabile cu cele din alte centre universitare din țară sau străinătate. Menționăm în mod special rezultatele regretatului profesor Viorel Radu relativ la stabilitatea Ulam-Heyers, care au avut un impact major în domeniu.

Şcoala timişoreană de punct fix a avut contribuţii de excepţie în studiul stabilităţii generalizate în sens Ulam-Hyers pentru ecuaţii funcţionale în spatii normate şi β-normate, în spaţii metrice probabiliste şi în spaţii metrice fuzzy. În fapt, problema stabilităţii unor ecuaţii funcţionale a fost redusă la o problemă de punct fix, prin identificarea unor metrici generalizate potrivite şi utilizarea unor teoreme de punct fix corespunzătoare.

Pentru o înţelegere deplină a contextului, câteva considerente de ordin istoric sunt necesare. În 1991, J.A. Baker[1.1] a utilizat o variantă a teoremei de punct fix a lui Banach pentru a obţine stabilitatea Ulam-Hyers a unei ecuaţii funcţionale neliniare. Reamintim că în cazul stabilităţii Ulam-Hyers ecuaţiile sunt perturbate de o constantă pozitivă dată. Până în anul 2002, toate demonstraţiile din acest domeniu (cu excepţia celei a lui Baker din 1991) au utilizat metoda directă (a lui Hyers): soluţia exactă a ecuaţiei funcţionale este construită explicit ca limita unui şir, pornind de la o soluţie aproximativă dată.

În anul 2003, V. Radu[1.2] a publicat în revista clujeană Fixed Point Theory un prim rezultat de stabilitate în sens Ulam-Hyers-Rassias pentru ecuaţia funcţională a lui Cauchy, utilizând pentru demonstraţie Alternativa de punct fix a lui J. B. Diaz şi B. Margolis [1.3] în spaţii metrice generalizate. În această lucrare s-a arătat că existenţa soluţiei exacte a ecuaţiei şi relaţia de estimare pot fi obţinute prin metoda punctului fix. Concret, plecând de la proprietatea de contractivitate a unui operator J (de tip Hyers) s-a obţinut faptul că primele două aproximaţii succesive, pornind de la funcţia dată f, sunt la distanţă finită şi, în plus, punctul fix al operatorului J este aditiv.

Această idee s-a dovedit a fi foarte utilă pentru o mai bună înţelegere a proprietăţilor de stabilitate, proprietăţi ce sunt legate de punctele fixe ale unui operator adecvat ales, cât şi pentru că oferă demonstraţii mult simplificate ale rezultatelor de stabilitate, în situaţii foarte generale.

În anii 2003-2004, în două lucrări successive [3.1 - 3.2], a fost extins rezultatul menţionat mai sus, obţinându-se proprietăţi de stabilitate generalizată în sens Ulam-Hyers, pentru ecuaţiile funcţionale ale lui Jensen şi Cauchy, în spaţii normate (ecuaţiile funcţionale erau perturbate de o funcţie de control φ ce satisface o proprietate simplă de tip contractiv: $\varphi(2\mathbf{x}, 2\mathbf{x}) \leq \mathbf{L} \cdot \varphi(\mathbf{x}, \mathbf{x}), L \in (0, 1)$.

Lucrările [1.2, 3.1, 3.2] au avut şi încă au un impact deosebit în domeniul ecuaţiilor funcţionale în general, şi în cel al stabilităţii Ulam-Hyers în special, datorită noutaţii şi simplităţii metodei folosite. Este demn de remarcat că numărul total al citărilor pentu aceste 3 articole depăşeşte 950 pe Google Scholar. Sugestivă în acest sens este şi ideea exprimată de S.-M. Jung înlucrarea ([3.3], page 881): "Recently, L. Cădariu and V. Radu [8] applied the fixed point method to the investigation of the Cauchy additive functional equation. Using such an elegant idea, they could present a short and simple proof for the Hyers-Ulam stability of that equation."

Demersurile ştiinţifice au fost continuate în anii următori prin publicarea unor articole ce demonstrează proprietăţi de stabilitate pentru ecuaţii funcţionale de tip cuadratic, cubic, cuartic, monomial, în diverse spaţii. Astfel, înlucrarea [3.4] a fost demonstrată o teoremă de stabilitate pentru ecuaţia funcţională de o variabilă $(\mathbf{w} \circ \mathbf{f} \circ \mu)(\mathbf{x}) - \mathbf{f}(\mathbf{x}) - \mathbf{h}(\mathbf{x}) = 0$ în spaţii Banach, folosind aceeaşi tehnică a punctului fix.

Acest rezultat a fost utilizat apoi pentru a demonstra stabilitatea generalizată în sensUlam-Hyers a ecuaţiei neliniare $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{F}\left(\mathbf{x}, \mathbf{f}\left(\mu(\mathbf{x})\right)\right)$, în care f este funcţia necunoscută. Forma generală a ecuaţiei precedente a condus la aplicarea rezultatului de stabilitate corespunzător într-o serie de articole succesive ale altor autori, pentru diverse ecuaţii funcţionale.

Metoda punctului fix a devenit una dintre cele mai populare tehnici utilizate în demostrarea proprietăţilor de stabilitate generalizată în sens Ulam-Hyers, pentru clase largi de ecuaţii (funcţionale, diferenţale, integrale, cu diferenţe, etc), în diverse tipuri de spaţii (normate, probabiliste, metrice, fuzzy, nearhimediene, etc).

Studiul stabilităţii ecuaţiilor funcţionale nu s-a limitat la utilizarea exclusivă a teoremelor de punct fix de tip Diaz-Margolis. Astfel D. Miheţ, L. Găvruţa, L. Cădariu şi V. Radu au folosit teoreme de punct fix de tip Luxemburg-Jung, Bianchini-Grandolfi, respectiv Matkovski-Rus, pentru funcţii de comparaţie, extinzând o parte din rezultatele de ma isus.

În domeniul stabilităţii ecuaţiilor funcţionale, se manifestă în ultimul timp un trend general de a identifica clase cât mai cuprinzătoare de ecuaţii, de diverse tipuri, ale căror proprietăţi de stabilitate în sensUlam-Hyers să fie demonstrate folosind teoreme de punct fix pentru operatori ce satisfac proprietăţi foarte generale. În această direcţie se înscrie lucrarea [3.5], unde a fost generalizat principalul rezultat de punct fix demonstrat de Brzdek et al. într-o lucrare anterioară pentru un operator neliniar, şi a fost folosit apoi pentru a obţinere zultate de stabilitate generalizată Ulam-Hyer spentru clase de ecuaţii funcţionale de o singură variabilă, în spaţii metrice nearhimediene, respectiv în spaţiimetrice complete.

În acelaşi cadru general oferit de teoria punctelor fixe V. Radu a obţinut şi alte rezultate semnificative. Dintre acestea amintim: caracterizarea normelor triunghiulare continue având proprietăţi de punct fix pentru contracţii de tip Sehgal, o teoremă de tip Banach pentru contracţii de tip Hicks, clase noi de aplicaţii contractive în spaţii metrice probabiliste şi fuzzy, formule pentru metrici de tip Fréchet şi Ky-Fan generate de metrici probabiliste, metrici Lévy pentru funcţii de distribuţie.

1*) t-norme cu proprietatea de punct fix* [R1]. Contracțiile probabiliste (*B* – contrații) au fost introduse in 1966 de către Sehgal, care a demonstrat o teoremă de punct fix in spații metrice probabiliste complete înzestrate cu *t*-norma Min. Încercând să găsească t-norme mai slabe ca Min în care *B*-contracțiile să aibă puncte fixe, Olga Hadic a introdus în 1978 un tip de *t*-norme nearhimediene, în raport cu care se poate demonstra existența punctelor fixe pentru orice *B*-contracție. În 1984 V. Radu a dat o caracterizare a *t*-normelor continue de tip Hadic si a arătat că acestea sunt singurele *t*-norme continue cu proprietatea de punct fix.

2) *Introducerea și dezvoltarea noțiunii de aplicație φ -contractivă în spații metrice fuzzy* ([M1], [M11]) ca generalizare a unui tip de contracții fuzzy clasice. (peste 100 citări în ISI Web of Science).

3) *Aplicarea teoriei punctelor fixe la stabilitatea ecuațiilor funcționale in spații* normate probabiliste si fuzzy ([M12], [M16]). Am inițiat aplicarea teoriei punctului fix în studiul stabilității ecuațiilor funționale în spații normate probabiliste și fuzzy. Prin identificarea unei metrici generalizate, am redus problema de stabilitate la o problemă de punct fix in spații metrice. Ideea a fost preluată și utilizată de mai mulți autori (peste 185 citări țn ISI Web of Science)

4*) Introducerea si studierea conceptului de p-convergență secvențială în spații metrice fuzzy*. În [M7] a fost introdusă noțiunea de p-convergență secvențială în spații metrice fuzzy, mai slabă decât noțiunea de convergență clasică (în sensul lui George și Veeramani). Legat de acest tip de convergență, a fost introdus și studiat conceptul de spațiu fuzzy metric principal, ca un spațiu fuzzy metric în care orice șir p-convergent este convergent, precum și conceptul mai tare de s-convergență în spații metrice fuzzy.

Un alt concept pe care dorim să-l menționăm este cel de *demicontractivitate.* Interesul pentru clasa de operatori demicontractivi este legat de faptul că operatorii de *proiecție maximală* care apar în algoritmii de proiecție pentru rezolvarea problemelor de fezabilitate convexa, sunt demicontractivi. Trebuie de asemenea să menționăm că problemele de fezabilitate convexă au aplicații multiple (tomografie computerizată, prelucrarea semnalelor, reconstrucția imaginilor, etc.), fapt care explică numărul apreciabil de lucrări cu această temă care apar în prezent. Operatorii de proiecție maximală nu au proprietăți foarte bune de netezime, de exemplu nu sunt continui, astfel că determinarea unui *punct fezabil* (practic un punct fix al operatorului) este o problemă relativ dificilă. Precizăm că algoritmii de proiecție sunt cazuri particulare de iterație Mann, astfel încât problema revine la studiul proprietăților de convergență ale iterației Mann și a numeroaselor ei variante.

Una din primele lucrări în care apare conceptul de demicontractivitate, într-o formă incipientă în spații finit dimensionale, a fost publicată în anul 1973 [4.1]. Ulterior, în 1977, conceptul a fost conturat mai precis și a fost extins la spații Hilbert sub numele de *Condiția (A)* [4.2]. În același an a fost publicat un rezultat identic, autorii articolului, T.L.Hicks și J.D.Kubicek, propunând termenul de *demicontractivitate,* termen care este utilizat în mod curent pentru respectiva clasă de operatori [4.3]. Aceiași autori au propus termenul de *coeficient de contractivitate* pentru constanta numerică care apare în definiția contractivității.

Rezultatul principal din acea perioadă de început se referă condiții de convergență ale iterației Mann în spații Hilbert reale. Următorul rezultat este reprezentativ: Daca operatorul este demicontractiv și satisface o anumită condiție de netezime slabă (de exemplu, este demi-închis la zero), iar șirul de control satisface anumite restricții, atunci iterația Mann converge slab la un punct fix. În cazul unui spațiu de dimensiune finită, în particular cazul algoritmilor de proiecție, cele două condiții asigură convergența în normă. Rezultatul de mai sus a fost într-un timp relativ scurt extins la spații mai generale (de exemplu la spaíi Banach cu structură specială) sau la iterații de tip Mann cu erori. Conceptul însuși de demicontractivitate a fost generalizat în mai multe moduri, de exemplu a fost definită clasa de operatori *tare demicontractivi.* Un rezultat remarcabil ale acestei clase mai restrânse îl constituie faptul că iterația Mann converge in normă fără condiții suplimentare, cerându-se doar ca șirul de control să fie limitat superior de o constantă (1 minus coeficientul de contracție). Alte generalizări sunt clasele de operatori asimptotic demicontractivi, φ -asimptotic demicontractivi, sau total asimptotic demicon-tractivi, clase pentru care este de asemenea valabilă proprietatea de convergență în normă. Menționez că în momentul de față există un anumit interes pentru aceste clase; de exemplu, în ultimii 5 ani au apărut peste 20 de lucrări care au în titlu conceptul de asimptotic demicontractivitate.

Un rezultat remarcabil privind structura punctelor fixe a unui operator demicontractiv a fost dat relativ recent (2007) de G.Marino și H-K.Xu [4.10]. Ei au arătat că mulțimea punctelor fixe ale unui operator demicontractiv având coeficientul de contracție subunitar este închisă și convexa. Proprietatea de convexitate a punctelor fixe este importantă iar rezultatul menționat constituie o îmbunătățire semnificativă în acest domeniu, având în vedere faptul că clasa de operatori demicontractivi este una din cele mai generale clase de operatori care satisfac o condiție de contracție slabă. De exemplu, clasa de operatori demicontractivi include clasa de operatori neexpansivi (este cunoscut că mulțimea punctelor fixe ale unui operator neexpansiv si demicompact este convexa).

O problemă care a apărut de la primele lucrări asupra clasei de operatori demicontractivi este găsirea unor condiții suplimentare care să asigure convergența în normă a iterației Mann sau variante. În mai multe lucrări se pun condiții de compacitate a operatorului sau a domeniului de definiție, condiții relativ tari și dificil de verificat în aplicații. De exemplu în [4.3] se cere ca operatorul *I-T* să transforme mulțimile mărginite și închise în mulțimi închise, în particular condiția fiind îndeplinită dacă *T* este compact, idee care a fost dezvoltată în mai multe lucrări recente. Sunt interesante îndeosebi condițiile suplimentare care sunt verificate de operatorii maximali de proiecție în problemele de fezabilitate convexă.

Contribuțiile noastre în acest domeniu sunt de următoarele trei tipuri:

(1) Existența unei soluții nenule a unei inecuații variaționale de tip *dual*. O astfel de condiție apare in [4.2] și a fost utilizată la demonstrarea convergenței iterației Mann în cazul unui operator liniar care satisface o anumită condiție de pozitivitate. Condiția a fost dezvoltată în mai multe lucrări, de exemplu în [4.4] a fost considerată aceiași condiție in spații Banach cu o structură specială pentru iterația Mann iar în [4.5] ea a fost utilizată ca și condiție suplimentară în cazul iterației Ishikawa.

(2) Condiția de σ -demicontractivitate. Condiția a fost introdusă în [4.6] și a fost propusă ca o condiție suplimentară de convergență tare. Rezultatul principal al lucrării este următorul: Dacă operatorul este atât demicontractiv cât și σ -demicontractiv atunci iterația Mann converge în normă la un punct fix. Osilike [4.7] a observat că de fapt condiția de σ -demicontractivitate este suficienta pentru convergența în normă; pe de altă parte această condiție este relativ restrictivă, astfel că, de exemplu, în cazul unei funcții reale mulțimea punctelor fixe trebuie sa fie situată în extremitatea dreaptă a intervalului de definiție. In aceiași lucrare Osilike a extins rezultatele din [4.6] pentru iterația Ishikawa în cazul operatorilor Lipschitz σ -hemicontractivi.

(3) Obital expansivitate/cvasi-expansivitate. Recent [4.8], [4.9] au fost propuse două condiții de tip expansiv pentru convergența tare a a iterației Mann, numite *orbital expansivitate* și *cvasi-expansivitate,* respectiv (prin analogie cu orbital contractivitatea și cvasi-nonexpansivitatea). În cazul unei funcții reale condiția de cvasi-expansivitate coincide cu cea de demicontractivitate, ceea ce corespunde cu faptul că într-un spațiu de dimensiune finita nu sunt necesare condiții suplimentare.

În încheierea acestor rânduri se cuvine să spunem că aceste rezultate de excepție în domeniul teoriei, calculului și aplicațiilor punctelor fixe nu au apărut pe un teren gol. Ele s-au datorat în bună măsură înaintașilor din Timișoara în învățământul universitar,matematicieni și profesori de o înaltă ținută profesională și morală, E. Arghiriade, N. Mihăileanu, Gh. Th. Gheorghiu. I. Bâtea, M. Reghiș.

[1.1] J.A. Baker, The stability of certain functional equations, Proc. Amer. Math. Soc. 112 (1991), 729-732.

[1.2] V. Radu, The fixed point alternative and the stability of functional equations, Fixed Point Theory 4 (2003), no. 1, 91-96.

[1.3] J. B. Diaz, B. Margolis, A fixed point theorem of the alternative for contractions on a generalized complete metric space, Bull. Amer. Math. Soc. 74 (1968), 305-309

[M1] D. Miheț, A Banach contraction theorem in fuzzy metric spaces, Fuzzy Sets and Systems 144 (2004), 431-439.

[M7] D. Miheţ, On fuzzy contractive mappings in fuzzy metric spaces, Fuzzy Sets and Systems 158 (2007), 915-921.

[M11] D. Miheţ, Fuzzy ψ-contractive mappings in non-Archimedean fuzzy metric spaces, Fuzzy Sets and Systems 159 (2008), 739-744.

[M12] D. Miheţ, V. Radu, On the stability of the additive Cauchy functional equation in random normed spaces, Journal of Mathematical Analysis and Applications, 343 (2008), 567-572.

[M16] [D. Miheţ, The fixed point method for fuzzy stability of the Jensen functional equation, Fuzzy Sets and Systems 160 (2009), 1663-1667])

[R1] V. Radu, Some Fixed Point Theorems in PM Spaces, Lectures Notes in Mathematics,vol. 1233, Springer, Berlin, 1985, pp. 125–133.

[4.1] Șt. Mărușter, Sur le calcul des zeros d'un operateur discontinu par iteration, Canad. Math. Bull. 16 (4) (1973) 541-544.

[4.2] Șt. Mărușter, The solution by iteration of nonlinear equations in Hilbert spaces, Proc. Amer. Math. Soc. 63 (1) (1977) 69-73.

[4.3] T.L.Hicks, J.D.Kubicek, On the Mann iteration process in a Hilbert spaces, J. Math. Anal. Appl. 59 (1977) 489-504.

[4.4] C.E. Chidume, An iterative method for nonlinear demiclosed monotone-type operators, International Centre for Theoretical Physics, Trieste, Jan. 1991.

[4.5] M.O.Osilike, Strong and waeak convergence of the Ishikawa iteration for a class of nonlinear equations, Bull. Korean Math. Soc., 37 (1) (2000) 153-169.

[4.6] L.Maruster, St.Maruster, Strong convergence of the Mann iteration for α -demiccontractive mappings, Mathematical and Computer Modeling, 54 (9-10) (2011) 2486-2492.

[4.7] M.O.Osilike, Strong convergence of the Ishikawa iteration for Lipschitz α -demicontractive Mappings, Ann. West Univ. Timisoara, LIII (1) (2015) 151-160.

[4.8] St.Maruster, Strong convergence of the Mann iteration for demicontractive mappings, Applied Mathematical Sciences, 9 (2015) 2061-2068.

[4.9] St.Maruster, I.A.Rus, Kannan contractions and strongly demicontractive mappings, Creative Mathematics and Informatics, 24 (2) (2015) 171-180.

[4.10] G.Marino, H-K.Xu, Weak and strong convergence theorems for strict pseudo-contractions in Hilbert spaces, J. Math. Anal. Appl., 329 (2007) 336-346.

Prof.dr.univ. Ştefan Măruşter