8 decembrie 2018 Prof. dr. Nicolae Popovici

Continuitate şi derivabilitate

1. Fie $f : [-1,1] \cup \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$ funcţia definită prin

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\arcsin x}{x} & \text{dacă } x \in [-1,1] \setminus \mathbb{Z} \\ 2019^x & \text{dacă } x \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

Să se determine mulţimea punctelor de continuitate ale funcţiei f.

2. Se consideră funcţiile $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ şi $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definite prin

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{dacă } x \in \mathbb{Q} \\ -x & \text{dacă } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases} \quad \text{şi} \quad g(x) = \begin{cases} x^2 & \text{dacă } x \in \mathbb{Q} \\ -x^2 & \text{dacă } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}. \end{cases}$$

Să se studieze continuitatea şi derivabilitatea acestor funcţii (în fiecare punct al domeniului lor de definiţie).

3. Să se arate că dacă $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ este o funcţie continuă şi mărginită, atunci există $c \in \mathbb{R}$ astfel încât $f(c) = c$.

4. Fie $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Să se arate că dacă $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ este o funcţie continuă pe $[a,b]$ şi derivabilă pe (a,b), atunci există $c \in (a,b)$ astfel încât $(c-a)(c-b)f'(c) + 2c = a + b$.

5. Se consideră funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definită prin

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{dacă } x \leq 0 \\ e^{-1/x} & \text{dacă } x > 0. \end{cases}$$

a) Studiaţi monotonia şi convexitatea/concavitatea funcţiei f.
b) Determinaţi toate punctele de extrem local ale funcţiei f.
c) Determinaţi toate punctele de extrem global ale funcţiei f.
d) Demonstraţi că f este indefinit derivabilă.

Observaţie: Problemele de tip grilă pot avea unul sau mai multe răspunsuri corecte. De exemplu, pe baza problemei 5 se pot formula diferite probleme de tip grilă, cum ar fi:

5'. Se consideră funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definită prin

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{dacă } \ x \leq 0 \\ e^{-1/x} & \text{dacă } \ x > 0. \end{cases}$$

Indicaţi care dintre următoarele afirmaţii sunt adevărate:

$\boxed{\text{A}}$ f are o infinitate de puncte de minim global;

$\boxed{\text{B}}$ f nu are puncte de maxim local;

$\boxed{\text{C}}$ f este indefinit derivabilă;

$\boxed{\text{D}}$ f este convexă şi concavă pe $(-\infty, 0]$.