

Șiruri

1. (*Admitere 2016*) Fie funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = |x|\sqrt[3]{1-x^2}$.
 - a) Arătați că f este mărginită superior pe \mathbb{R} .
 - b) Calculați $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-1}^1 x^{2n} f(x) dx$.

2. (*Admitere 2015*) Fie funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = e^{x-1}$.
 - a) Arătați că $f(x) > x, \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$.
 - b) Definim șirul $(x_n)_{n \geq 1}$ prin $x_1 = 2$, $x_{n+1} = f(x_n), \forall n \geq 1$. Arătați că șirul este strict monoton și calculați limita sa.

3. (*Admitere 2017*) Fie funcția $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{2}{\ln 5} \ln(1+x) + \sqrt{x}$.
 - a) Arătați că $4 \leq f(x) \leq x, \forall x \geq 4$.
 - b) Demonstrați că șirul definit prin relația $x_{n+1} = f(x_n), \forall n \in \mathbb{N}, x_0 \geq 4$ este convergent și calculați limita sa.

4. Calculați următoarele limite:
 - a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{7^n}{n^7}$.
 - b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n} \left(7^{\sqrt{n+1}} - 7^{\sqrt{n}} - 1 \right)$.
 - c) $\lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\sqrt[7]{\frac{n+1}{n}} - 1 \right)$.
 - d) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n} \left[(\sqrt{n} + 1 - \sqrt{n+1})^7 - 1 \right]$.
 - e) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{7^n}{(7n)!}$.
 - f) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \dots \cdot (2n)}$.