

Integrale. Aplicații

1. Să se calculeze următoarele integrale definite:

a) $\int_0^1 x^2 \operatorname{arctg} x dx$,

b) $\int_0^{\ln 2} \sqrt{e^x - 1} dx$,

c) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(1 + \operatorname{tg} x) dx$,

d) $\int_{\pi}^{\frac{5\pi}{4}} \frac{\sin 2x}{\sin^4 x + \cos^4 x} dx$ (temă pentru acasă).

2. Fie $a, b \in \mathbb{R}$ cu $a < b$, iar $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție continuă, care nu este identic nulă. Să se demonstreze că $\int_a^b f^2(x) dx > 0$.

3. Se consideră șirul $(I_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$, $I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{x^2 + 2019} dx$.

a) Să se calculeze I_1 .

b) Să se arate că $I_{n+2} + 2019I_n = \frac{1}{n+1}$, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}^*$.

c) Să se arate că șirul $(I_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ este descrescător.

d) Să se calculeze $\lim_{n \rightarrow \infty} I_n$ și $\lim_{n \rightarrow \infty} nI_n$.