

Șiruri

1. (Admitere 2016) Fie funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = |x|\sqrt[3]{1-x^2}$.

a) Arătați că f este mărginită superior pe \mathbb{R} .

b) Calculați $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-1}^1 x^{2n} f(x) dx$.

2. (Admitere 2019) Calculați limitele șirurilor:

$$x_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{k}{\sqrt{n^2+k}}, \quad y_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{k}{\sqrt{n^2+k^2}}, \quad n \in \mathbb{N}^*.$$

3. (Admitere 2015) Fie funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = e^{x-1}$.

a) Arătați că $f(x) > x$, $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$.

b) Definim șirul $(x_n)_{n \geq 1}$ prin $x_1 = 2$, $x_{n+1} = f(x_n)$, $\forall n \geq 1$. Arătați că șirul este strict monoton și calculați limita sa. Ce se întâmplă dacă luăm $x_1 = 1/2$?

4. Calculați următoarele limite:

a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{7^n}{n^7}$.

b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n} (7^{\sqrt{n+1}} - 7^{\sqrt{n}} - 1)$.

c) $\lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\sqrt[7]{\frac{n+1}{n}} - 1 \right)$.

d) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n} [(\sqrt{n} + 1 - \sqrt{n+1})^7 - 1]$.

e) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{7^n}{(7n)!}$.

f) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \dots \cdot (2n)}$.