27 octombrie 2018 Asist. dr. Mihai Iancu

Inducţie

Notaţii:
- $\mathbb{N} = \{0, 1, \ldots\}$ reprezintă mulţimea numerelor naturale.
- $\mathbb{N}^* = \{1, 2, \ldots\}$ reprezintă mulţimea numerelor naturale nenule.

Inducţie matematică (în două versiuni):
Fie $P(n)$ o propoziţie care depinde de $n \in \mathbb{N}$, $n \geq m$, unde $m \in \mathbb{N}$ este fixat. Demonstrăm că $P(n)$ e adevărată pentru orice $n \in \mathbb{N}$, $n \geq m$, prin inducţie matematică, verificând următorii paşi:

Versiunea I:
1) $P(m)$ e adevărată;
2) $\forall k \in \mathbb{N}, k \geq m : P(k)$ e adevărată $\implies P(k+1)$ e adevărată.

Versiunea a II-a:
1) $P(m), \ldots, P(m+l-1)$ sunt adevărate, unde $l \in \mathbb{N}^*$ este fixat;
2) $\forall k \in \mathbb{N}, k \geq m : P(k)$ e adevărată $\implies P(k+l)$ e adevărată.

Probleme

1. Demonstraţi că $\forall n \in \mathbb{N}^* : 1^3 + 2^3 + \ldots + n^3 = \dfrac{n^2(n+1)^2}{4}$.

2. Demonstraţi că $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq 2 : \dfrac{1}{n+1} + \dfrac{1}{n+2} + \ldots + \dfrac{1}{n+n} > \dfrac{13}{24}$.

3. Demonstraţi că $\forall n \in \mathbb{N}^* : 43 \big| 6^{n+1} + 7^{2n-1}$.

4. Fie α un număr real. Demonstraţi că $\forall n \in \mathbb{N}^*$:

$$\begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} \cos(n\alpha) & -\sin(n\alpha) \\ \sin(n\alpha) & \cos(n\alpha) \end{pmatrix}.$$

5. Demonstraţi că următoarea propoziţie este adevărată $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq 14$:
$P(n)$: n se poate scrie ca o sumă de termeni egali doar cu 3 sau 8.

6. Demonstraţi că următoarea propoziţie este adevărată $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq 6$:
$P(n)$: orice pătrat se poate împărţi în n pătrate mai mici.

7. Demonstraţi că $\forall n \in \mathbb{N}^* : \sqrt{1 + \sqrt{2 + \ldots + \sqrt{n}}} < 2$.

8. Demonstraţi că următoarea propoziţie este adevărată $\forall n \in \mathbb{N}$:
$P(n)$: oricare ar fi $P_1, P_2, \ldots, P_{2n+1}$ puncte pe un semicerc centrat în O şi de rază 1, avem

$$\left| \overrightarrow{OP}_1 + \overrightarrow{OP}_2 + \ldots + \overrightarrow{OP}_{2n+1} \right| \geq 1.$$