

## Reprezentări grafice ale funcțiilor

### A. Asimptote - breviar teoretic

Fie  $\emptyset \neq D \subseteq \mathbb{R}$  și funcția  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ .

**Observație:** Asimptotele atașate oricărei funcții se determină analizând limitele funcției  $f$  în punctele de acumulare ale domeniului de definiție, care nu aparțin domeniului, deci din mulțimea

$$D' \setminus D.$$

Reamintim definiția mulțimii punctelor de acumulare

$$D' = \left\{ x_0 \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\} : \forall V \in \mathcal{V}(x_0), \quad V \cap D \setminus \{x_0\} \neq \emptyset \right\}.$$

O submulțime  $V$  a lui  $\mathbb{R} \cup \{\pm\}$  este vecinătate a lui  $x_0$  (deci  $\in \mathcal{V}(x_0)$ ) dacă, atunci când:

- $x_0 \in \mathbb{R}$      $\exists r > 0$  astfel încât  $(x_0 - r, x_0 + r) \subseteq V$ ;
- $x_0 = \infty$      $\exists r > 0$  astfel încât  $(r, \infty] \subseteq V$ ;
- $x_0 = -\infty$      $\exists r > 0$  astfel încât  $[-\infty, -r) \subseteq V$ ;

Folosind aceste formulări echivalente prin intervale centrate (degenerate pentru  $\pm\infty$ ), obținem următoarele formulări echivalente pentru punctele de acumulare ale unei mulțimi. Astfel

$$\begin{aligned} \text{dacă } x_0 \in \mathbb{R}, \text{ atunci } x_0 \in D' &\iff \forall r > 0, \quad (x_0 - r, x_0 + r) \cap D \setminus \{x_0\} \neq \emptyset \\ \infty \in D' &\iff \forall r > 0, \quad (r, \infty] \cap D \neq \emptyset \\ -\infty \in D' &\iff \forall r > 0, \quad [-\infty, -r) \cap D \neq \emptyset \end{aligned}$$

**Observație:**

- Dacă  $D$  este nemărginită inferior, atunci  $-\infty \in D'$ .
- Dacă  $D$  este nemărginită superior, atunci  $\infty \in D'$ .
- Dacă  $x_0 \in D$ , dar **nu este punct izolat** atunci  $x_0 \in D'$ , deci  $D \setminus IzoD \subset D'$ .
- De cele mai multe ori, chiar și pentru mulțimi mărginite,  $D' \setminus D \neq \emptyset$ .
- Fie  $a < b \in \mathbb{R}$ . Atunci
  - dacă  $(a, b) \in D$ , atunci  $a \in D' \setminus D$ ;
  - dacă  $[a, b) \in D$ , atunci  $b \in D' \setminus D$ ;
  - dacă  $(a, b) \in D$ , atunci  $a, b \in D' \setminus D$ .

Studiind limitele funcției  $f$  către  $\infty$  și respectiv  $-\infty$  putem obține în cazuri particulare, fie asimptote **orizontale**, fie **oblice** la graficul funcției  $f$ . Astfel, diferențiem:

- **Asimptote orizontale**

– Dacă  $D$  este nemărginită inferior (deci  $-\infty \in D'$ ), se verifică existența

$$a := \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x).$$

Dacă  $\exists a \in \mathbb{R}$ , atunci dreapta de ecuație

$$y = a = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$$

este **asimptota orizontală către  $-\infty$**  a funcției  $f$ .

– Dacă  $D$  este nemărginită superior (deci  $\infty \in D'$ ), se verifică existența

$$b := \lim_{x \rightarrow \infty} f(x).$$

Dacă  $\exists b \in \mathbb{R}$ , atunci dreapta de ecuație

$$y = b = \lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$$

este **asimptota orizontală către  $\infty$**  a funcției  $f$ .

- **Asimptote oblice** (se verifică existența lor doar atunci când nu există cele orizontale)

– Dacă  $D$  este nemărginită inferior și  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) \notin \mathbb{R}$ , analizăm

$$m := \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x}.$$

Dacă  $m \in \mathbb{R}$ , verificăm dacă există în  $\mathbb{R}$

$$n = \lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - mx).$$

Atunci, dreapta de ecuație

$$y = mx + n$$

este **asimptota oblică către  $-\infty$**  a funcției  $f$ .

– Dacă  $D$  este nemărginită inferior și  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) \notin \mathbb{R}$ , analizăm

$$m' := \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x}.$$

Dacă  $m' \in \mathbb{R}$ , verificăm dacă există în  $\mathbb{R}$

$$n' = \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - m'x).$$

Atunci, dreapta de ecuație

$$y = m'x + n'$$

este **asimptota oblică către  $\infty$**  a funcției  $f$ .

- **Asimptote verticale** se caută analizând limitele laterale în puncte situate în mulțimea

$$\left(D' \setminus D\right) \cap \mathbb{R}.$$

În fapt, aceste puncte sunt toate capetele reale ale intervalelor deschise incluse în  $D$ . Fiecare astfel de punct trebuie analizat în parte. Astfel, pentru fiecare

$$x_0 \in \left(D' \setminus D\right) \cap \mathbb{R},$$

se analizează limitele laterale ale lui  $f$  în  $x_0$ .

- Dacă

$$\exists \quad f(x_0 - 0) = \lim_{x \uparrow x_0} f(x) \in \{\pm\infty\}.$$

atunci dreapta de ecuație

$$x = x_0$$

este **asimptotă verticală la stânga** la graficul funcției  $f$ .

- Dacă

$$\exists \quad f(x_0 + 0) = \lim_{x \downarrow x_0} f(x) \in \{\pm\infty\}.$$

atunci dreapta de ecuație

$$x = x_0$$

este **asimptotă verticală la dreapta** la graficul funcției  $f$ .

- Dacă

$$\exists \quad f(x_0 - 0) = f(x_0 + 0) \in \{\pm\infty\}.$$

atunci dreapta de ecuație

$$x = x_0$$

este **asimptotă verticală** la graficul funcției  $f$ .

## B. Algoritm de abordare al graficului unei funcții

### I. Analiza lui $D$ și a lui $D'$

1. Determinarea mulțimii de definiție
2. Studiul parității (simetrie față de axa  $Oy$ ), imparității (simetria față de origine) sau a periodicității.
3. Intersecția cu axele de coordonate
4. Asimptote
5. Mulțimea de continuitate  $C \subseteq D$ .

### II. Analiza cu ajutorul derivatei de ordinul 1

1. Determinarea mulțimii de derivabilitate  $D_1 \subset D$ .

2. Calcularea valorilor funcției derivate  $f'$ .
3. Studiarea pentru fiecare punct  $x_0 \in C \setminus D_1$  a derivatelor laterale la stânga și la dreapta și determinarea
  - **punctelor unghiulare**, atunci când există ambele derivate laterale, și cel puțin una e finită.
  - **punctelor de întoarcere**, atunci când există amândoua derivatele laterale, sunt infinite și diferite.
4. Determinarea soluțiilor reale ale ecuației  $f'(x) = 0$ .
5. Studiarea monotoniei și a punctelor de extrem ale  $f$  prin analizarea tabelului de variație funcției derivate derivatei.

### III. Analiza cu ajutorul derivatei de ordinul al II-lea

1. Determinarea mulțimii de derivabilitate pentru derivate de ordinul 2  $D_2 \subset D_1$ .
2. Calcularea valorilor funcției derivate de ordinul 2,  $f''$ .
3. Determinarea soluțiilor reale ale ecuației  $f''(x) = 0$ .
4. Stabilirea
  - **intervalelor de convexitate**, când  $f''(x) \geq 0$ ;
  - **intervalelor de concavitate**, când  $f''(x) \leq 0$ ;
  - **punctelor de inflexiune** în care derivata de ordinul 2 are o schimbare de semn.

## C. Aplicații

a) Reprezentați grafic funcțiile definite prin:

1.  $f(x) = x^3 - 3x + 2$ ;
2.  $f(x) = \frac{1}{x^2 - 4x + 3}$ ;
3.  $f(x) = \frac{\sin x}{1 + \sin x}$ ;
4.  $f(x) = \frac{|1 + x|}{1 + |x|}$ ;
5.  $f(x) = \sqrt[3]{(x - 1)^2}$
6.  $f(x) = \frac{2 \ln x - 1}{x^2}$ ;
7.  $f(x) = \frac{|\ln x|}{\sqrt{x}}$ .

b) Analizând reprezentarea grafică, prin discuție după parametrul  $m \in \mathbb{R}$ , stabiliți numărul de soluții reale ale ecuației

$$f(x) = m,$$

pentru funcțiile 1, 6 și 7 de la subpunctul a). Indicație: translați graficul de-a lungul axei  $Oy$ .