Universitatea Babeş-Bolyai, Facultatea de Matematică şi Informatică
Consultaţii la Matematică pentru pregătirea concursului de admitere 2019

23 martie 2019 Conf. dr. Ciprian Modoi

Structuri algebrice

1. (a). Se consideră mulţimea $G = \{x + y\sqrt{2} \mid x, y \in \mathbb{Q},\ x^2 - 2y^2 = 1\}$. Să se arate că G împreună cu înmulţirea numerelor reale formează un grup.

(b). Se consideră mulţimea $M = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 2b & a \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{Q},\ a^2 - 2b^2 = 1 \right\}$. Să se arate că M împreună cu înmulţirea matricelor formează un grup.

(c). Să se arate că grupurile G şi M sunt izomorfe. Este grupul M comutativ?

2. Se consideră mulţimea $A = \{a + b\sqrt[3]{2} \mid a, b \in \mathbb{Q}\}$. Este A un inel în raport cu adunarea şi înmulţirea numerelor reale?

3. (a). Să se arate că $K = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{R} \right\}$ este un inel împreună cu adunarea şi înmulţirea matricelor.

(b). Să se arate că $f : K \to \mathbb{C}$, $f \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} = a + ib$ este un izomorfism de inele.

(c). Este K un corp?

4. Fie A o mulţime înzestrată cu o operaţie internă $* : A \times A \to A$, care admite un element neutru $e \in A$. Să se arate că dacă pentru orice $a, b, c, d \in A$ avem

$$(a * b) * (c * d) = (a * c) * (b * d)$$

atunci operaţia $*$ este asociativă şi comutativă.

5. Se consideră $e \in \mathbb{R}$ fixat. Să se determine $a, b, c \in \mathbb{R}$ cu proprietatea că operaţia

$$* : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x * y = ax + by + c$$

induce pe $\mathbb{R}$ o structură de grup al cărui element neutru este e.

6. (a). Să se arate că grupurile $(\mathbb{R}_+^*, \cdot)$ şi $(\mathbb{R}, +)$ sunt izomorfe (am notat $\mathbb{R}_+^* = (0, \infty)$).

(b). Să se arate că grupurile $(\mathbb{R}^*, \cdot)$ şi $(\mathbb{R}, +)$ nu sunt izomorfe.

7. Să se determine morfismele de inele

(a). de la $\mathbb{Z}$ la $\mathbb{R}$;

(b). de la $\mathbb{Q}$ la $\mathbb{R}$.